

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.com

ИСТОРИЯ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

ОТЕЧЕСТВЕННОЙ



АКАДЕМИЯ НАУК
СССР

АКАДЕМИЯ НАУК
УССР

Киев — 1970



АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВО-
ЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

АКАДЕМИЯ НАУК УССР

СЕКТОР ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНА-
НИЯ И ТЕХНИКИ ИНСТИТУТА
ИСТОРИИ

История

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ:

И. З. Штокало (*ответственный редактор*), А. Н. Боголюбов (*заместитель ответственного редактора*), А. П. Юшкевич (*заместитель ответственного редактора*), И. Г. Башмакова, Н. Н. Боголюбов,

А. О. Гельфонд, А. Т. Григорьян, Б. Н. Делоне, Н. П. Еругин, А. Ю. Ишлинский, Й. П. Кубилюс, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, С. Н. Мергелян, Ю. А. Митропольский, Н. И. Мухелишвили, О. С. Парасюк, И. Б. Погребысский, Е. Я. Ремез, Б. А. Розенфельд, К. А. Рыбников, В. И. Смирнов, Ю. Д. Соколов, Г. С. Чогошвили, А. Б. Паплаускас (*ответственный секретарь*), В. С. Сологуб (*ответственный секретарь*).

В ЧЕТЫРЕХ ТОМАХ

РЕДАКЦИЯ 4-го ТОМА:

И. З. Штокало (*ответственный редактор*), А. Н. Боголюбов (*заместитель ответственного редактора*), А. П. Юшкевич (*заместитель ответственного редактора*), Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Гастев, Ф. Д. Гахов, В. М. Глушков, Б. В. Гнеденко, Н. П. Еругин, В. И. Крылов, Ю. А. Митропольский, Н. И. Мухелишвили, О. С. Парасюк, И. Б. Погребысский, В. И. Смирнов, А. Б. Паплаускас (*ответственный секретарь*), В. С. Сологуб (*ответственный секретарь*).

ОТЕЧЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ

4

Книга 2

1917—1967

51(09С)
И90

УДК 510 (09):519:531/534:517.1

2-2-1
127-70М

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В СССР

(ПРОДОЛЖЕНИЕ)

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Введение

Первые исследования по теории вероятностей в России относятся к началу XIX в., когда по разным поводам Н. И. Лобачевскому, М. В. Остроградскому и В. Я. Буняковскому пришлось решить ряд частных задач. Лобачевский исходил при этом из попыток проверки посредством наблюдений той геометрической системы, которая господствует во вселенной. Остроградский занимался некоторыми прикладными вопросами, в том числе вопросом приемочного контроля продукции, сдаваемой поставщиком. В. Я. Буняковский также исходил в своих исследованиях из необходимости решения некоторых практических задач; ему принадлежит фундаментальное руководство «Основания математической теории вероятностей» (1846 г.). Период первичного ознакомления с теорией вероятностей был необходимым важным этапом в развитии интересов к этой отрасли математики в России.

Постановка и решение общих проблем теории вероятностей и начало становления ее как большой математической науки со специфическими постановками проблем, играющих главную роль во всем естествознании, связаны с именами П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова и А. А. Маркова. Доказательством закона больших чисел Чебышев не только открыл в науке общую и важную закономерность, но и дал исключительно простой и сильный метод, важный не только для теории вероятностей, но и для всей математики. Позднее А. А. Марков увидел, что метод Чебышева позволяет установить более широкие условия применимости закона больших чисел. Естественным продолжением исследований по выяснению условий, в которых средние арифметические сумм независимых случайных величин сближаются с последовательностью постоянных, является оценка вероятностей того, что отклонения средних арифметических от указанных констант не выйдут за заданные границы. Классические результаты Муавра и Лапласа, относящиеся к схеме Бернулли, ко времени Чебышева были обобщены только на схему последовательности независимых испытаний с переменной вероятностью появления изучаемого события. В то же время теория ошибок наблюдений



Участники III Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. Киев, 1953 г.

настоятельно требовала более широких обобщений. В работах Лапласа и известного астронома Бесселя были высказаны предположения о том, что если наблюдаемая ошибка является результатом суммирования очень большого числа независимых ошибок, каждая из которых мала по сравнению с суммой остальных, то ее распределение должно быть близким к нормальному. Нам не известны математические результаты в этом направлении до П. Л. Чебышева. Хотя в доказательстве Чебышева и имеются логические пробелы, а в формулировке его теоремы нет необходимых ограничений, заслуга Чебышева в решении этой проблемы непреходяща. Она состоит в том, что Чебышеву удалось, во-первых, разработать метод доказательства (метод моментов), во-вторых, поставить вопрос об оценке быстроты сходимости и отыскания асимптотических разложений и, в-третьих, заострить вопрос на важности изучения этой задачи.

Отметим, кстати, что вскоре после появления публикации П. Л. Чебышева вышло две работы А. А. Маркова, в которых были строго доказаны более общие предложения по сравнению с предложением, сформулированным Чебышевым; метод исследования был тот же — метод моментов. После опубликования А. М. Ляпуновым двух замечательных исследований на эту же тему казалось, что метод моментов потерял свое значение. Действительно, если Чебышев и Марков требовали, чтобы слагаемые имели конечные моменты всех порядков, то Ляпунову удалось установить такие условия, в которых требуется лишь ограниченное число моментов (до третьего и даже несколько меньшего). Примененный им метод фактически является прототипом современного метода характеристических функций. Ляпунову удалось также не только доказать достаточность предложенных им условий для сходимости к нормальному распределению функций распределения соответствующ-

щим образом нормированных и центрированных сумм независимых слагаемых, но и получить оценку быстроты сходимости. Марков приложил немало усилий, чтобы восстановить «честь» метода моментов. Это ему удалось сделать с помощью весьма остроумного приема, нередко используемого и в наше время. Прием состоит в следующем. Вместо заданной последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ рассматриваем последовательность урезанных величин, определенных по правилу

$$\xi_n^* = \begin{cases} \xi_n, & \text{если } |\xi_n| \leq N_n, \\ 0, & \text{если } |\xi_n| > N_n. \end{cases}$$

Число N_n находится в нашем распоряжении, и для достаточно больших N_n равенство $\xi_n^* = \xi_n$ выполняется с подавляющей вероятностью. Величины ξ_n^* обладают уже моментами всех порядков, к ним применимы ранее полученные Марковым результаты. Соответствующим выбором чисел N_n можно добиться того, что суммы величин ξ_n^* и первоначальных величин ξ_n имеют сближающиеся функции распределения. Таким способом А. А. Маркову удалось показать, что метод моментов позволяет получить все результаты А. М. Ляпунова.

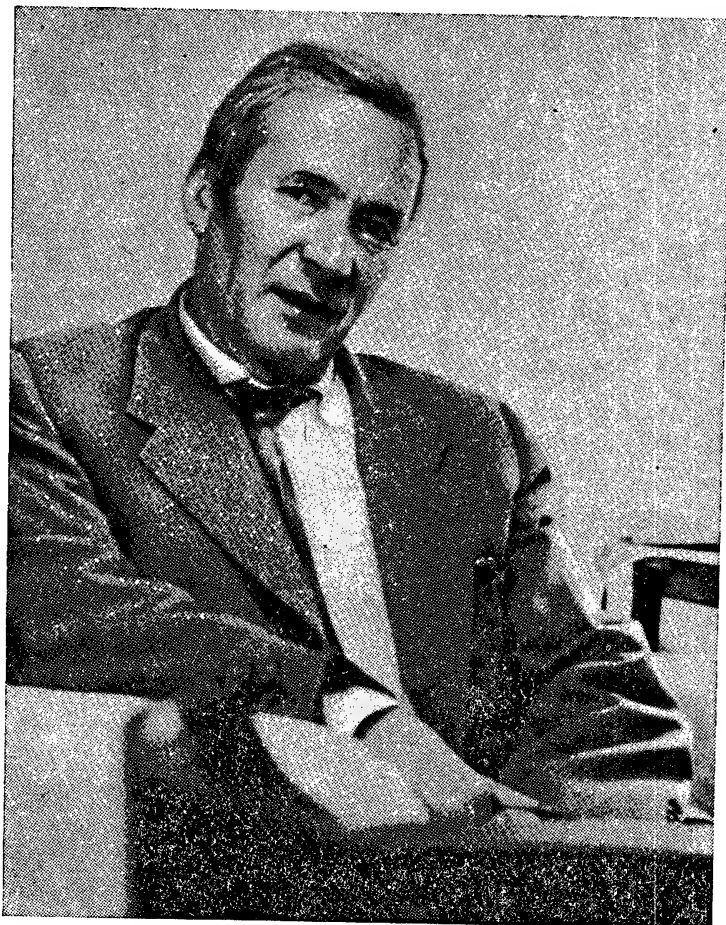
В 1906 г. А. А. Марков начал серию исследований, которыми открыл новый объект изучения в теории вероятностей и в ее приложениях в естествознании и технике. Именно он начал рассматривать последовательности случайных величин и последовательности испытаний, зависящие особым образом. Эта зависимость состоит в том, что распределение случайной величины ξ_n , если известно значение, которое приняла величина ξ_{n-1} , не изменяется от того, что становятся известными значения величин ξ_k с индексами k меньшими $n - 1$. Идею цепных зависимостей, получивших в наше время разнообразные применения, Марков иллюстрировал лишь на примерах чередования гласных и согласных в литературных произведениях. Им были изучены большие отрывки литературных произведений («Евгений Онегин» А. С. Пушкина и «Детские годы Багрова-внука» С. Т. Аксакова). Поставленные П. Л. Чебышевым задачи для сумм независимых слагаемых возникли у А. А. Маркова и для случайных величин, связанных цепной зависимостью. Распространение на зависимые величины закона больших чисел не встретило слишком больших затруднений. Гораздо большие затруднения возникли при доказательстве центральной предельной теоремы. Используемый Марковым метод моментов требует вычисления центральных моментов всех целых порядков для сумм

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k),$$

где

$$B_n^2 = D \sum_{k=1}^n \xi_k,$$

и доказательства сходимости их при $n \rightarrow \infty$ к соответствующим моментам нормального распределения. Большие вычислительные трудности



А. Н. Колмогоров.

в ряде случаев Марков преодолел. В принципиальном отношении еще важнее то, что он доказал новые предельные теоремы, являющиеся прототипом так называемых эргодических теорем. Для марковских цепей распределение ξ_n по мере роста n все в меньшей степени зависит от значения, принятого ξ_1 (далекое состояние системы с течением времени все в меньшей мере зависит от ее начального состояния).

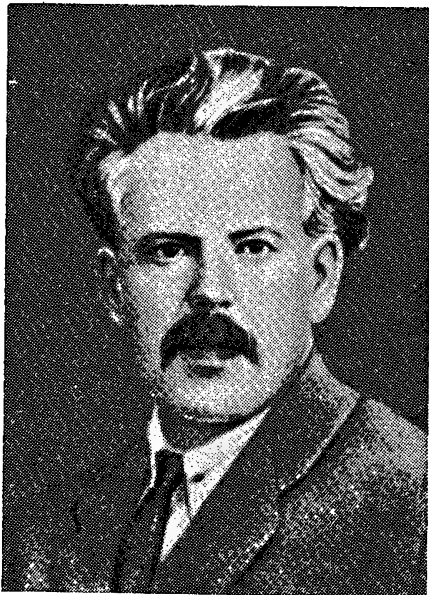
Следующее направление теории вероятностей, которое развивалось А. А. Марковым, а также другими исследователями до Великой Октябрьской социалистической революции, связано с построением теории ошибок наблюдений. Этому вопросу уделяли большое внимание астрономы, и их вклад не ограничивался только методическими улучшениями в изложении уже известных результатов.

На протяжении XIX и начала XX в. в России были созданы учебники по теории вероятностей, уровень которых соответствовал уровню развития теории вероятностей того времени. Это учебники В. Я. Буняковского, М. А. Тихомандрицкого, В. П. Ермакова, А. А. Маркова и С. Н. Бернштейна. Учебник А. А. Маркова (1900 г.) сыграл значительную роль в развитии теории вероятностей в нашей стране. В нем доста-

точно широко и в то же время элементарно изложен ряд научных результатов автора, что способствовало развитию у читателей интереса не только к пассивному познанию, но и к активному мышлению. Книга С. Н. Бернштейна, оказывавшая долгое время серьезное влияние на развитие теории вероятностей в нашей стране, была издана в 1911 г. в Харькове литографским способом. Уже в этом издании она отличалась многими характерными особенностями. С новыми задачами математической статистики, которые в первом десятилетии XX в. начали формироваться в Англии, познакомила русских читателей книга Е. Е. Слуцкого «Теория корреляции и элементы учения о кривых распределения».

В годы, непосредственно предшествовавшие Великой Октябрьской социалистической революции, стали появляться работы двух математиков, сыгравших важную роль в формировании направлений исследований по теории вероятностей и математической статистике в нашей стране,— С. Н. Бернштейна и Е. Е. Слуцкого. Исследования С. Н. Бернштейна в первый период его деятельности относились к таким важным направлениям, как уточнение теоремы Лапласа, вопросы логического обоснования теории вероятностей и перенесение методов, специфических для теории вероятностей, на задачи теории функций. Именно в этот период ему удалось найти замечательное доказательство теоремы Вейерштрасса. Е. Е. Слуцкий работал над проблемами математической статистики, преимущественно связанными с вопросами теории корреляции.

Таким образом, до Великой Октябрьской социалистической революции в нашей стране уже были научные предпосылки для развития теории вероятностей. Создание же в стране после революции огромной сети высших учебных заведений, научно-исследовательских институтов и республиканских академий наук способствовало росту научных исследований во многих городах, организации значительных математических коллективов, формированию новых направлений исследований. Так, в молодом тогда Среднеазиатском университете В. И. Романовский создал крупную школу в области математической статистики и теории цепей Маркова. В Москве, в старейшем университете страны на базе школы теории функций действительного переменного была создана известная московская школа теории вероятностей, влияние которой на развитие теории вероятностей в последние десятилетия трудно переоценить. Построение фундамента теории вероятностей, широкое развитие классической проблематики предельных теорем для сумм независимых слагаемых, формирование понятия случайного процесса и построение начал теории процессов (без последствия, стационарных и со стационарными приращениями, ветвящихся), развитие методов статистической физики, теории массового обслуживания и теории надежности, теории информации и многие другие вопросы являются предметом исследования московских специалистов в области теории вероятностей. Начало теоретико-вероятностных исследований в Москве связано с именами двух выдающихся математиков — А. Я. Хинчина и А. Н. Колмогорова. В Киеве в 30-е годы начали исследования по эргодическим теоремам для цепей Маркова Н. М. Крылов и Н. Н. Боголю-



Е. Е. Слуцкий.

бов. В своих построениях они исходили из теории динамических систем, а непосредственным поводом для исследования послужило стремление обосновать эргодическую гипотезу, высказанную еще Больцманом. Позднее эта проблематика расширялась, смыкаясь с постановками задач московских математиков.

После Великой Отечественной войны Ю. В. Линник в Ленинграде и его ученики в Вильнюсе создали новые сильные коллективы, работающие в различных направлениях теории вероятностей и математической статистики.

За годы Советской власти издано большое количество монографий и учебников по теории вероятностей. Некоторые книги советских математиков получили международное признание, неоднократно издавались и издаются за рубежом. Фундамен-

тальная монография А. Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей», а также книга, написанная им совместно с Б. В. Гнеденко, «Предельные распределения для сумм независимых случайных величин» изданы на немецком, английском и других языках. Книги А. Я. Хинчина «Асимптотические законы теории вероятностей», «Математические методы теории массового обслуживания», «Математические основания квантовой статистики», «Математические основания статистической механики» изданы в США, Англии, Германии и других странах. Монографии Ю. В. Линника «Метод наименьших квадратов и основы обработки наблюдений», «Разложения вероятностных законов» изданы в США. В США издана также опубликованная сравнительно недавно книга А. В. Скорохода «Исследования по теории случайных процессов». На немецкий язык переведена монография Е. Б. Дынкина «Основания теории марковских процессов». «Курс теории вероятностей» Б. В. Гнеденко выдержал несколько изданий в США и ГДР, переведен на французский, китайский, корейский, вьетнамский языки. В США регулярно выходят сборники переводов статей советских авторов по теории вероятностей и математической статистике. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» полностью переводится на английский язык и издается в США.

По математической статистике в первую очередь следует назвать книги Н. В. Смирнова и И. В. Дунина-Барковского «Математическая статистика в технике» и «Краткий курс математической статистики с техническими применениями», и книгу Ю. В. Линника «Статистические задачи с мешающими параметрами» (1966 г.). Л. Н. Большевым и Н. В. Смирновым составлены превосходные «Таблицы математической статистики», ряд таблиц принадлежит Е. Е. Слуцкому, Н. В. Смирнову и др.

В связи со значительным ростом исследований в области теории вероятностей и математической статистики был создан специализированный теоретико-вероятностный журнал «Теория вероятностей и ее приложения». Кроме того, работы по теории вероятностей продолжают публиковаться в общематематических и различных специальных изданиях. В последние годы резко увеличилось количество статей теоретико-вероятностного содержания на страницах инженерно-технических журналов, что, несомненно, свидетельствует о взаимосвязи требований современной техники и теоретических изысканий математиков, а также о повышении уровня теоретико-вероятностной подготовки инженеров.

Вклад советских ученых в развитие теории вероятностей заслуживает самой высокой оценки. Создав аксиоматику теории вероятностей на базе теории меры и теории функций действительного переменного, они в корне изменили эту науку, заложили прочный логический фундамент для развития новых ее ветвей. Первые работы в области создания теории случайных процессов и случайных функций привели к перемещению центра тяжести научных интересов в теории вероятностей именно в эту область. Кроме того, благодаря развитию общих методов теории случайных процессов и полей открылись большие возможности для изучения явлений природы, экономики, технических процессов. Уже первые шаги в этом направлении дали ощутимые результаты. Классическая проблематика суммирования независимых случайных величин получила очень широкое развитие, а в некоторых аспектах — и завершение. Одновременно были выдвинуты новые проблемы, позволившие придать старой тематике свежесть и увлекательность. Интенсивный прогресс техники и физики выдвинул в теории вероятностей много неожиданных постановок задач и совершенно новые направления исследований. Это в первую очередь теория информации (возникшая в США), теория вероятностных автоматов, теория оптимального управления случайными процессами, теория надежности. В развитие этих новых областей советские математики внесли также важный вклад.

Предельные теоремы теории вероятностей

Аксиоматика. Аксиоматический метод, игравший такую важную роль в развитии математики древней Греции, на многие столетия был потерян как одна из движущих сил математического прогресса. Лишь в конце XIX в. в результате развития исследований, связанных с пятым постулатом Евклида, открытия геометрии Лобачевского и более общих геометрических систем было восстановлено значение аксиоматических построений и началось интенсивное развитие аксиоматического метода. Этому в значительной мере способствовало также уточнение логических предпосылок дифференциального и интегрального исчисления и создание теории множеств. Широкое развитие аксиоматических исследований и построений не могло не коснуться и теории вероятностей. Однако удовлетворительная аксиоматическая

формулировка основных понятий и задач теории вероятностей сложилась сравнительно поздно. Причиной тому были специфический характер теории вероятностей как математической науки, недостаточная четкость ее исходных точек зрения и понятий, не совсем обычный характер математических абстракций, составляющих основу теории вероятностей.

Первая аксиоматика теории вероятностей была предложена С. Н. Бернштейном в 1913 г. Ее можно охарактеризовать в общих чертах, пользуясь современной терминологией, следующим образом. Рассматриваются алгебры предложений и формулируются свойства вероятности как монотонной функции предложения. Отсюда легко прийти к классическому определению вероятности событий. В случае бесконечных множеств предложений требуется, чтобы они образовывали σ -алгебру. Четкого же и общего определения вероятности в бесконечных совокупностях предложений фактически нет, хотя в неявном виде здесь и фигурирует свойство счетной аддитивности вероятности. Кроме того, аксиоматика Бернштейна не связана с остальными математическими теориями, аксиомы недостаточно четки и просты. Фактически, несмотря на наличие всех необходимых элементов, в аксиоматике Бернштейна построения охватывают в случае конечных совокупностей предложений только классическое определение вероятностей, в случае же бесконечных совокупностей описываются некоторые частные способы определения вероятностей, причем не доказывается, что эти способы приводят к вероятностям, обладающим нужными свойствами (счетной аддитивности).

Четкая, простая и вместе с тем весьма общая аксиоматика теории вероятностей была предложена А. Н. Колмогоровым в 1929 г. Построения А. Н. Колмогорова подробно изложены в его монографии «Основные понятия теории вероятностей» (1933 г.). Согласно точке зрения Колмогорова, события следует рассматривать как некоторые подмножества пространства элементарных событий, а вероятность — как нормированную аддитивную функцию множеств на некотором теле (алгебре) событий. Совокупность этого тела событий и вероятности Колмогоров называет полем вероятностей. Если событий бесконечно много, то добавляется требование, чтобы вероятность была непрерывной функцией множеств. Отсюда сразу следует, что бесконечные поля вероятностей допускают расширения. При этом заданное тело событий расширяется до σ -тела (σ -алгебры), а вероятность — до меры на этой σ -алгебре.

Следует отметить, что, хотя описанная точка зрения четко сформулирована А. Н. Колмогоровым, все же она была подготовлена предшествующими исследованиями. К последним относятся как работы С. Н. Бернштейна, так и исследования Бореля, использовавшего в явном виде счетную аддитивность вероятности, Фреше, А. Ломницкого. В монографии А. Н. Колмогорова содержится также ряд новых для того времени результатов, имевших важное и принципиальное значение для развития теории вероятностей. Это, во-первых, общая теорема, дающая способ конструирования полей вероятностей в бесконечномерных пространствах, являющаяся основой тогда еще не созданной те-

ории случайных функций. Вторым, не менее важным, результатом является построение условных вероятностей и условных математических ожиданий относительно случайных величин (отображений). Эта теория играет существенную роль в общих проблемах математической статистики и в весьма развитой теории случайных процессов. (О дальнейшем развитии теории условных математических ожиданий см. книги Халмоша — «Теория меры», Дуба — «Вероятностные процессы», Лозва — «Теория вероятностей».)

Возвращаясь к аксиоматике А. Н. Колмогорова, отметим, что более общий подход состоит в аксиоматизации понятия событий без применения той или иной интерпретации. Такой подход разрабатывал В. И. Гливенко («Курс теории вероятностей», 1939 г.). Впрочем, в действительности оба подхода эквивалентны: для каждой алгебры событий (булевой алгебры) существует изоморфная алгебра множеств (Стоун, 1936 г.).

Функции от независимых случайных величин. Одной из первых работ московской школы теории вероятностей была работа А. Я. Хинчина и А. Н. Колмогорова (1925 г.) о сходимости с вероятностью, равной единице, рядов независимых случайных величин. Она довольно четко характеризовала собой подход к задачам теории вероятностей, основанный на глубокой идее о связи между теорией вероятностей и теорией функций. Позднее эта идея определила развитие теоретико-множественной аксиоматики теории вероятностей А. Н. Колмогорова (см. соответствующий раздел настоящего очерка). Полное решение задачи о сходимости рядов независимых случайных величин удалось получить А. Н. Колмогорову в 1928 г. Полученный им результат, известный под названием теоремы о трех рядах, может быть сформулирован

следующим образом: для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ независимых случайных величин ξ_n сходилась с вероятностью, равной единице, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое число $C > 0$, чтобы сходились три числовых ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| > C), \quad \sum_{n=1}^{\infty} M\xi'_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} D\xi'_n,$$

где $\xi'_n = \xi_n$ при $|\xi_n| \leq C$ и $\xi'_n = 0$ при $|\xi_n| > C$. Если рассматриваемый ряд не сходится с вероятностью, равной единице, то он расходится с вероятностью, равной единице. Это вытекает из установленной (1933 г.) также А. Н. Колмогоровым теоремы, получившей название общего закона нуля и единицы (частные случаи этой теоремы отмечались выше): если $\eta = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$, где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — независимые случайные величины, $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ — борелевская функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, не зависящая от значений любого конечного числа аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$, то η с вероятностью, равной единице, постоянна.

Суммы независимых случайных величин. Возникновение и развитие русской школы теории вероятностей связано, как упоминалось выше, с именем П. Л. Чебышева, с двумя важнейшими проблемами, которые он рассматривал, — обоснованием закона больших чисел и проблемой

сходимости сумм независимых случайных величин к гауссовскому распределению. П. Л. Чебышев выдвинул понятие случайной величины на первый план исследований (в этом состоит одна из важнейших его заслуг), в его работах случайные величины являются главным объектом теории.

Классические теоремы, принадлежащие П. Л. Чебышеву и А. А. Маркову, хорошо известны. К ним непосредственно примыкает следующая простая по формулировке теорема Хинчина (1929 г.): среднее арифметическое суммы n независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным математическим ожиданием сходится по вероятности к своему математическому ожиданию. Несколько более общий результат принадлежит С. Н. Бернштейну: если несобственные интегралы, выражающие математические ожидания величин ξ_k , сходятся равномерно по k , то $\zeta_n - M\zeta_n \rightarrow 0$ по вероятности. Здесь ζ_n — среднее арифметическое значение величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Необходимые и достаточные условия применимости к суммам независимых случайных величин закона больших чисел можно сформулировать по-разному. Такие условия были найдены (1928 г.) А. Н. Колмогоровым. Б. В. Гнеденко несколько дополнил эти исследования. С. Н. Бернштейну принадлежат некоторые уточнения закона больших чисел, относящиеся к оценке вероятности неравенства $|\zeta_n - M\zeta_n| > tB_n$, где B_n^2 — дисперсия величины ζ_n ; они получены в предположении, что величины ξ_k обладают моментами сколь угодно высокого порядка, не слишком быстро растущими при возрастании n (см., например, монографию Бернштейна «Теория вероятностей», 1946 г.). К уточнению закона больших чисел относится также результат, характеризующий асимптотическое разложение по степеням n^{-1} величин $Mf(\zeta_n)$, где ζ_n — среднее арифметическое одинаково распределенных независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, $f(x)$ — гладкая функция, ξ_k обладают моментами достаточно высокого порядка (И. И. Гихман, 1952 г.). Так, если существуют $a_r = M\xi_k^r$, $r = 1, 2, 3$, и $f(x)$ имеет непрерывные производные 4-го порядка, то

$$Mf(\zeta_n) = f(a_1) + \frac{b_2 f^{(II)}(a_1)}{2} \cdot \frac{1}{n} + \\ + \left[\frac{b_3 f^{(III)}(a_1)}{3!} + \frac{b_2^2 f^{(IV)}(a_1)}{(2!)^3} \right] \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$b_r = M(\xi_k - a_1)^r, \quad r = 2, 3.$$

А. Я. Хинчин несколько видоизменил постановку вопроса, приводящую к закону больших чисел. Он называет последовательность σ_n сумм n неотрицательных случайных слагаемых $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ относительно устойчивой, если существуют такие $B_n > 0$, что $\frac{\sigma_n}{B_n} \rightarrow 1$ по вероятности. Относительная устойчивость изучена А. Я. Хинчиным, Б. В. Гнеденко, А. А. Бобровым.

Более принципиальным отходом от классической формулировки закона больших чисел является вопрос о возможности замены в соответ-

ствующих теоремах сходимости по вероятности сходимостью с вероятностью, равной единице. Именно эта постановка вопроса способствовала выяснению связи между теорией вероятностей и общей теорией функций, необходимости таких свойств вероятности, как ее полная аддитивность, и привела к проникновению методов функций в теорию вероятностей. Сама проблема была поставлена (1909 г.) Борелем для частного случая, соответствующего усилению теоремы Бернулли в симметрическом случае. Впервые достаточно общие результаты получил А. Н. Колмогоров.

Он доказал, что а) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} D\xi_n$ сходится, то $\zeta_n - M\zeta_n \rightarrow 0$ с вероятностью, равной единице (1930 г.), б) если ξ_n одинаково распределены и $a = M|\xi_n| < \infty$, то $\zeta_n \rightarrow 0$ с вероятностью, равной единице (1933 г.).

Установление необходимых и достаточных условий для усиленного закона больших чисел в случае разнораспределенных слагаемых оказалось более трудным делом, чем для классического закона больших чисел. Глубокие результаты в этом направлении получил (1945, 1950 гг.) Ю. В. Прохоров. Найденные им достаточные условия для усиленного закона больших чисел представляются весьма близкими к необходимым. Следует еще указать, что в исследованиях по усиленному закону больших чисел важную роль играет одно принципиально важное обобщение неравенства П. Л. Чебышева, принадлежащее А. Н. Колмогорову (1928 г.). Неравенство Колмогорова для независимых случайных величин ξ_k имеет вид

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |\sigma_k - M\sigma_k| > c \right\} \leq \frac{D\sigma_n}{c^2}.$$

Это неравенство, а также ряд его аналогов находят многочисленные применения.

Сходимость к невырожденным распределениям. Выше упоминалось об одной из основных проблем теории вероятностей XIX — начала XX в. — о проблеме сходимости закона распределения суммы независимых случайных слагаемых к гауссовскому закону. К истории этой проблемы можно добавить следующее. С. Н. Бернштейн в 1922 г. показал, что, воспользовавшись теоремой Ляпунова, сравнительно нетрудно усовершенствовать условия ее применимости. Как вытекало затем (1936 г.) из результатов Феллера, найденные С. Н. Бернштейном условия не только достаточны, но и необходимы для того, чтобы законы распределения сумм независимых и малых (равномерно пренебрегаемых) слагаемых сходились к закону Гаусса. По-видимому, на результаты С. Н. Бернштейна в свое время не обратили внимания, и Феллер вновь открыл их. В результате проведенных исследований выяснилась исключительная роль закона Гаусса. Однако возник следующий довольно естественный вопрос: какие функции распределения могут быть предельными для последовательности случайных величин вида

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n}, \quad (1)$$

где $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, A_n и B_n — надлежащим образом подобранные постоянные. Легко установить, что соответствующие предельные функции распределения $F(x)$ должны обладать следующим свойством: каковы бы ни были постоянные a_i, b_i ($i = 1, 2; b_i > 0$), найдутся такие a и b , что

$$F(b_1x + a_1) * F(b_2x + a_2) = F(bx + a), \quad (2)$$

где $*$ обозначает сверстку функций распределения. Распределения, обладающие свойством (2), называются устойчивыми. Полное описание класса устойчивых распределений дали П. Леви и А. Я. Хинчин (1936, 1937 гг.). Характеристическая функция распределения устойчивого распределения имеет вид

$$\log f(t) = i\gamma t - c|t|^\alpha \left\{ 1 + i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha) \right\}, \quad (3)$$

где α, β, γ, c — постоянные, $-1 \leq \beta \leq 1$, $0 < \alpha \leq 2$, $c \geq 0$,

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha, & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \ln|t|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 2$ получается гауссовское распределение. Устойчивые распределения, соответствующие значению $\beta = 0$, ранее рассматривались Юши и П. Леви. Параметр α называется показателем устойчивого распределения.

Более общая постановка вопроса о предельных распределениях для сумм бесконечно малых независимых слагаемых состоит в следующем. Совокупность случайных величин ξ_{nk} ($k = 1, 2, \dots, m_n$, $n = 1, 2, \dots$) называется последовательностью серий, а ее часть при фиксированном n — серией. Случайные величины в каждой серии предполагаются независимыми. Говорят, что случайные величины, входящие в последовательность серий, равномерно пренебрегаемы (бесконечно малы), если для любого $\varepsilon > 0$

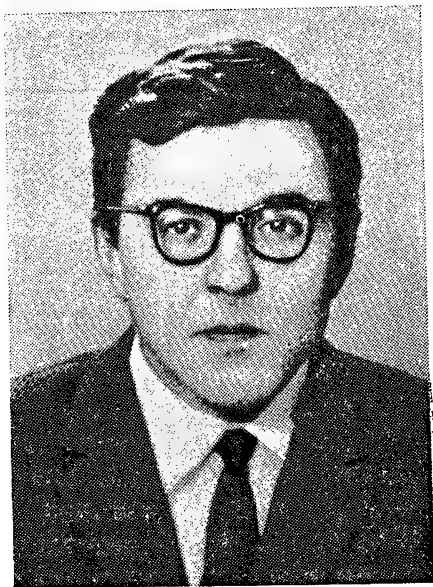
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq k \leq m_n} P\{|\xi_{nk}| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Требуется установить возможные предельные законы для сумм

$$\zeta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nm_n} - A_n, \quad (4)$$

где A_n — надлежащим образом подобранные постоянные, и условия сходимости к тому или иному возможному предельному закону распределения. Решение этих вопросов удалось получить с помощью понятия безгранично делимого закона распределения, возникшего в связи с постановкой и решением первых общих задач теории случайных процессов. Рассматривается совокупность случайных величин $\zeta(t)$, зависящих от непрерывного параметра t — времени. Предполагается, что приращения $\zeta(t+h) - \zeta(t)$ имеют распределение, не зависящее от t , и разности $\zeta(t_{k+1}) - \zeta(t_k)$ ($0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$) независимы. Такие про-

цессы называются однородными процессами с независимыми приращениями. Распределения величин $\zeta(t)$, очевидно, при любом n являются распределениями суммы n независимых одинаково распределенных слагаемых. Поэтому распределения величин $\zeta(t)$ оказываются безгранично делимыми. Впервые довольно широкий класс безгранично делимых распределений, охватывающий гауссовское и пуассоновское распределения, был указан Финнети. Принципиальный шаг вперед сделал А. Н. Колмогоров. Он сформулировал задачу об общем описании класса безгранично делимых распределений и решил ее, дав общий вид характеристической функции безгранично делимого распределения с конечной дисперсией (1932 г.). Более общую формулу, охватывающую безграничные делимые распределения, и с бесконечной дисперсией предложил (1934 г.) П. Леви, а ее варианты — А. Я. Хинчин. Возвращаясь к предельным теоремам для величин (4), следует прежде всего назвать основную теорему, установленную (1937 г.) А. Я. Хинчиным: предельными законами распределения для сумм (1) могут быть только безгранично делимые. При дополнительном предположении о том, что слагаемые имеют конечные дисперсии, эта теорема была доказана ранее (1936 г.) Г. М. Бавли.



И. А. Ибрагимов.

Другой фундаментальный результат в этой теории принадлежит (1939 г.) Б. В. Гнеденко. Им найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы распределения последовательности (4) сходились к заданному безгранично делимому закону. Особо изучены (1939 г.) условия сходимости распределения величин (1) к устойчивому распределению ($0 < \alpha < 2$). Случай же $\alpha = 2$, т. е. случай гауссовского распределения, был рассмотрен ранее (1935 г.) А. Я. Хинчиным.

В указанных теоремах речь идет о слабой сходимости распределений. Если предельное распределение непрерывно, то сходимость необходимо оказывается равномерной на $(-\infty, +\infty)$. Можно рассматривать сходимость функций распределения и в других метриках. Сравнительно недавно (1954 г.) Агню предложил рассматривать для функции распределения метрику L_p . Для сумм одинаково распределенных величин И. А. Ибрагимов показал (1965 г.), что если функция распределения $F_n(x)$ случайной величины (1) слабо сходится к устойчивому распределению $g(x)$ с показателем α , то $F_n(x)$ сходится к $g(x)$ в метрике $L_p(-\infty, +\infty)$ для всех $p > \frac{1}{\alpha}$.

Предельные теоремы для случайных величин допускают обобщения на суммы случайных векторов. Впервые это обнаружил и доказал

(1926 г.) теорему о сходимости распределения сумм независимых векторов к многомерному нормальному закону С. Н. Бернштейн. Спринципальной точки зрения теорема Бернштейна дает обоснование теории нормальной корреляции — важного инструмента математической статистики, имеющего многочисленные практические применения. К этому направлению относится также ряд других работ. Более совершенная формулировка и весьма простое доказательство, сводящее многомерный случай к одномерному, предложены (1944 г.) Б. В. Гнеденко. Вопросами сходимости к многомерным устойчивым распределениям занималась (1950 г.) Е. Л. Рвачева.

Уточнения предельных теорем. Если $F_n(x)$ — функция распределения суммы независимых случайных величин, сходящаяся при $n \rightarrow \infty$ к $F(x)$, то совершенно естественной является постановка вопроса об оценке их разности. Весьма тонкие исследования разности $F_n(x) - F(x)$ для предельной теоремы Лапласа принадлежат (1911, 1924, 1943 гг.) С. Н. Бернштейну. В общем случае суммирования одинаково распределенных случайных величин с конечными моментами достаточно высокого порядка еще П. Л. Чебышев предложил раскладывать разность $F_n(x) - F(x)$ в ряд по производным функции распределения Гаусса. Эта идея была развита шведскими математиками Крамером и Эссеном. Эссен получил ряд точных оценок и разложений. Например, если $M\xi_k = 0$, $B_n = \sigma\sqrt{n}$ (в формуле (1)), $\beta_3 = M\xi_k^3$, то

$$|F_n(x) - F(x)| \leq c \frac{\beta_3}{\sigma^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (5)$$

где c — абсолютная постоянная (Эссен, 1945 г.). Подобное неравенство, но более слабое, в котором член $\frac{1}{\sqrt{n}}$ заменен членом $\frac{\ln n}{n}$, было установлено ранее (1901 г.) А. М. Ляпуновым. И. А. Ибрагимов нашел (1965 г.) необходимые и достаточные условия для того, чтобы в рассматриваемой задаче $|F_n(x) - F(x)| = O(n^{-\frac{\delta}{2}})$ ($\delta < 1$). Л. Д. Мешалкин и Б. А. Рагозин, уточняя неравенство (5) и некоторые другие результаты Эссена, показали (1963 г.), что

$$|F_n(x) - F(x)| \leq c_1 \frac{\beta_3}{\sigma^3 \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+x^2},$$

где c_1 — абсолютная постоянная.

Некоторые новые идеи и положения, относящиеся к уточнению и обобщению предельных теорем, были высказаны (1953 г.) А. Н. Колмогоровым. Полученные в этих направлениях результаты еще не завершены. Речь идет о возможности аппроксимации распределения сумм независимых случайных величин, независимо от того, сходятся они к пределу или не сходятся, распределениями из данного класса. Так, если $F_n(x)$ — функция распределения n независимых одинаково распределенных величин, $\rho(F, G)$ — расстояние между F и G в равномерной метрике, то, как установил (1955 г.) Ю. В. Прохоров, $\rho(F_n, D) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где D — класс безгранично делимых распределений.

В 1956 г. А. Н. Колмогоров уточнил этот результат, показав, что $\rho(F_n, D) \leq cn^{-\frac{1}{5}}$, где c — абсолютная постоянная, а в 1963 г. получил оценку $\rho(F_n, D) \leq cn^{-\frac{1}{3}}$. Заметим, что для схемы Бернулли Ю. В. Прохоров еще в 1953 г. показал, что $\rho(F_n, D_0) \leq cn^{-\frac{1}{3}}$, где D_0 — класс распределений, содержащих гауссовское и пуассоновское распределения. В указанных работах А. Н. Колмогоров использует введенное П. Леви понятие концентрации распределения. Важные оценки для концентрации распределения при суммировании независимых слагаемых получены А. Н. Колмогоровым (1958 г.) и Б. А. Rogozinym (1961 г.). Л. Д. Мешалкин показал (1961 г.), что

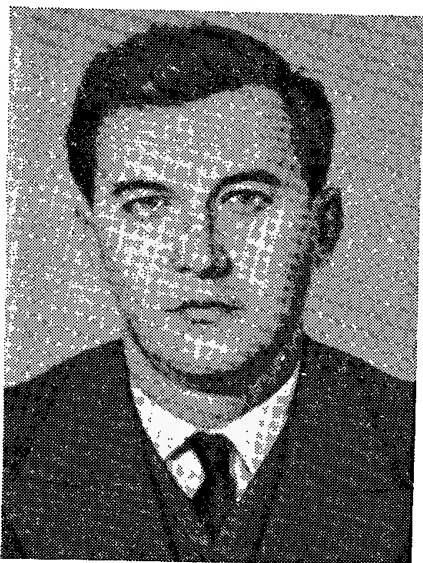
$$\inf_{d \in D} \sup_F |F_n(x) - d(x)| \geq cn^{-\frac{2}{3}} (\ln n)^{-4},$$

где F — общая функция распределения слагаемых ξ_n . А. Н. Колмогорову принадлежит (1963 г.) также аналог приведенного выше результата для случая разнораспределенных слагаемых.

Локальные предельные теоремы. Существует два типа локальных предельных теорем — для решетчатых распределений и для плотностей распределения. Если случайные величины $\xi_n (n = 1, 2, \dots)$ принимают значения из некоторой арифметической прогрессии, скажем, имеющей вид $a + sh (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, то значения сумм $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ также укладываются в прогрессию. Возникает вопрос о предельном поведении вероятности $P_n(k)$ того, что рассматриваемая сумма принимает значение вида $kh + na$. Если величины ξ_n независимы, одинаково распределены и предельное распределение суммы ξ_n устойчиво с плотностью $g(x)$, то можно ожидать, что эта вероятность эквивалентна величине $g(x_n) \Delta x_n$, где

$$x_n = \frac{kh + na - A_n}{B_n}, \quad \Delta x_n = \frac{h}{B_n}.$$

Утверждения подобного рода называются локальными предельными теоремами для решетчатых слагаемых. Классическая теорема Муавра — Лапласа является первым таким утверждением. Случай, когда величины ξ_n имеют плотность распределения и речь идет о сходимости плотности величин ξ_n к плотности предельного распределения, относится ко второму типу локальных предельных теорем. Отметим, что интерес к локальным предельным теоремам возник под влиянием работ А. Я. Хинчина по обоснованию статистической механики (классической и квантовой, см. монографии А. Я. Хинчина 1943 и 1951 гг.), в которых были найдены интересные применения локальных предельных теорем. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы были справедливы локальные предельные теоремы для решетчатых одинаково распределенных слагаемых, получил (1949, 1950 гг.) Б. В. Гнеденко, ему принадлежит результат (1954 г.) для плотностей распределения. Случай неодинаково распределенных решетчатых слагаемых изучали Ю. В. Прохоров (1952 г.),



В. В. Петров.

Ю. А. Розанов (1957 г.), В. В. Петров (1957 г.), а локальные теоремы для плотностей в случае неодинаково распределенных слагаемых — В. В. Петров (1956—1959 гг.). В последнем случае В. В. Петров получил (1962 г.) также уточнения предельных теорем для плотностей. Во всех перечисленных результатах речь идет о равномерной сходимости соответствующих выражений к пределу на всей оси действительного переменного. Изучая скорость сходимости в случае суммирования одинаково распределенных случайных слагаемых с конечным моментом 2-го порядка, И. А. Ибрагимов нашел (1965 г.) необходимые и достаточные условия для того, чтобы

$$\max_x |P_n(x) - f(x)| = O(n^{-\frac{\delta}{2}}), 0 < \delta < 1,$$

где $P_n(x)$ — плотность величины ζ_n , $f(x)$ — гауссовская плотность. Аналогичный результат получен им и для решетчатых слагаемых.

Многомерные локальные предельные теоремы получили (1948, 1949 гг.) Д. Г. Мейзлер, О. С. Парасюк, Е. Л. Рвачева, многомерные локальные предельные теоремы с уточнениями типа асимптотических разложений и их применение к некоторым задачам статистической механики — Хеккендорф.

К локальным теоремам для плотностей, естественно, относится также рассмотрение уклонения плотности $P_n(x)$ величины ζ_n от предельной плотности $f(x)$ в метриках, отличных от равномерной. Более общая постановка вопроса состоит в рассмотрении сходимости абсолютно непрерывной компоненты функции распределения $F_n(x)$ величины ζ_n к $f(x)$. Необходимые и достаточные условия для такой сходимости в метрике L_1 были найдены (1952 г.) Ю. В. Прохоровым еще до того, как была установлена соответствующая теорема для равномерной сходимости. Оценку нормы $\|P_n - f(x)\|$ в L_1 для сходимости к нормальному закону получили (1962 г.) С. Х. Сираждинов и М. Маматов.

Большие уклонения. Интересные уточнения предельных теорем представляют собой вероятности больших уклонений. Так называют асимптотические выражения для вероятностей суммы случайных величин с математическим ожиданием 0 и с большой дисперсией, которые могут принять значения по порядку величины большие, чем среднее квадратическое отклонение. В простейшем случае биномиального распределения эту задачу рассматривали А. Я. Хинчин (1929 г.), Н. В. Смирнов (1933 г.). Общую теорему получил (1938 г.) Крамер. Она послужила отправной точкой в дальнейших исследованиях. Специальный случай положительных слагаемых рассматривал (1950 г.) А. Я. Хинчин. Си-

стематическое и перспективное исследование задач о больших отклонениях было предпринято ленинградской школой Ю. В. Линника (Ю. В. Линник, В. В. Петров, В. Рихтер). Ю. В. Линнику принадлежит строгая постановка задач о построении асимптотического представления распределений на всей оси и в различных зонах изменения аргумента в зависимости от определяемых характеристик распределения слагаемых. Теоремы такого типа получили название собирательных. В. В. Петров уточнил (1954 г.) основную теорему Крамера и обобщил ее на случай разнораспределенных слагаемых. Приведем, например, уточненную В. В. Петровым формулировку теоремы Крамера для одинаково распределенных слагаемых. Если

$$M\xi_n = 0, \quad D\xi_n = 1, \quad M \exp(a|\xi_n|) < \infty, \quad x > 0 \text{ и } x = o(\sqrt{n}),$$

то

$$\frac{P(\xi_n > x)}{1 - G(x)} = \exp\left[\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right] \left(1 + O\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

где $\xi_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \xi_k$, $G(x)$ — гауссовская функция распределения, $\lambda(z)$ — степенной ряд с положительным радиусом сходимости. В. Рихтер доказал (1957, 1958 гг.) локальные аналоги теоремы Крамера для плотности распределения в решетчатом случае. Исследованию аналогов теоремы Крамера (а также ее локальных вариантов), когда на x накладываются более жесткие требования $\left(x = o(n^\alpha), \alpha < \frac{1}{2}, x = o\left(n^{\frac{1}{\sigma}}\right)\right)$, посвящены

работы (1960, 1961 гг.) Ю. В. Линника. Большие отклонения, локальные и интегральные, в случае нарушения основного условия Крамера рассматривал (1963, 1964 гг.) В. В. Петров (см. также С. В. Нагаев, 1962 г.).

Ю. В. Линнику принадлежат (1960 г.) интегральные теоремы, действующие на всей оси изменения x . Подробно теория больших отклонений изложена в книге И. А. Ибрагимова и Ю. В. Линника «Независимые и стационарно связанные величины» (1965 г.). Трудный вопрос о больших отклонениях для максимума сумм независимых одинаково распределенных случайных величин (ограниченных и решетчатых) рассмотрел (1958 г., в более общем случае — 1962 г.) А. А. Боровков.

Некоторые другие предельные теоремы. Прежде всего остановимся на предельных теоремах, связанных с величиной первого перескока

заданного барьера. Пусть $\xi_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, ξ_k одинаково распределены и независимы; если n_x — первый номер суммы ξ_n , для которой $\xi_n \geq x$, то $\chi = S_{n_x} - x$. Е. Б. Дынкин нашел (1965 г.) предельное распределение для величины $\frac{\chi}{x}$ при $k \rightarrow \infty$ в случае, когда $M\xi_n = \infty$ и $\xi_k \geq 0$.

Случай, когда ξ_k принимает значения разных знаков, рассматривал (1957 г.) Я. Г. Синай. Он предположил, что функция распределения ξ_k устойчива с показателем $\alpha < 2$.

А. А. Боровков изучил (1960, 1962 гг.) распределение χ ($x \rightarrow \infty$), предположив существование $M\xi_k$ (если $M\xi_k \neq 0$) и существование дисперсии при $M\xi_k = 0$. При $\mu \geq 0$ предельное распределение χ оказывается собственным. При $\mu < 0$ предельное условное распределение (при условии $\sup \zeta_n \geq x$) также может оказаться собственным. А. А. Боровков использовал методы факторизации функций и методы решения интегральных уравнений на полупрямой.

Предельное распределение для χ при $M\xi_k \geq 0$ рассматривал (1960 г.) также И. Н. Коваленко.

Ряд работ посвящен изучению предельных теорем для сумм $\eta_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)$, ζ_k имеет предыдущее значение. Частный случай этой задачи,

когда $\xi_k = \pm 1$ с вероятностями, равными $\frac{1}{2}$, а функция $f(x)$ такова, что $\sum |f(x)| < \infty$, рассматривал (1955 г.) Р. Л. Добрушин, а случай такого же блуждания при $f(x) \sim cx^2$ — Е. Б. Дынкин. Общая задача изучалась А. В. Скороходом и Н. П. Слободенюком (1965, 1966 гг.).

Предельные теоремы для случайных размещений частиц по ячейкам доказаны Б. А. Севастьяновым и В. П. Чистяковым (1964 г.), Б. А. Севастьяновым (1966 г.), Г. И. Ивченко и Ю. И. Медведевым (1966 г.).

Естественным обобщением суммы скалярных или векторных случайных величин являются суммы случайных элементов со значениями в коммутативных группах или произведения случайных элементов некоммутативных групп. Предельные закономерности на конечной группе рассматривались Н. Н. Воробьевым (1954 г.), компактные группы — Я. И. Ривкиндом (1955 г.) и более подробно — Б. М. Клоссом (1959 г.). Вообще говоря, справедливо следующее утверждение: распределение произведения большого числа независимых и одинаково распределенных сомножителей сходится к распределению Хаара на некоторой подгруппе. Б. М. Клоссу принадлежит построение представления характеристической функции безгранично делимого распределения на некоторых классах компактных и локально компактных групп. Предельное поведение произведения случайных матриц изучал В. Н. Тутубалин. Обзор исследований в этой области, а также новые результаты содержатся в работе В. В. Сазонова и В. Н. Тутубалина «Распределение вероятностей на топологических группах» (1966 г.). (О предельных теоремах для сумм независимых слагаемых с границами и о предельных теоремах, связанных с переходом от дискретных схем к схемам с непрерывным временем, см. § 3.)

Зависимые случайные величины. По-видимому, впервые идея изучения зависимых случайных величин была высказана А. А. Марковым. Ему же принадлежит мысль о том, что ряд результатов, относящихся к асимптотическому поведению сумм независимых случайных величин, можно перенести на зависимые случайные величины, если зависимость между отдельными слагаемыми достаточно быстро убывает при возрастании разности между индексами слагаемых. Эту идею сравнительно нетрудно реализовать при рассмотрении теорем типа закона больших

чисел. Результаты подобного рода, в которых меру зависимости между слагаемыми можно охарактеризовать коэффициентом корреляции, получили (1928 г.) С. Н. Бернштейн и А. Я. Хинчин. Некоторые работы А. Я. Хинчина посвящены выяснению условий применимости усиленного закона больших чисел. Этот же вопрос для стационарных последовательностей рассматривала (1964, 1966 гг.) И. Н. Вербицкая.

Классическая предельная теорема о сходимости к закону Гаусса в некоторых частных случаях была обобщена А. А. Марковым на зависимые случайные величины. Более общие теоремы получил (1926 г.) С. Н. Бернштейн. При этом он воспользовался приемом, состоящим в разбиении рассматриваемой последовательности на части и в таком исключении некоторых частей, при котором оставшиеся куски последовательности почти не зависят друг от друга, а сумма исключенных слагаемых по сравнению с суммой оставшихся стремится к нулю (такой прием применяют постоянно и в настоящее время). Эти результаты в дальнейшем обобщались (1947 г.) О. В. Сармановым. Важный вопрос, возникающий в связи с требованием ослабить зависимость между слагаемыми, заключается в способе характеристики степени зависимости между случайными величинами. Моменты 2-го порядка здесь во всяком случае недостаточны. Более точные и далеко идущие результаты для сумм случайных величин были получены при более определенном характере зависимости между ними (марковские цепи и стационарные последовательности).

Цепи Маркова. Представим себе некоторый объект, который может находиться в конечном или счетном числе состояний E_i . Состояния объекта фиксируются в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \dots$. Если вероятность обнаружить объект в момент времени $s + 1$ в состоянии E_j при условии, что в момент времени s он находился в состоянии E_i , не зависит от предшествующей моменту s эволюции объекта, то соответствующая теоретико-вероятностная схема называется цепью Маркова, а вероятности, о которых шла речь, вероятностями перехода. Обозначим их $P_{ij}(s)$. Если вероятности перехода не зависят от s , $P_{ij}(s) = P_{ij}$, то цепь называется однородной. Такие объекты были введены (1907 г.) А. А. Марковым.

Рассмотрим теперь вероятности перехода $P_{ij}(s, t)$ из состояния E_i в момент времени s в состояние E_j в момент времени t . В однородном случае эти вероятности зависят от $t - s$, обозначим их $P_{ij}^{(t-s)}$. Первая задача, рассмотренная в теории цепей Маркова, связана с асимптотическим поведением вероятностей $P_{ij}^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$. Замечательный результат, полученный А. А. Марковым, состоит в том, что если все P_{ij} положительны (число состояний конечно), то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = P_j$, не зависящий от i . Эта теорема называется эргодической. Эргодические свойства цепей Маркова изучались во многих работах и разными методами. В. И. Романовский развивал аналитические и алгебраические методы. Основные результаты, полученные им и его школой, изложены в монографии «Дискретные цепи Маркова» (1949 г.). Теория цепей Маркова с конечным числом состояний с применением



О. В. Сарманов.

непосредственных теоретико-вероятностных рассуждений изложена в курсе С. Н. Бернштейна «Теория вероятностей» (изд. 4-е, 1946 г.). Эргодические теоремы для неоднородных цепей доказывал (1953 г.) Т. А. Сарымсаков.

Важную роль в развитии теории цепей Маркова сыграла работа А. Н. Колмогорова 1936 г. В ней дан полный качественный анализ асимптотического поведения однородной марковской цепи со счетным числом состояний и открыты основные важные эффекты, связанные с бесконечностью числа состояний, которые могут появиться в очень общей ситуации. Эргодические теоремы для марковских цепей с произвольным множеством состояний изучали (1937, 1939 гг.) Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов. Методы Крылова и Боголюбова основаны на

теории положительных линейных операторов, порождаемых переходными вероятностями, в них используются определенные ограничения, накладываемые на переходные вероятности. М. В. Бебутов, пользуясь методами Крылова и Боголюбова, рассматривал (1942 г.) марковскую цепь с компактным множеством значений при значительно более общих предположениях относительно переходных вероятностей и получил весьма полную картину асимптотического поведения таких цепей.

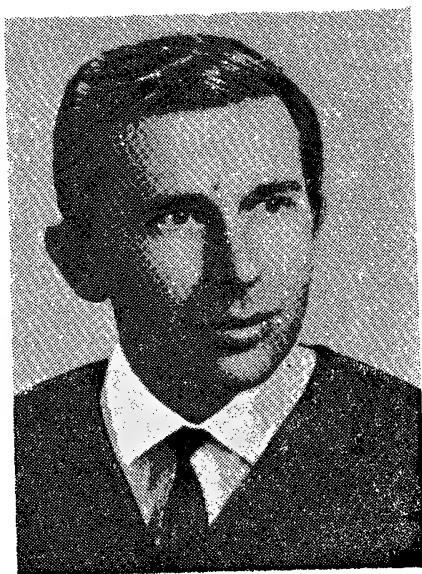
Задав произвольную функцию на множестве состояний цепи Маркова, можно получить последовательность зависимых случайных величин ξ_n , равных значению функции в том состоянии, в котором находится рассматриваемый объект в момент времени n . Теперь возникает вопрос о предельных распределениях для сумм величин ξ_n . В частности, примером такой векторной суммы является вектор, i -я компонента которого равна числу попаданий в i -е состояние цепи в течение n единиц времени.

Предельная теорема о сходимости к распределению Гаусса в случае однородной цепи Маркова была получена (1924 г.) А. А. Марковым. Этот результат развивали В. И. Романовский, Т. А. Сарымсаков (см. монографию В. И. Романовского). Исчерпывающее исследование локальной предельной теоремы (конечная однородная цепь) выполнено (1950, 1955 гг.) А. Н. Колмогоровым. С. Х. Сираждинов для доказательства предельных теорем применил метод характеристических функций и получил (в однородном случае) уточненные локальные предельные теоремы с

асимптотическими разложениями по степеням $n^{-\frac{1}{2}}$. Изучен случай однородной цепи с бесконечным числом состояний (А. К. Алешкивич, 1961 г.; В. А. Волконский, 1957 г.). Важные результаты

получены (1957, 1961 гг.) также С. В. Нагаевым.

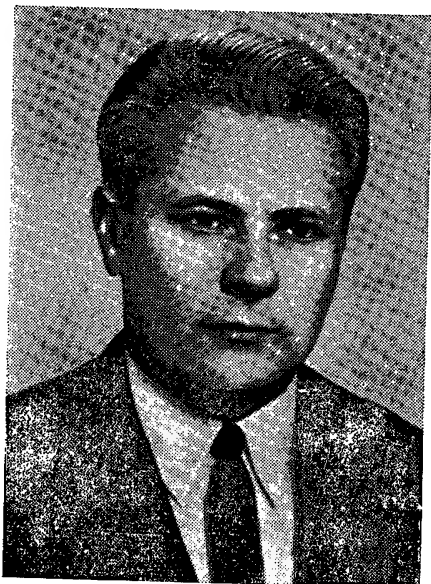
Предельные теоремы для неоднородной цепи Маркова в частных случаях рассматривал еще А. А. Марков. В дальнейшем (1926, 1928, 1936 гг.) они послужили предметом весьма тонких исследований С. Н. Бернштейна. Задача оказалась трудной, ее решению посвящено много работ (Ю. В. Линник, 1940 г.; Н. А. Сапогов, 1947 г.; Ю. В. Линник и Н. А. Сапогов, 1949 г., и др.). Наиболее широкие результаты получены (1956 г.) Р. Л. Добрушиным. Ю. В. Линник и Н. А. Сапогов установили (1949 г.) также локальные предельные теоремы в неоднородном случае, а В. А. Статулявичус для этого же случая вывел (1956 г.) локальные предельные теоремы с уточняющими членами.



С. В. Нагаев.

Изучался также вопрос о предельных теоремах для конечных цепей Маркова в схеме однородных последовательностей серий. Для случая цепи с двумя состояниями Р. Л. Добрушин нашел (1953 г.) все возможные предельные распределения и условия сходимости к ним. А. А. Ильяшенко рассмотрел (1958 г.) примеры конкретных ситуаций, приводящих к различным предельным распределениям в цепи с произвольным числом состояний. Л. Д. Мешалкин описал (1958 г.) всевозможные предельные распределения в последнем случае.

Стационарные последовательности. Предельные теоремы о сходимости распределения нормированной суммы случайных величин к гауссовскому закону можно доказывать для случая, когда слагаемые образуют стационарную последовательность. Здесь оказалось удачным условие сильного перемешивания, введенное (1956 г.) Розенблаттом. Последовательности, удовлетворяющие условию сильного перемешивания, изучались (1960 г.) А. Н. Колмогоровым и Ю. А. Розановым. Характеристики спектральной плотности стационарной последовательности с сильным перемешиванием рассматривал (1961, 1962 гг.) И. А. Ибрагимов. Центральная предельная теорема для последовательностей с сильным перемешиванием доказывалась Ю. А. Розановым (1959 г.) и И. А. Ибрагимовым (1959, 1962 гг.). В. П. Леонов и А. В. Ширяев применяли (1959, 1966 гг.) в доказательствах предельных теорем для стационарных последовательностей метод моментов. Предельные теоремы с уточнениями (асимптотические разложения, большие отклонения) для последовательностей с сильным перемешиванием доказывал (1962 г.) В. А. Статулявичус. Предельные теоремы для стационарных последовательностей изложены в монографиях Ю. А. Розанова («Стационарные случайные процессы», 1963 г.) и И. А. Ибрагимова и



В. А. Статулявичус.

Ю. В. Линника («Независимые и стационарно связанные величины», 1965 г.).

Закон повторного логарифма. Пусть ζ_n — последовательность случайных величин. Если событие $\zeta_n \geq f(n)$ с вероятностью, равной единице, осуществляется не более чем конечное число раз ($n = 1, 2, \dots$), то $f(n)$ называется верхней функцией для последовательности ζ_n ; если же это неравенство с вероятностью, равной единице, осуществляется бесконечно много раз, то $f(n)$ называется нижней функцией. Как можно задавать верхние и нижние функции для последовательности сумм независимых слагаемых? А. Я. Хинчин впервые рассматривал (1924 г.) эту задачу для схемы Бернулли, т. е. когда $\zeta_n = v_n$ есть число успехов в последовательности n независимых испытаний. При значительно более

общей ситуации, относящейся к последовательностям сумм $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ независимых слагаемых, А. Н. Колмогоров обнаружил, что функция $f(n) = (1 + \varepsilon) \sqrt{2B_n \ln \ln B_n}$, где $\varepsilon > 0$ и B_n — дисперсия ζ_n , является верхней, а функция $g(n) = (1 - \varepsilon) \sqrt{2B_n \ln \ln B_n}$ — нижней. Подобного рода теоремы получили название закона повторного логарифма. В дальнейшем закон повторного логарифма подробно изучался советскими учеными для случайных процессов (см. § 3). Теоремы типа закона повторного логарифма для цепей Маркова доказывались (1945 г.) Т. А. Сарымсаковым.

Функции распределения. С. Н. Бернштейн доказал (1941 г.) такую теорему: пусть ξ и η — независимые случайные величины с равными дисперсиями. Если $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$ также независимы, то ξ и η имеют гауссовское распределение. Этот результат развивали Б. В. Гнеденко и В. П. Скитович. Утверждение В. П. Скитовича заключается в сле-

дующем: если $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы, $L_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \xi_k$, $i = 1, 2$ и L_1, L_2

независимы, то для тех k , для которых $\alpha_{1k} \cdot \alpha_{2k} \neq 0$, величины имеют гауссовское распределение. Ю. В. Линнику и А. А. Зингеру принадлежат дальнейшие результаты по теории независимых статистик. Наибольшее развитие эти вопросы получили в работе А. А. Зингера «Независимость квазиполиномиальных статистик и аналитические свойства распределений» (1958 г.).

Большой цикл работ посвящен задаче о функциях распределения независимых случайных величин, если задана функция распределения $F(x)$ их суммы (функции распределения величин ξ_k называют компонентами $F(x)$). Первоначальные результаты принадлежат Крамеру, который показал, что гауссовский закон имеет только гауссовские компо-

ненты. Теорема Крамера была обобщена (1956 г.) Ю. В. Линником. А. Я. Хинчин изучал (1937 г.) вопросы разложимости в связи с безгранично делимыми распределениями. Он назвал свои исследования арифметикой законов распределения. Д. А. Райков доказал (1937 г.), что закон Пуассона имеет только пуассоновские компоненты. Ю. В. Линнику принадлежит теорема о том, что композиции законов Гаусса и Пуассона имеют только подобные компоненты (1957 г.). Результаты глубоких исследований Ю. В. Линника о возможности разложения и описания компонент безгранично делимых законов распределения изложены в его монографии «Разложения вероятностных законов» (1960 г.). Н. А. Сапогов доказал (1951 г.) «устойчивость» теоремы Крамера: если функция



Н. А. Сапогов.

$F(x)$ близка к гауссовскому закону, то ее компоненты также близки к гауссовскому закону. Ему принадлежит также оценка этой близости. Аналогичный результат для теоремы Д. А. Райкова получил (1959 г.) О. В. Шалаевский. Одновременно были найдены многие свойства характеристических функций вообще и свойства безгранично делимых распределений в частности. Особо изучались асимптотические свойства плотностей устойчивых распределений (Е. С. Ляпин, Ю. В. Линник, А. В. Скороход, В. М. Золотарев). И. А. Ибрагимов и К. Е. Чернин доказали (1959 г.) одновершинность устойчивых распределений.

Теория случайных процессов

Понятие случайного процесса сложилось в основном в 20-х годах XX в., однако временем зарождения новой теории можно считать 1931 год — год выхода в свет работы А. Н. Колмогорова «Об аналитических методах теории вероятностей». До появления этой работы были известны лишь отдельные примеры случайных процессов и не возникала необходимость создания какой-либо общей теории. А. Н. Колмогоров впервые ввел весьма широкий класс случайных процессов (марковских), а также изучил способы их задания и разработал аналитический аппарат для решения относящихся к ним основных задач. В дальнейшем вводились все новые классы случайных процессов: процессы с независимыми приращениями, стационарные процессы и процессы со стационарными приращениями. Советские математики активно участвовали в создании теории случайных процессов, им принадлежат основополагающие труды, способствовавшие развитию ее основных направлений как в нашей стране, так и за рубежом.

Историю развития теории случайных процессов в СССР можно разделить на два периода: до 40-х годов и с 40-х годов по настоящее время. Первый, начальный период — это период, когда количество ученых, работавших в этой области, и количество их работ было весьма незначительным. К этому периоду относятся исследования А. Н. Колмогорова, Е. Е. Слуцкого, А. Я. Хинчина, И. Г. Петровского, С. Н. Бернштейна, Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Однако в работах этого периода высказаны основные идеи, определившие дальнейшее развитие теории. С ростом числа ученых начали создаваться целые школы, детально разрабатывающие отдельные направления теории случайных процессов. В этот, второй период количество исследований и результатов настолько возросло, что в таком кратком очерке полностью охватить их невозможно. Поэтому изложим лишь основные идеи и направления развития теории по периодам.

1

Первый период развития теории случайных процессов

Марковские процессы. Как упоминалось выше, в работе А. Н. Колмогорова был введен класс случайных процессов, обладающих таким свойством: все вероятностные характеристики течения процесса в будущем полностью определяются состоянием процесса в настоящий момент (точнее, условные распределения значений процесса в будущем при фиксированном до настоящего момента прошлом зависят только от состояния в настоящий момент). Такие процессы, являющиеся теоретико-вероятностным обобщением понятия динамической системы, А. Н. Колмогоров назвал стохастически определенными. Впоследствии их стали называть марковскими. Марковские процессы характеризуются вероятностью перехода $P(t, x, s, A)$ — вероятностью того, что в момент s процесс будет находиться в одном из состояний множества A , если в момент t его состояние было x . А. Н. Колмогоров классифицирует марковские процессы в зависимости от множества состояний (конечное множество состояний, счетное множество состояний, множество состояний, представляющее собой прямую линию). Многомерный непрерывный случай рассмотрен им в одной из последующих работ (1933 г., на нем. яз.).

В каждом из указанных случаев для вероятностей перехода А. Н. Колмогоров вывел дифференциальные уравнения: в конечном и счетном случаях — это системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в непрерывном случае — уравнения в частных производных параболического типа (второе уравнение Колмогорова было получено ранее в теории диффузии Фоккером и Планком). Он рассмотрел также случай, когда движение на прямой разрывное. Для вероятностей перехода в этом случае получается интегро-дифференциальное уравнение. Коэффициенты всех уравнений выражаются через вероятностные характеристики поведения процесса за бесконечно малый промежуток

времени — инфинитиземальные характеристики процесса. Эти характеристики имеют очень простой вид и могут однозначно и конструктивно определять процесс. Таким образом была решена задача о способах задания для широкого класса случайных процессов. Значение рассмотренной работы А. Н. Колмогорова состоит не только в том, что в ней определен и изучен (до некоторой степени) первый широкий класс случайных процессов, но и в том, что она утвердила метод исследования случайных процессов, основанный на изучении их инфинитиземальных характеристик и применении дифференциальных уравнений для определения вероятностей, связанных с процессом.

Сходимость дискретных схем к непрерывным. Ряд работ (1931—1934 гг.) А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского, А. Я. Хинчина посвящен изучению асимптотического поведения систем, у которых состояние изменяется лишь через некоторые конечные промежутки времени, если эти промежутки становятся неограниченно малы, точно так же, как и величины изменений состояния на каждом из таких промежутков. А. Н. Колмогоров рассматривал, таким образом, последовательность суммы независимых случайных величин между двумя криволинейными границами, И. Г. Петровский — случайное блуждание на плоскости до выхода из некоторой области. Ими найдены дифференциальные уравнения для предельных значений вероятностей некоторых событий в указанных схемах. Все эти результаты систематизированы и обобщены в работе А. Я. Хинчина «Асимптотические законы теории вероятностей» (1933 г., на нем. яз.). В третьей и четвертой главах, посвященных проблемам диффузии, доказаны предельные теоремы для случайных блужданий, у которых распределение шага зависит от состояния, найдены условия, при которых распределение положения частицы стремится к распределению значения непрерывного марковского процесса, и получено для предельного распределения уравнение А. Н. Колмогорова. Рассматривается такое же блуждание в ограниченной области и найдено предельное значение вероятности того, что за некоторое вполне определенное время процесс не покинет этой области. Для вычисления предельного значения вероятности в этом случае нужно решать то же уравнение А. Н. Колмогорова с нулевыми граничными условиями на границе области. Рассматривается также задача о предельном поведении вероятности того, что случайное блуждание попадет в одну из двух фиксированных областей ранее, чем во вторую. Для предельного значения вероятности в этом случае получается эллиптическое уравнение, к которому приводится уравнение А. Н. Колмогорова после отбрасывания производной по времени. Марковские процессы, полученные А. Я. Хинчиным как предельные при решении проблем диффузии, стали впоследствии называться диффузионными. Идеи аппроксимации дискретных схем непрерывными привели в дальнейшем к созданию общей теории предельных теорем для случайных процессов.

Процессы с независимыми приращениями. Первый общий результат в исследовании класса процессов с независимыми приращениями также принадлежит (1932 г.) А. Н. Колмогорову. Им описаны все однородные процессы с независимыми приращениями, имеющие конечную

дисперсию, с помощью характеристических функций. Процессам с независимыми приращениями посвящены первая, вторая и пятая главы названной выше работы А. Я. Хинчина. Здесь доказана, в частности, теорема о том, что всякий непрерывный процесс с независимыми приращениями является гауссовским процессом, сыгравшим важную роль в дальнейшем развитии теории процессов с независимыми приращениями, закон повторного логарифма для непрерывного однородного процесса, по которому можно получить точную оценку для локального роста и роста процесса на бесконечном промежутке. Исследования в этом направлении по более широкому классу процессов проводились позднее.

Стационарные случайные процессы. Важным событием в истории развития теории случайных процессов следует считать появление работы А. Я. Хинчина «Теория корреляции стационарных стохастических процессов» (1934 г., на нем. яз.). В ней дано строгое определение случайного процесса, введено понятие конечномерных распределений процесса (в названной выше книге Хинчина подход к понятию случайного процесса основан больше на интуиции). Отмечая важность введенного А. Н. Колмогоровым класса процессов (именно здесь они названы марковскими), А. Я. Хинчин указывает на недостаточность этого класса для описания многих реальных процессов, особенно процессов, описываемых в статистической механике. Для описания последних естественно рассматривать стационарные процессы, т. е. такие процессы, для которых совместные распределения величин $x_{t_1+h}, x_{t_2+h}, \dots, x_{t_n+h}$ не зависят от h . Он вводит и более широкое понятие стационарности, названное впоследствии стационарностью в широком смысле, когда свойством стационарности обладают только два первых момента процесса (в действительности впервые это понятие появилось в работе Е. Е. Слуцкого, опубликованной в 1928 г.). Для последнего класса процессов Хинчин вводит корреляционную функцию и находит ее спектральное представление. Спектральное представление используется при доказательстве существования предела

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_t dt$$

для стационарного процесса и некоторой ослабленной эргодической теоремы для гамильтоновых систем. Чтобы оценить значение рассматриваемой работы А. Я. Хинчина в истории развития теории случайных процессов, достаточно сказать, что исследования по теории стационарных процессов, спектральной теории и их приложения к различным физическим, механическим и другим задачам составляют самую значительную часть теории случайных процессов и ее приложений.

Более подробный анализ стационарного случайного процесса дан в работе Е. Е. Слуцкого «О почти периодических случайных функциях и о разложении стационарной случайной функции на компоненты» (1938 г.). В этой работе изучаются условия, при которых среднее по времени случайного процесса совпадает с математическим ожиданием. Рассматриваются процессы с дискретным спектром. Доказывается, что такие процессы представимы в виде суммы ряда гармоник с частотами,

принадлежащими спектру, и некоррелированными амплитудами. Используя такое представление, Е. Е. Слуцкий доказывает, что случайная функция при этом с вероятностью, равной единице, является почти периодической. Он строит разложение процесса на три некоррелированные составляющие: среднее по времени, почти периодическую компоненту и компоненту с непрерывным спектром. Очень важным результатом, полученным в этой работе, является построение спектрального разложения для процесса в случае дискретного спектра.

Дальнейшее развитие теория стационарных процессов получила в цикле работ А. Н. Колмогорова, выполненном в 1939—1941 гг. В этих работах поставлены и для некоторых случаев стационарных процессов дискретного параметра решены вопросы экстраполяции и интерполяции случайных процессов. Выяснена связь между теорией случайных процессов и теорией гильбертовых пространств, сформулированы на языке функционального анализа многие задачи теории случайных процессов и получено с помощью известных результатов функционального анализа решение этих задач. В частности, найдены условия, при которых для стационарного процесса дискретного аргумента можно по всему известному прошлому абсолютно точно прогнозировать его будущее значение. А. Н. Колмогоров ввел процессы со стационарными приращениями и обобщил понятие стационарного процесса; для этих процессов получено спектральное представление структурной функции (обобщающей понятие корреляционной функции для стационарного процесса).

Эргодические теоремы. Эргодические теоремы теории вероятностей включают два совершенно различных класса теорем: теоремы о существовании предельного распределения для процессов Маркова (такую теорему при некоторых ограничениях доказал А. Н. Колмогоров в статье «Об аналитических методах в теории вероятностей») и теоремы о существовании временных средних

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(x_t) dt,$$

где x_t — некоторый случайный процесс (для процессов дискретного аргумента интеграл заменяется суммой). Теоремы второго рода ближе к эргодическим теоремам, рассматривающимся в физике и механике. Выше упоминалось, что ослабленную эргодическую теорему доказал А. Я. Хинчин для стационарного процесса (ослабленность ее состоит в том, что доказывается существование предела по вероятности, а не с вероятностью, равной единице). А. Н. Колмогоров в статье «Упрощенное доказательство теоремы Биркгофа — Хинчина» (1938 г.) доказал теорему, обобщающую как теорему А. Я. Хинчина для случайных процессов, так и эргодическую теорему Биркгофа для динамических систем с интегральным инвариантом. При этом он впервые установил, что эргодическая теорема для случайных процессов является самой общей формой эргодической теоремы.

Ряд работ посвящен эргодическим теоремам для процессов Маркова. В статье А. Н. Колмогорова «Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний» (1933 г., на нем. яз.) для процессов Маркова дана классификация состояний, введены понятия существенного класса состояний, положительного, нулевого, периодического и непериодического классов. Используя эти понятия и усиленный закон больших чисел для независимых случайных величин, А. Н. Колмогоров доказывает эргодическую теорему для положительного непериодического класса существенных состояний. В этом случае он находит выражение для предельного распределения с помощью математических ожиданий времени первого прохождения через данное состояние. Описывает асимптотическое поведение вероятностей перехода для нулевого и периодического классов. Разработанная им методика исследования процессов Маркова, основанная на изучении независимых случайных величин, являющихся значениями времен возвращения процесса в одно и то же состояние, с некоторыми модификациями использовалась в дальнейшем многими математиками при решении различных вопросов, касающихся как марковских, так и других процессов.

Эргодические свойства процессов Маркова исследовались в цикле работ (1937—1939 гг.) Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, посвященных изучению динамических систем, которые находятся под влиянием случайных возмущений. В этих работах рассматриваются марковские процессы с непрерывным множеством состояний. При выполнении некоторых условий непрерывности и положительности плотностей вероятностей перехода марковского процесса доказывается существование конечного числа замкнутых инвариантных множеств, в которые процесс с вероятностью, равной единице, попадает и там остается, причем на каждом из этих множеств существует эргодическое распределение, к которому сходится распределение значения марковского процесса при условии, что процесс попадает в данное множество.

Стохастические дифференциальные уравнения. Это название дал С. Н. Бернштейн некоторой конечно-разностной схеме получения последовательности Маркова, в пределе переходящей в непрерывный марковский процесс. В 1934 г. вышла работа С. Н. Бернштейна (впоследствии он еще несколько раз возвращался к этой теме), посвященная выводу уравнения Фоккера — Планка для предельного процесса и нахождению условий, при которых распределение решений разностного уравнения сходится к решению Фоккера — Планка. Как видим, идейно это направление близко к рассмотренному выше. Однако здесь рассматривается гораздо более общая схема, чем случайные блуждания, и впервые появляются некоторые дифференциальные уравнения для случайных процессов. Поэтому С. Н. Бернштейна можно считать одним из основоположников теории стохастических дифференциальных уравнений — очень важной области современной теории случайных процессов.

В развитии теории случайных процессов важную роль сыграла также статья Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова «Об уравнениях Фоккера — Планка, получаемых в теории возмущений с помощью метода,

основанного на спектральных свойствах гамильтониана возмущений» (1939 г.). В этой работе рассматривается динамическая система, которая находится под воздействием случайной силы и в пределе превращается в процесс с независимыми значениями (белый гауссовский шум, по современной терминологии). Показывается, что при этом предельное поведение динамической системы описывается непрерывным марковским процессом, и для плотности вероятности перехода выводится уравнение Фоккера — Планка (второе уравнение А. Н. Колмогорова). В этой работе впервые рассмотрены дифференциальные уравнения с белыми шумами, составляющие основное содержание современной теории стохастических дифференциальных уравнений. Хотя обоснование предельного перехода носит интуитивный характер, на пути строгого доказательства полученных здесь результатов с привлечением идей, содержащихся в рассмотренной работе С. Н. Бернштейна, и были заложены основы теории стохастических дифференциальных уравнений.

Основания теории случайных процессов. Рассмотрим работы, посвященные изучению общих методов теории случайных процессов. В работе Е. Е. Слуцкого «О случайных функциях — непрерывных, интегрируемых и дифференцируемых в стохастическом смысле» (1928 г.) дано определение случайной функции (хотя и не совсем удовлетворительное с современной точки зрения), введено понятие стохастической непрерывности, определен интеграл от случайной функции и указаны достаточные условия его существования, определена производная случайной функции, приведены примеры, когда производная существует и когда она отсутствует.

Важную роль в построении теории случайных процессов сыграла работа А. Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей» (1933 г., на нем. яз.). В ней доказано существование случайной функции с заданным набором конечномерных распределений, создана общая теория условных вероятностей и математических ожиданий, позволившая в дальнейшем дать строгое определение марковских и некоторых других классов случайных процессов. После выхода этой работы А. Н. Колмогорова возник взгляд на случайный процесс как на функцию двух переменных — времени и элементарного события из вероятностного пространства, что было особенно важным для развития теории случайных процессов.

В 1935 г. была опубликована небольшая заметка А. Н. Колмогорова, в которой он предложил аппарат преобразования Фурье — Лапласа для задания меры в функциональном пространстве. Впоследствии эта идея была развита в методе задания случайного процесса с помощью характеристического функционала.

Дальнейшее развитие общих понятий теории случайных процессов связано с именем Е. Е. Слуцкого. В его работе «Несколько предложений к теории случайных функций» (1937 г.) вводится важное понятие стохастической эквивалентности случайных функций. Доказываются теоремы о существовании для данного процесса стохастически эквивалентного процесса, обладающего различными условиями регулярности (принадлежность к классу Бэра не выше 2-го порядка, непрерывность,

дифференцируемость). Е. Е. Слуцкий отмечает, что теорема о непрерывности принадлежит А. Н. Колмогорову и сообщена им в 1934 г. Эта работа Е. Е. Слуцкого послужила толчком к изучению свойств регулярности различных классов случайных процессов.

2

Второй период развития теории случайных процессов

Теория стационарных процессов. В этом направлении продолжались исследования, развивающие, дополняющие и обобщающие рассмотренные выше результаты А. Н. Колмогорова, Е. Е. Слуцкого, А. Я. Хинчина. Непосредственно примыкает к исследованиям А. Н. Колмогорова и обобщает (1941 г.) некоторые из его результатов на многомерные процессы работа В. Н. Засухина (1941 г.). Результаты А. Н. Колмогорова по экстраполяции стационарных случайных процессов дискретного аргумента обобщены в работах (1944, 1945, 1954 гг.) М. Г. Крейна. Важную роль в систематизации и популяризации результатов, полученных в теории стационарных случайных процессов, сыграла обзорная статья А. М. Яглома «Введение в теорию стационарных случайных функций» (1952 г.). А. М. Яглому принадлежат важные результаты по интерполяции и экстраполяции процессов. Особо следует отметить разработанный им эффективный метод решения экстраполяционных задач для процессов с дробно-рациональной спектральной плотностью (в том числе многомерных). Обобщая понятие стационарного процесса с независимыми приращениями, А. М. Яглом и М. С. Пинскер ввели (1953—1955 гг.) процессы со стационарными приращениями n -го порядка. Ими построена теория этих процессов, аналогичная теории для стационарных процессов, получены спектральные представления таких процессов, с помощью этих представлений решены вопросы линейной экстраполяции процессов. А. М. Яглом нашел явное решение задачи о линейном прогнозе для процессов с дробно-рациональной плотностью.

Интерполяция случайных процессов в дальнейшем подробно изучалась Ю. А. Розановым. Им получены явные интерполяционные формулы и найдены условия точной интерполируемости процесса. Ю. А. Розанов исследовал также условия регулярности многомерных стационарных процессов (1959 г.), для одномерных процессов эта задача была полностью решена (1957 г.) В. Г. Винокуровым. Результаты Ю. А. Розанова по условиям регулярности многомерных стационарных процессов были обобщены (1959 г.) Р. Ф. Матвеевым. Все важнейшие результаты по теории стационарных случайных процессов (в том числе многомерных) изложены в монографии Ю. А. Розанова «Стационарные случайные процессы» (1963 г.).

В связи с развитием теории информации возник вопрос о вычислении скорости образования информации в одном гауссовском стационарном процессе относительно другого такого же процесса. В этом направ-

лении первые результаты были получены (1954, 1956 гг.) М. С. Пинскером. Эти результаты изложены в обзорной статье И. М. Гельфанда и А. М. Яглома «О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой функции» (1957 г.), в которой значительную часть составляют результаты самих авторов. М. С. Пинскеру принадлежат также наиболее общие результаты в этом направлении. Они изложены в его монографии «Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов» (1960 г.). В этой работе введены понятия энтропийной и информационной плотностей, найдены условия их существования и изучено предельное поведение этих величин на неограниченном промежутке времени.



В. Г. Винокуров

Важным, обобщающим понятием стационарного случайного процесса является понятие однородного, или изотропного, случайного поля (т. е. случайной функции нескольких переменных, совместные распределения значений которой не изменяются при переносах или поворотах пространства). Такие поля в связи с исследованием некоторых физических задач рассматривал (1954 г.) А. М. Обухов. Спектральную теорию случайных полей построил А. М. Яглом. М. И. Ядренко изучал гауссовские изотропные поля, обладающие некоторым обобщенным свойством марковости. Им же для некоторых случаев решена задача о прогнозе для однородных полей.

Марковские процессы. В работе А. Н. Колмогорова и Н. А. Дмитриева «Ветвящиеся случайные процессы» (1947 г.) введен важный класс марковских процессов — ветвящиеся случайные процессы. Эти процессы служат математической моделью для описания различных физических и биологических систем, состоящих из объектов, способных размножаться, превращаться из одного вида в другой и исчезать. Особую важность в изучении ветвящихся процессов представляет исследование асимптотического поведения различных вероятностей при $t \rightarrow \infty$, в частности вероятность вырождения процесса, т. е. вероятность того, что все объекты системы со временем исчезнут. Вычислению таких вероятностей посвящена статья (1947 г.) А. Н. Колмогорова и Б. А. Севастьянова.

Исследование ветвящихся процессов было продолжено Б. А. Севастьяновым. Полученные им, а также другими исследователями результаты изложены в его обзорной статье «Теория ветвящихся случайных процессов» (1951 г.). Б. А. Севастьянов изучал также переходные явления в ветвящихся случайных процессах, связанных с переходом среднего числа потоков одной частицы через единицу (1957 г.), а также



В. М. Золотарев.

ветвящиеся процессы, в которых частицы диффундируют и в момент превращения их траектории претерпевают разрыв (1964 г.). Некоторые предельные теоремы для ветвящихся процессов получены В. М. Золотаревым (1957, 1964 гг.), В. П. Чистяковым (1957 г.).

Е. Б. Дынкин исследовал (1952 г.) вопрос об условиях непрерывности и отсутствия разрывов второго рода в марковских процессах в полных метрических пространствах. Регулярность марковских процессов с конечным числом состояний исследовал (1952 г.) Р. Л. Добрушин.

В цикле работ Р. З. Хасьминского, начатом в 1955 г., изучались функционалы от траекторий марковских диффузионных процессов, в частности функционалы, зависящие от времени дости-

жения процессом некоторой границы. Эти исследования позволили дать вероятностную интерпретацию классификации границ, предложенной ранее Феллером. Е. Б. Дынкин нашел (1955 г.) уравнение характеристической функции аддитивного функционала общего марковского процесса.

В связи с применением для описания марковских процессов теории полугрупп в теории этих процессов возникли новые идеи. Предложенный Феллером метод такого описания марковских процессов (1953—1955 гг.) позволил ему решить две важные задачи: 1) описать все возможные граничные условия для одномерного диффузионного марковского процесса на конечном интервале, 2) описать все непрерывные одномерные однородные марковские процессы, переходные вероятности $P(t, x, A)$ которых таковы, что $\int f(y) P(t, x, dy)$ непрерывны по x для всякой ограниченной непрерывной функции $f(x)$ (такие процессы впоследствии стали называться феллеровскими).

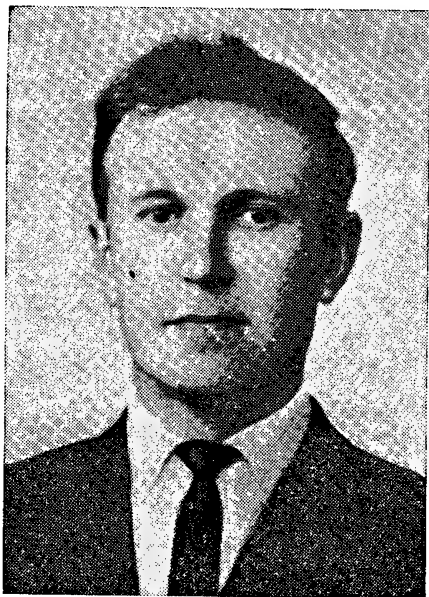
С 1956 г. полугрупповую теорию марковских процессов развивают Е. Б. Дынкин и его ученики. Е. Б. Дынкин объединил чисто аналитический аппарат Феллера с вероятностным методом, основанным на рассмотрении траекторий процесса и случайных моментов времени, связанных с этим процессом. Это позволило ему изучить более широкие классы явлений по сравнению с теми, которые рассматривал Феллер. В связи с рассмотрением процесса в случайные моменты времени возникла необходимость в понятии строго марковского процесса (так называются процессы, для которых марковское свойство сохраняется, если их рассматривать в такие случайные моменты времени, наступление которых зависит лишь от поведения процесса в прошлом). Такое понятие было введено (1956 г.) Е. Б. Дынкиным и А. А. Юшкевичем. Ими же были найдены условия, при которых марковский процесс является строго

марковским. Более подробно этот вопрос изучен А. А. Юшкевичем в статье «О строго марковских процессах» (1957 г.).

Е. Б. Дынкин нашел общее выражение для инфинитезимального оператора строго марковского процесса. Впоследствии этот оператор стали называть характеристическим (инфинитезимальный оператор оказался сужением характеристического оператора). Е. Б. Дынкин дал общее определение марковского процесса (оно включает и обрывающиеся процессы) и исследовал процессы, которые получаются из данного сокращения времени жизни. В связи с этим он ввел и изучил понятия аддитивного и мультипликативного функционалов процесса. Результаты, относящиеся к общей теории марковских процессов, изложены в монографиях Е. Б. Дынкина «Основания теории марковских процессов» (1959 г.), «Марковские процессы» (1963 г.). Распространению и развитию новых идей в теории марковских процессов (в частности, связи между этими процессами и теорией дифференциальных уравнений, теорией граничных условий и некоторых вопросов управления) посвящена монография Е. Б. Дынкина и А. А. Юшкевича «Теоремы и задачи о процессах Маркова» (1967 г.).

Структуру положительных непрерывных аддитивных однородных функционалов от марковского процесса изучали В. А. Волконский (1960 г.) и А. Д. Вентцель (1961 г.). Аддитивные функционалы произвольного знака от винеровского процесса описаны А. В. Скороходом (1961 г.) и А. Д. Вентцелем (1961, 1962 гг.). А. Д. Вентцель распространил (1963 г.) эти исследования на однородные диффузионные процессы.

Значительное внимание уделяется изучению граничных условий для марковских процессов. А. Д. Вентцель нашел (1956 г.) все граничные условия для одномерных непрерывных процессов, исследовал (1959, 1960 гг.) граничные условия для многомерных диффузионных процессов. При изучении вопроса о возможности задания тех или других граничных условий для марковского процесса потребовалось исследование способов достижения процессом границы и классификация границ. Такое исследование вырождающихся на границе области диффузионных процессов проведено (1958 г.) Р. З. Хасьминским. При изучении граничных условий для общих марковских процессов потребовалось исследование границы Мартина марковского процесса и связанных с нею гармонических функций процесса. Этими вопросами занимались Е. Б. Дынкин, М. Г. Шур, М. Б. Малютов. Общий вид граничных условий для процессов в локально компактном пространстве, не имеющих разрывов второго рода, получен (1964 г.) А. В. Скороходом. В связи с изучением аддитивных функционалов были рассмотрены супергармонические функции процесса. Все это позволило установить глубокую аналогию между теорией марковских процессов и некоторыми областями анализа, в частности теорией гармонических и супергармонических функций и краевыми задачами для эллиптических дифференциальных уравнений. Эти идеи развиты Е. Б. Дынкиным (1960, 1962 гг.). Особо интересны здесь формулы для решения различных краевых задач, связанных с уравнениями, в которые входит инфинитезимальный оператор процесса. Р. З. Хасьминским найдены (1962 г.) формулы для



Р. Л. Стратонович.

решения краевых задач, связанных с уравнением, содержащим полином от инфинитезимального оператора процесса.

Конкретные классы марковских процессов изучал (1958, 1959 гг.) Е. Б. Дынкин. Он рассмотрел скачкообразные процессы и непрерывные процессы на прямой более общего вида по сравнению с теми, которые рассматривал Феллер. Непрерывные процессы в n -мерном пространстве и локально компактных пространствах исследовал (1963, 1966 гг.) А. В. Скороход, случайные точечные множества на прямой, обладающие марковским свойством, — Н. В. Крылов и А. А. Юшкевич (1965 г.).

Большое значение для развития теории однородных процессов имеет книга Е. Б. Дынкина «Марковские процессы» (1963 г.), в которой систематизированы

все результаты, полученные к тому времени в этой теории, причем большинство результатов принадлежит самому автору и его ученикам. Одним из достоинств книги является то, что вводя в круг новейших идей и методов, она указывает дальнейшие пути развития теории однородных процессов.

Важным понятием в теории марковских процессов является понятие условно марковского процесса, т. е. процесса, который превращается в марковский, если известна реализация некоторого другого процесса. Основная задача этого понятия — выражение инфинитезимальных характеристик условно марковского процесса и вывод для него уравнений, аналогичных уравнениям А. Н. Колмогорова. Такие процессы ввел (1960 г.) Р. Л. Стратонович; он получил также ряд основных результатов по теории этих процессов, хотя и не всегда с достаточным математическим обоснованием. При более строгих ограничениях, но и более строго математически эти результаты получены А. Д. Вентцелем (1964 г.) и др. Результаты Р. Л. Стратоновича изложены в его книге «Условные марковские процессы» (1965 г.).

Рассмотрим некоторые результаты по процессам с независимыми приращениями, являющимися частным случаем процессов Маркова. В основном эти результаты связаны с исследованием роста таких процессов. Локальный рост однородных процессов с независимыми приращениями изучался еще в 1939 г. А. Я. Хинчиным. Им были введены понятия верхней и нижней функций для процесса и найдены условия, при которых функция является верхней или нижней. Б. В. Гнеденко исследовал (1942, 1943, 1948 гг.) этими же методами рост $|\xi(t)|$ при $t \rightarrow \infty$. В работе А. В. Скорохода «Случайные процессы с независимыми приращениями» (1964 г.) изложены основные результаты по теории таких процессов. В последнее время начали изучать процессы со скачками одного

знака (положительного). В. М. Золотарев (1964 г.) и А. А. Боровков (1964 г.) нашли распределение минимума для таких процессов, а Э. С. Штатланд (1965 г.) — распределение максимума и момента его достижения. В. М. Золотарев (1964 г.) и Э. С. Штатланд (1965 г.) исследовали односторонний рост процессов с независимыми приращениями.



А. В. Скороход.

Стохастические дифференциальные уравнения. Выше упоминались работы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова по дифференциальным уравнениям со случайными функциями. Ученик Н. Н. Боголюбова И. И. Гихман, обосновывая результаты Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, пришел к общей теории стохастических дифференциальных уравнений. От уравнений С. Н. Бернштейна эти уравнения отличались тем, что записывались для траектории процесса и позволяли ее находить. Уравнения С. Н. Бернштейна позволяли находить лишь вероятности перехода. Основная трудность состояла в том, что процессы, входившие в уравнение, не имели производной. Поэтому нужно было придать новый смысл понятию дифференциала и строить заново всю теорию дифференциальных уравнений, содержащих такие дифференциалы. Эта задача была выполнена (1947—1951 гг.) И. И. Гихманом. Он ввел общее стохастическое дифференциальное уравнение, нашел условия существования и единственности его решения, доказал дифференцируемость решения по начальным данным и с помощью этих результатов вывел уравнения А. Н. Колмогорова без предположения о дифференцируемости переходных вероятностей. Примерно в это же время другая форма стохастических дифференциальных уравнений была предложена Ито (Япония). Ито получил также уравнение для разрывных одномерных марковских процессов. Впоследствии в СССР были проведены исследования уравнений в форме Ито. Это работы А. В. Скорохода и И. В. Гирсанова (1960, 1961 гг.), посвященные усилению известных теорем существования и единственности для решений стохастических уравнений, коэффициенты которых удовлетворяют условиям Липшица по пространственным переменным. А. В. Скороход исследовал (1961, 1962 гг.) стохастические дифференциальные уравнения для одномерных диффузионных процессов с мгновенным отражением на границе, ввел (1968 г.) стохастические дифференциальные уравнения для разрывных процессов в n -мерном пространстве, нашел условия существования и единственности для таких уравнений, доказал дифференцируемость по начальным данным и вывел интегро-дифференциальные уравнения для математических ожиданий от гладких функций.

Стохастические дифференциальные уравнения с коэффициентами,

зависящими от параметра, рассматривали (1961 г.) Ю. Н. Благовещенский и М. И. Фрейдлин. Ими установлены условия непрерывной зависимости и дифференцируемости решения стохастического уравнения как функции параметра. Ю. Н. Благовещенский использовал (1962 г.) эти результаты при построении асимптотического разложения решения уравнения по малому параметру.

В последнее время большое внимание уделяется изучению асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений при $t \rightarrow \infty$. Вопросы устойчивости решения такого уравнения рассмотрены (1962 г.) Р. З. Хасьминским. Им установлен интересный факт превращения неустойчивого движения в устойчивое после добавления некоторой случайной возмущающей силы. Р. З. Хасьминский обосновал для некоторых уравнений принцип усреднения Н. Н. Боголюбова. И. И. Гихман обобщил (1964 г.) эти результаты на более широкий класс процессов, затем исследования были продолжены (1965 г.) И. И. Гихманом и А. Я. Дороговым. В докладе, прочитанном на сессии АН УССР в 1965 г., И. И. Гихман предложил самую общую схему стохастических дифференциальных уравнений, основанную на понятии стохастического интеграла вдоль случайной кривой. Для таких дифференциальных уравнений он также обосновал принцип усреднения Н. Н. Боголюбова.

Вопросы о стохастическом дифференциальном уравнении в гильбертовых пространствах рассматривались (1964 г.) В. В. Бакланом и Т. Л. Чантладзе. Им удалось перенести основные результаты для конечномерного случая на бесконечномерный. Ю. Л. Далецкий обобщил (1966 г.) стохастическое дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве, благодаря чему стало возможным рассматривать уравнения с обобщенными процессами. Для таких уравнений он получил результаты, аналогичные результатам для уравнений с обычными (необобщенными) процессами.

Предельные теоремы для случайных процессов. Идеи, развитые А. Н. Колмогоровым, А. Я. Хинчиным, И. Г. Петровским при обосновании предельного перехода от дискретных блужданий к непрерывным процессам, были использованы для доказательства ряда теорем И. И. Гихманом. Он предложил (1952 г.) общий метод получения асимптотических разложений для математических ожиданий достаточно гладких функций от значений цепи Маркова, сходящейся к непрерывному марковскому процессу. Доказал (1953, 1954 гг.) ряд предельных теорем для условных распределений от сумм независимых случайных величин, при этом использовал тот факт, что условные распределения последовательности сумм совпадают с распределением цепи Маркова, сходящейся к условному винеровскому процессу. Им была доказана также (1953 г.) первая теорема о сходимости последовательности сумм к разрывному процессу с независимыми приращениями — теорема о предельном значении вероятности того, что суммы будут лежать в криволинейной области.

Американский математик Донскер доказал (1951 г.) следующую общую теорему: предельное распределение функционала от случайной

ломаной, построенной по последовательности сумм одинаково распределенных независимых случайных величин с конечной дисперсией, совпадает с распределением этого же функционала от винеровского процесса, если функционал непрерывен. Используя условия компактности мер в функциональном пространстве, Ю. В. Прохоров нашел (1953, 1956 гг.) необходимые и достаточные условия слабой сходимости распределения в функциональных пространствах и применил эти результаты для обобщения теоремы Донскера на разнораспределенные слагаемые и доказательства аналогичной теоремы для последовательности цепей Маркова, сходящейся к непрерывному марковскому процессу. А. В. Скороход изучал предельные теоремы такого типа для случая, когда предельный процесс разрывный. В частности, он рассматривал сходимость последовательности сумм к разрывному процессу с независимыми приращениями (1955, 1957 гг.) и последовательности цепей Маркова к разрывному марковскому процессу (1956, 1958 гг.). Наиболее общие теоремы о сходимости цепей Маркова к марковскому процессу изложены А. В. Скороходом в монографии «Исследования по теории случайных процессов» (1961 г.). Интересную предельную теорему о вероятности пребывания процесса в криволинейной полосе получил (1956 г.) Н. Н. Ченцов. Теорема Ченцова применима для процессов самого общего вида и удобна для приложений, поскольку ее условия выражаются через моменты приращений процесса.

И. И. Гихман рассмотрел (1957, 1958 гг.) предельные теоремы для числа пересечений случайной ломаной границы некоторой области. Такие предельные теоремы не вкладывались в общую схему, предложенную Донскером, поскольку рассматриваемый функционал не имел смысла на предельном процессе. Продолжая эти исследования, А. В. Скороход (1961 г.) и Н. П. Слободенюк (1964 г.) рассмотрели предельные теоремы для аддитивных функционалов от последовательности сумм независимых случайных величин. Предельные теоремы для функционалов еще более общего вида изучала (1964 г.) Г. Н. Сытая.

Важной областью исследования предельных теорем являются оценки скорости сходимости и построение асимптотических разложений для уточнения предельных теорем. Кроме упоминавшейся выше работы И. И. Гихмана к этой области относится большой цикл исследований В. С. Корольюка, посвященный уточнению предельных теорем для задач случайных блужданий с границами. В первых работах этого цикла дан (1954 г.) асимптотический анализ критериев А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова, однако предложенный В. С. Корольюком метод исследования не охватывал еще влияния перескока через границу и поэтому не всегда приводил к верным результатам. Впоследствии (1959, 1960 гг.) для учета влияния границы В. С. Корольюк применил метод двойного разложения, состоящего из регулярных членов и погранслоев, существенно отличных от нуля лишь в окрестности границы; регулярные члены получались обычным разложением оператора по степеням малого параметра, а уравнение для погранслоев — с помощью метода факторизации исходного оператора, причем оно имело вид интегрального уравнения на полуоси. Таким методом были решены задачи одно-



В. С. Корольюк.

мерного и многомерного блужданий до поглощения, блуждания в криволинейной области. В совместной работе (1962 г.) В. С. Корольюка и Д. В. Гусака построен асимптотический анализ для максимума пуассоновского процесса. Д. В. Гусак обобщил (1964 г.) эти исследования на максимум процессов с независимыми приращениями.

Другой метод для асимптотики односторонних и двусторонних уклонов в схеме случайных блужданий предложил (1960 г.) А. А. Боровков. Этот метод основан на изучении двойного преобразования Лапласа соответствующих распределений и применении способа перевала для построения асимптотики. Таким образом, А. А. Боровкову удалось построить асимпотику не только нормальных, но и больших уклонов. Основные

результаты по асимптотике в граничных задачах случайных блужданий изложены в обзоре А. А. Боровкова и В. С. Корольюка «О результатах асимптотического анализа в задачах с границами» (1965 г.).

Абсолютная непрерывность мер, соответствующих случайным процессам. Начало изучения этих вопросов восходит к Камерону и его ученикам (конец 40-х — начало 50-х гг.), которые рассматривали их в связи с преобразованиями винеровских интегралов. В 1956 г. Ю. В. Прохоров нашел вид плотности меры, соответствующей одномерному диффузионному процессу относительно винеровской меры. Необходимые и достаточные условия абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессам с независимыми приращениями, и вид плотности найдены (1957 г.) А. В. Скороходом. Многомерные диффузионные и общего вида марковские процессы рассматривались (1960 г.) А. В. Скороходом и И. В. Гирсановым. Большое количество работ посвящено изучению условий абсолютной непрерывности и сингулярности мер, соответствующих гауссовским стационарным процессам. Первые результаты в этом направлении были получены (1960 г.) в связи с вычислением количества информации М. С. Пинскером. В. Г. Алексеев нашел (1962, 1963 гг.) для эквивалентности и ортогональности мер, соответствующих стационарным процессам, ряд достаточных условий, выраженных через спектральные плотности процессов при условии, что плотности имеют степенную асимпотику на бесконечности. Наиболее общие результаты в этом направлении получены (1962—1964, 1966 гг.) Ю. А. Розановым. При естественных ограничениях он нашел необходимые и достаточные условия абсолютной непрерывности, причем, если спектральные плотности имеют степенную асимпотику на бесконечности, эти условия явно выражаются через корреляционную функцию.

А. Д. Шаташвили изучал (1963, 1964 гг.) абсолютную непрерывность мер при линейных и нелинейных преобразованиях гауссовских процессов. Абсолютную непрерывность мер, соответствующих марковским процессам в гильбертовом пространстве, рассматривали (1964 г.) В. В. Баклан и Т. Л. Чантладзе. В. В. Баклан и А. Д. Шаташвили исследовали (1965 г.) нелинейные преобразования гауссовских мер в гильбертовых пространствах. Нелинейные преобразования произвольных вероятностных мер в гильбертовом пространстве изучались (1966 г.) А. В. Скороходом.



Ю. А. Розанов.

Некоторые общие вопросы. В 1955 г. И. М. Гельфанд дал определение обобщенного случайного процесса. Вопрос о возможности реализации обобщенного процесса на вероятностном пространстве рассматривался в работе (1958 г.) Р. А. Минлоса. Н. Н. Ченцов нашел (1956 г.) достаточные условия отсутствия разрывов второго рода для произвольных процессов (эта теорема является обобщением известной теоремы А. Н. Колмогорова об условиях непрерывности), а также условия непрерывности случайных полей. Ю. В. Прохоров исследовал (1956, 1957 гг.) условия, при которых положительно определенная функция на гильбертовом пространстве является характеристическим функционалом некоторого распределения. Необходимые и достаточные условия для этого с помощью специального понятия непрерывности нашел (1958 г.) В. В. Сазонов. В работе А. В. Скорохода «Конструктивные методы задания случайных процессов» (1965 г.) предложены некоторые общие методы решения с помощью характеристических функционалов некоторых задач теории случайных процессов.

Математическая статистика

Исходным объектом в статистических исследованиях служит совокупность результатов наблюдений, рассматриваемая как случайная величина x в некотором измеримом пространстве (X, A) с неизвестным распределением (вероятностной мерой) $\mathcal{P}$. Пространство (X, A) называется выборочным. Измеримое отображение T выборочного пространства (X, A) в измеримое пространство $(\mathcal{J}, B)$ называется статистикой. В большинстве рассматриваемых в математической статистике ситуаций x есть n -мерное евклидово пространство, а следовательно, совокупность результатов наблюдений x — случайный вектор.

Основным содержанием математической статистики является классификация и построение статистик, обладающих теми или иными заданными свойствами, а также изучение свойств заданных статистик. Большинство важнейших задач математической статистики приводится к проблемам оценки неизвестных параметров и к проверке статистических гипотез. Общие точки зрения на эти вопросы, принятые в настоящее время, были выработаны в исследованиях Фишера, Неймана, Пирсона, Вальда, Лемана и др. Большое значение для развития математической статистики имеют работы советских ученых Е. Е. Слуцкого, А. Н. Колмогорова, В. И. Романовского, С. Н. Бернштейна, Н. В. Смирнова, Ю. В. Линника и др.

Пусть распределение $\mathcal{P}_\theta$, определенное в выборочном пространстве (X, A) , зависит от неизвестного параметра θ , значение которого принадлежит некоторому множеству Ω . Проблема оценки параметра θ состоит в построении оценивающей статистики $\hat{\theta}(x)$ с определенными свойствами по отношению к параметру θ , а проблема проверки гипотез — в построении решающей статистики $\delta(x)$, обладающей определенными свойствами по отношению к разбиению множества значений параметра на два класса

$$\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega.$$

Вариационный ряд и эмпирическая функция распределения. Если компоненты случайного вектора x взаимно независимы и одинаково распределены с непрерывной функцией распределения $F(x)$, важной статистикой является вариационный ряд, построенный упорядочением по величине компонент вектора x . Закономерности, которым подчинены члены вариационного ряда, были предметом исследований многих ученых. Н. В. Смирнов изучил (1935—1937 гг.) центральные члены вариационного ряда. Б. В. Гнеденко описал (1941 г.) все возможные предельные распределения (при неограниченном возрастании числа наблюдений n) для максимального члена и нашел условия притяжения к каждому из перечисленных предельных распределений. Н. В. Смирнов посвятил (1949 г.) большое исследование изучению предельных распределений как для центральных, так и для крайних членов вариационного ряда и нашел области притяжения предельных распределений. Работы Н. В. Смирнова и Б. В. Гнеденко послужили базой для дальнейших исследований в этом направлении (Б. Н. Гартштейн, Д. Г. Мейзлер, Д. М. Чибисов, Б. В. Финкельштейн и др.).

Другой не менее важной статистикой в рассматриваемом случае является эмпирическая функция распределения $F(x)$, построенная по вариационному ряду. Из теоремы Бернулли следует, что эмпирическая функция распределения сходится по вероятности к теоретическому распределению $F(x)$ при каждом фиксированном значении аргумента x .

Началом глубоких и обширных исследований были работы В. И. Гливенко и А. Н. Колмогорова. В. И. Гливенко установил (1933 г.), что эмпирическое распределение с вероятностью, равной единице, равномерно сходится к $F(x)$. А. Н. Колмогоров нашел (1933 г.) асимптотическое распределение нормированных максимальных укло-

нений на всей числовой оси эмпирического распределения от непрерывного теоретического распределения $F(x)$, т. е. предельное распределение статистики

$$D_n = \sqrt{n} \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)|.$$

Оказалось, что распределение статистики D_n не зависит от вида $F(x)$. Это позволяет использовать при больших n предельное распределение статистики D_n в качестве непараметрического критерия согласия.

Результаты А. Н. Колмогорова послужили Н. В. Смирнову отправным пунктом в исследованиях асимптотического поведения эмпирических распределений. Н. В. Смирнов нашел (1936 г.) предельное распределение статистики

$$\omega^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 g(F(x)) dF(x)$$

и показал, что предельное распределение статистики

$$D_{n,n_2} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_{n_1}(x) - F_{n_2}(x)|,$$

где $F_{n_1}(x)$ и $F_{n_2}(x)$ — эмпирические распределения двух независимых вариационных рядов, совпадает с предельным распределением статистики D_n . Он также обобщил (1944 г.) теорему Колмогорова, изучив предельное поведение распределения числа выходов эмпирической кривой за пределы полосы, содержащей теоретическое распределение. В более поздних работах (1951 г.) Н. В. Смирнов рассматривал вопрос о сходимости гистограмм (эмпирических плотностей) и теоретической плотности распределения. Оценкам плотности распределения посвящены работы Г. М. Мания, Э. Надарая, Н. Н. Ченцова.

В середине 40-х годов XX в. в связи с разработкой прикладных вопросов возрос интерес к непараметрическим критериям согласия, в первую очередь к критерию Колмогорова. Феллер, а затем Дуб предложили новые методы доказательства теоремы Колмогорова. Метод Феллера использовали Г. М. Мания и И. Д. Квит для получения предельных распределений максимальных отклонений эмпирической функции распределения от теоретической и между двумя эмпирическими функциями распределения на отдельных интервалах изменения аргумента x . Эвристический подход Дуба, конкретизируя идеи, изложенные в работе (1933 г.) А. Н. Колмогорова, сводил рассматриваемые задачи математической статистики к изучению распределений функционалов от случайных процессов. И. И. Гихман получил (1953 г.) более общие формулы и установил некоторые новые асимптотические свойства эмпирической функции распределения. В этом же плане асимптотические свойства эмпирических функций распределения и различных функционалов от них изучались Н. Н. Ченцовым, Д. М. Чибисовым, А. А. Филипповой.

Б. В. Гнеденко и его ученики (Е. Л. Рвачева-Ющенко, В. С. Королук, В. С. Михалевич) применили метод случайных блужданий для

изучения точных распределений статистик,

$$D_n^{\pm} = \sup_{\inf} [F_n(x) - F(x)], \quad D_{n_1 n_2}^{\pm} = \sup_{\inf} [F_{n_1}(x) - F_{n_2}(x)],$$

D_n и $D_{n_1 n_2}$ при фиксированном значении n, n_1, n_2 . При $n_1 = n_2 = n$ были получены точные довольно простые формулы для распределения D_{nn} и совместного распределения D_{nn}^+ и D_{nn}^- . В. С. Корольюк нашел (1955 г.) функции распределения $D_{n_1 n_2}$ и $D_{n_1 n_2}^+$, а в случае $n_1 = p n_2$ предельным переходом при $p \rightarrow \infty$ — распределение D_n . Изучалось также (Б. В. Гнеденко, В. С. Михалевич) взаимное расположение двух эмпирических функций распределения.

В случае, когда исходное теоретическое распределение $F(x, \theta)$ зависит от конечного числа эмпирически определяемых параметров, асимптотическое поведение распределений статистик D_n и ω_n^2 изучалось И. И. Гихманом (1953 г.), а также Дарлингем. К этому кругу вопросов примыкают также работы С. Х. Туманяна (1954 г.) и И. И. Гихмана (1956 г.), в которых изучается асимптотическое распределение статисти-

ки $\chi^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(v_k - np_k)^2}{np_k}$ при неограниченном одновременном увеличении числа наблюдений $N = \sum_{k=1}^n v_k$ и интервалов группировки n .

Характеризация классов распределений. Достоинства непараметрических статистик приводят к проблеме построения непараметрических статистик для классов распределений $F(x, \theta)$, зависящих от параметра θ . Более точно эта проблема может быть сформулирована следующим образом. Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое множество вероятностных распределений, заданных в выборочном пространстве (X, A) . Задача состоит в построении статистики $T(x)$, обладающей следующими характеристическими свойствами: 1) распределение Q_T статистики $T(x)$ одинаково при всех $P \in \mathcal{P}$; 2) если для некоторого распределения P' статистика $T(x)$ имеет распределение Q_T , то $P' \in \mathcal{P}$. Такая непараметрическая статистика $T(x)$ позволяет заменить сложную гипотезу «распределение x принадлежит к классу $\mathcal{P}$ » простой гипотезой «распределение T есть Q_T ». В математической статистике задача построения статистики, обладающей указанными двумя свойствами, и изучение ее распределения называются проблемой многих малых выборок. А. А. Петров изучил (1956 г.) асимптотическое поведение числа выборок фиксированного объема, обеспечивающих заданные значения ошибок первого и второго рода. Интересные расчеты проведены также в работах Н. Н. Володина и Ц. Г. Хахубия.

Исследуя аддитивный класс распределений $\mathcal{P}$ с плотностями $p(x, \theta) = p(x - \theta)$, И. Н. Коваленко показал (1958 г.), что статистика $T(x) = (x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n)$ при $n \geq 3$ определяет характеристическую функцию $f(t)$ плотности $p(x)$ с точностью до множителя e^{ivt} на каждом интервале, где $f(t) \neq 0$. Изучая класс нормальных распределений

$$p(x, \theta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - a)^2}{2\sigma^2} \right],$$

где $\theta = (a, \sigma)$, А. А. Зингер и Ю. В. Линник установили (1964 г.), что статистика $T(x) = (y_1, \dots, y_n)$, где

$$y_k = \frac{x_k - \bar{x}}{s}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad s^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2, \quad s > 0,$$

имеет равномерное распределение на сфере $\sum_{k=1}^n y_k = 0, \sum_{k=1}^n y_k^2 = 1$

и обладает указанными выше двумя характеристическими свойствами при $n \geq 6$. Ю. В. Прохоровым найдены (1965 г.) статистики, характеризующие классы распределений $p(x - \theta)$, $\frac{1}{\theta!} p\left(-\frac{x}{\theta}\right)$, $\frac{1}{b} p\left(\frac{x-a}{b}\right)$ (x — век-

тор). Основой выбора статистики, обладающей указанными двумя характеристическими свойствами, служат соображения инвариантности. Пусть G — группа взаимно однозначных отображений g выборочного пространства на себя, обладающая таким свойством: распределения x и gx одновременно принадлежат или не принадлежат к классу $\mathcal{P}$; пусть для любых двух распределений P_1 и P_2 из $\mathcal{P}$ существует $g \in G$ такое, что $P_2(A) = P_1(gA)$ при каждом A . При этих условиях в качестве характеризующей статистики естественно рассматривать максимальный инвариант группы G . Очевидно, что такая статистика обладает первым из указанных двух свойств. Вопрос о том, когда она обладает вторым свойством, относится к весьма трудным проблемам аналитической статистики. В случае класса пуассоновских распределений $p(x, \theta) = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta} (\theta > 0)$ соображения инвариантности непригодны.

Здесь и в аналогичных ситуациях оказывается естественным использовать достаточные статистики (Л. Н. Большев, 1965 г.).

Статистические задачи с мешающими параметрами. Существенный вклад в развитие аналитической статистики внесли Ю. В. Линник, его ученики и сотрудники И. В. Романовский, А. А. Зингер, А. М. Каган, В. Н. Судаков, О. В. Шалаевский и др. Ими развита аналитическая теория исключения мешающих параметров при испытании статистических гипотез.

Пусть распределение P_θ , определенное на выборочном пространстве (X, A) , зависит от s -мерного параметра $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$, принимающего значения из некоторого борелевского множества Ω s -мерного евклидова пространства. Статистическая гипотеза H_0 состоит в проверке того, что $(\theta_1, \dots, \theta_g) \in \omega$, где $g < s$ и ω — подмножество g -мерного пространства параметров. Тогда параметры $\theta_{g+1}, \dots, \theta_s$ называются мешающими. К проверке гипотезы с мешающими параметрами сводятся гипотезы о наличии между параметрами g связей при определенных аналитических требованиях, налагаемых на эти связи. Проблема состоит в построении решающей статистики (теста) $\delta(x)$, инвариантной относительно мешающих параметров в том смысле, что математическое ожидание теста $M_\theta = \delta(x) = \varphi_\delta(\theta_1, \dots, \theta_g)$ не зависит от мешающих параметров $\theta_{g+1}, \dots, \theta_s$. Такие тесты называются тестами с инвариантной мощностью. Классическим примером статистической задачи с мешающими параметрами является проблема Беренса — Фишера, заключающаяся



Е. Б. Дынкин.

в проверке гипотезы о равенстве двух средних из нормальных совокупностей с неизвестными параметрами. Здесь мешающими параметрами служат среднее и дисперсии. Можно привести довольно простые примеры, в которых не существует тестов с инвариантной мощностью. Поэтому естественно ослабить условие независимости от параметров, потребовав независимости от мешающих параметров лишь для $\theta \in \omega$, что означает постоянство $M_{\theta\delta}(x)$ при $\theta \in \omega$. Такие тесты называют подобными.

В монографии Ю. В. Линника «Статистические задачи с мешающими параметрами» (1966 г.) систематизированы исследования ленинградских статистиков, проведенные в последние годы, по теории подобных тестов и несмещенных оценок, в частности по проблеме Беренса — Фишера для различных классов распределений, и развиты новые сильные аналитические методы, использующие теорию пучков идеалов функций.

Общие свойства статистик. При изучении общих свойств статистик для данного семейства распределений $\mathcal{P} = \{P_{\theta}, \theta \in \Omega\}$, зависящих от параметра θ , прежде всего возникает вопрос о существовании статистик, содержащих полную информацию о параметре θ . Такие статистики, для которых условное распределение x при фиксированном значении T не зависит от θ , называют достаточными. Идеи достаточности были развиты в работах Фишера. Достаточные статистики позволяют сокращать исходные статистические данные. Естественно рассматривать статистики, максимально сокращающие данные. Такие достаточные статистики называют минимальными (или необходимыми). Способы построения достаточных и необходимых статистик для различных классов распределений рассмотрены в работах Лемана, Шеффе и Е. Б. Дынкина. В большом исследовании Е. Б. Дынкина (1951 г.) описаны все семейства одномерных распределений, имеющих необходимые и достаточные статистики. Особое внимание уделено семействам распределений вида

$$p(x - \theta), \quad p\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad p\left(\frac{x - a}{\sigma}\right).$$

В теории точечных оценок параметра естественным свойством оценивающей статистики должна быть несмещенность. Изучением и построением несмещенных оценок занимались Гиршик, Мостеллер, Сэведж, Блэквелл, А. Н. Колмогоров, В. И. Романовский и др. В статье А. Н. Колмогорова «Несмещенные оценки» (1950 г.) изложены общие точки зрения на роль несмещенных оценок и их связь с достаточными статистиками, приведены примеры построения несмещенных оценок

в некоторых конкретных ситуациях. Эти исследования были продолжены (1956 г.) С. Х. Сираждиновым.

Преобразование случайных величин. Широко применяются в математической статистике преобразования случайных величин. Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ — непрерывные функции распределения, F^{-1} и Φ^{-1} — соответствующие им обратные функции. Рассмотрим функции

$$x(y) = F^{-1}(\Phi(y)), \quad y(x) = \Phi^{-1}(F(x)), \quad z(w) = \Phi(F^{-1}(w)), \quad w(z) = F(\Phi^{-1}(z)).$$

Если существуют удобные формулы для вычисления этих функций, а также функций Φ и Φ^{-1} , то легко вычисляются значения функций F и F^{-1} . Задача рационального подбора функции Φ весьма трудна. Очевидно, что в качестве Φ разумно выбирать функцию распределения, близкую к F , например, рассматривать преобразование случайных величин, когда F зависит от некоторого параметра λ и при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ стремится к Φ . Асимптотически нормализующие преобразования (когда Φ — нормальное распределение) и асимптотически пирсоновские преобразования (когда Φ — пирсоновское распределение) исследованы (1959—1965 гг.) Л. Н. Большевым. Результаты общей теории применяются им для уточнения аппроксимаций широко используемых в статистике распределений χ^2 , F -распределения, распределений статистик Колмогорова, Смирнова и др.

Теория статистических решений. Долгое время основное содержание математической статистики составлял анализ статистических данных. Вместе с тем совершенно естественно, что планирование экспериментов играет немаловажную роль в статистических исследованиях. Выбор решающего правила должен быть в каком-то смысле оптимальным. Должны учитываться потери, связанные с применением того или иного решающего правила, а также того или иного плана экспериментов. Общие точки зрения на эти проблемы были изложены в работах Вальда. В. С. Михалевич (по предложению Колмогорова) изучал (1956 г.) последовательные планы контроля с учетом потерь на контроль. Им исследованы оптимальные байесовские последовательные решающие правила в биномиальной схеме для пуассоновского процесса и в пределе для винеровского процесса. В. С. Михалевич разработал (1959—1966 гг.) общую схему построения оптимальных решающих процедур с учетом планирования экспериментов в многовариантных задачах.

Важную роль в развитии теории управления случайными процессами сыграла задача об оптимальной остановке, предложенная А. Н. Колмогоровым и детально исследованная в работах (1963 г.) А. Н. Ширяева. А. Н. Ширяев, Б. И. Григелионис, Р. Ш. Липцер развили эту задачу и создали (1965—1967 гг.) общую теорию фильтрации компоненты двумерного марковского процесса по наблюдениям второй компоненты. Существенную роль в этой теории управления случайными процессами сыграло понятие условно-марковского процесса, введенное Р. Л. Стратоновичем. Развитию теории управления случайными процессами посвящены также работы Е. Б. Дынкина, А. Д. Вентцеля, И. В. Гирсанова, В. И. Аркина и др.

Развитие прикладных методов теории вероятностей

Общее направление исследований. В наше время невозможно провести грань между абстрактно-теоретическими и прикладными методами теории вероятностей. Причина этого заключается, во-первых, в том, что создание разветвленной, логически отточенной теории является необходимой предпосылкой для уверенных и успешных прикладных исследований, и, во-вторых, в том, что тщательное и всестороннее изучение конкретных проблем практики систематически приводит к идейному обогащению теории, коренной ее перестройке и совершенствованию. Собственно, почти все принципиальные идеи теории вероятностей, приведшие к появлению новых областей исследования и существенной ломке ее содержания, берут свое начало в конкретных вопросах практики. Примером могут служить истоки теории случайных процессов и теории информации.

Вопросы естественнонаучных, инженерных и экономических применений методов теории вероятностей стимулировали теоретико-вероятностные исследования. Замечательные работы А. Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина по теории случайных процессов связаны с их интересом к физике и биологии, а исследования Е. Е. Слуцкого по теории случайных функций — с его занятиями геофизикой. Точно так же исследования Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова по теории случайных процессов тесно связаны с их глубоким проникновением в природу физических процессов. Позднее физика, геофизика, радиофизика были истоками ряда работ А. М. Обухова, А. М. Яглома, Р. Л. Стратоновича и многих других математиков в теории случайных процессов и полей, теории информации и других областях теории вероятностей. Интерес В. С. Пугачева к теории стационарных случайных функций был вызван актуальными проблемами современной техники. Развитие теории управляющих процессов, начатое в нашей стране В. С. Михалевичем, А. Н. Ширяевым, И. В. Гирсановым и другими, связано с рядом основных вопросов управления технологическими процессами, статистическим контролем качества продукции и многими другими направлениями прикладных исследований.

Поскольку рассмотрению теории случайных процессов и полей в настоящей главе отведено значительное место, мы не будем здесь касаться результатов теоретико-вероятностных исследований, связанных с физикой, и остановимся на вопросах, особенно интенсивное развитие которых в последние два десятилетия было вызвано требованиями техники и организации производства.

Теория массового обслуживания. Своеобразный и интересный для математика круг вопросов был выдвинут прежде всего развитием телефонной связи, а также переходом в промышленности к многостаночной работе. Первоначальные задачи ставились так. В случайные моменты времени возникают требования, которые могут быть обслужены n равноправными приборами. Длительность обслуживания случайна. Требования, пришедшие в момент, когда все приборы заняты обслуживани-

ем ранее поступивших требований, или уходят из системы обслуживания (система с потерями), или становятся в очередь и ожидают освобождения приборов (система с ожиданием). Необходимо определить для первой системы вероятность потери требования, а для второй — среднюю длительность ожидания, а также распределение длительности ожидания начала обслуживания. Это классические постановки телефонных задач, впервые четко поставленные и решенные при простейших предположениях датским исследователем Эрлангом. Если при изучении телефонных сетей, особенно больших городов, можно считать, что число требований может быть сколь угодно большим, то при изучении работы станков, которые могут выходить из рабочего состояния и требовать к себе внимания обслуживающего рабочего, это предположение уже неосуществимо. Приходится рассматривать ситуацию, в которой максимально возможное число требований ограничено.



А. М. Яглом.

Эрланг еще в 20-е годы нашего века предложил решение задач об обслуживании с отказами и ожиданием при следующих простейших предположениях: моменты появления требований образуют стационарный пуассоновский поток, а длительность обслуживания случайна и имеет экспоненциальное распределение. В обоих случаях решение получается без большого труда и сводится к решению систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Эти уравнения являются частным случаем процессов гибели и размножения. Естественно, что немедленно возникли дополнительные вопросы: каков истинный характер потока требований, каково истинное распределение длительности обслуживания, нельзя ли поставленные Эрлангом задачи решить при более общих предположениях? Эти вопросы вызвали большой поток исследований. Первый значительный успех (1933 г.) в их решении был достигнут Полячеком и А. Я. Хинчиным. Им удалось получить знаменитую формулу для характеристической функции длительности ожидания при обслуживании с ожиданием в однолинейной системе. Их предположения сводились к следующему: поток требований стационарный пуассоновский, длительность обслуживания произвольная. (В случае n -линейной системы при этих условиях явные формулы для функции распределения длительности ожидания не получены до сих пор.) Интересно отметить, что для получения этой формулы Хинчин использовал прием, который впоследствии был развит Кендаллом в метод исследования задач теории массового обслуживания и назван методом вложенных цепей Маркова. Прием Хинчина основан на следующем: существуют такие моменты времени, в которые

интересующая исследователя характеристика обслуживания (длина очереди, длительность ожидания) образует последовательность, связанную простой цепной зависимостью.

Попытка доказать, что формулы Эрланга для систем с отказами, полученные им для упомянутого выше простейшего потока требований и экспоненциального распределения длительности обслуживания, сохраняют свой вид и для произвольной функции распределения длительности обслуживания, увенчалась успехом совсем недавно (работы Форте, Б. А. Севастьянова, 1957 г., и А. Я. Хинчина, 1955 г.). Для этой цели Севастьянов разработал глубокий аналитический аппарат, неоднократно использовавшийся затем для исследования ряда вопросов. Т. П. Марьянович посвятил цикл статей исследованию эффективности систем массового обслуживания с ненадежными приборами, немедленно поступающими после отказа на восстановление. К этому же направлению относятся статьи Т. И. Насировой. Работа Б. А. Севастьянова навела И. Н. Коваленко на мысль изучить условия, при которых задачи теории массового обслуживания имеют стационарное решение, зависящее только от математического ожидания длительности обслуживания и не зависящее от ее функции распределения.

Исследование потоков событий. Предсказать моменты поступления требований в систему массового обслуживания невозможно — они случайны. А можно ли подметить некоторую закономерность в их поведении? Еще Эрланг в основу своих работ положил гипотезу, согласно которой поток вызовов является пуассоновским с постоянным параметром. Но если это так, то какие причины приводят к такому потоку? Изучение многих реальных систем, в которых пуассоновский поток хорошо аппроксимировал реальный поток событий, навело на мысль, что каждый раз, когда поток является суммой очень большого числа слагаемых потоков малой интенсивности и независимых между собой, нужно ожидать пуассоновского потока. Этот результат ожидался многими, на нем даже основывались серьезные заключения, но математически он не был не только доказан, но даже сформулирован точно. Первый успех в этом направлении принадлежит А. Я. Хинчину, установившему достаточные условия, которые приводят к тому, что сумма большого числа независимых потоков малой интенсивности асимптотически эквивалентна простейшему потоку (пуассоновскому потоку постоянной интенсивности). Вскоре (1956 г.) ученику А. Я. Хинчина Г. А. Ососкову удалось доказать, что эти условия являются также необходимыми для равномерно малых слагаемых потоков. Благодаря работам А. Я. Хинчина и Г. А. Ососкова изучение входящих потоков получило серьезную математическую базу. Позднее (1962—1964 гг.) Франкен и Б. И. Григелионис уточнили результаты Хинчина и Ососкова, найдя асимптотические разложения суммарного потока по степеням n^{-1} (n — число слагаемых), а Григелионис одновременно распространил (1964—1966 гг.) их на случай нестационарных и неоднородных слагаемых потоков: при весьма общих условиях суммарный поток будет близким к нестационарному пуассоновскому.

Результаты Хинчина и Григелиониса интересны не только в теоре-

тическом, но и в прикладном плане, поскольку в ряде часто встречающихся случаев позволяют предвидеть, с какого типа потоком придется столкнуться в сложившейся ситуации. К настоящему времени накоплен большой экспериментальный материал о приходе судов в морские порты, вызовах врачей скорой и неотложной помощи, телефонных вызовах на центральную станцию, отказах сложных радиоэлектронных и механических систем и др. Оказалось, что эти теоремы имеют широкий диапазон практических применений.

Исходя из одного результата Реньи Ю. К. Беляев изучал схему, в которой поток требований подвергается разрядке. Оказалось, что если разрядке подвергается рекуррентный поток, то при большом числе операций разрежения поток близок к пуассоновскому. Р. Л. Добрушин, рассматривая схему блуждания, снова столкнулся с процессом Пуассона. Интересная схема, также приводящая к процессу Пуассона, изучалась В. А. Волконским, Ю. К. Беляевым, Г. Крамером и другими исследователями. Суть ее заключается в превышении марковским однородным по времени процессом высокого уровня. С такой ситуацией часто приходится сталкиваться в исследованиях по физике, радиотехнике, управлению производственными процессами. Возможные другие процессы при различных многократных одинаковых воздействиях, приводящих к поступающему на систему обслуживания потоку (суммирование, разряжение и др.), рассматривал И. Н. Коваленко.

Большой интерес вызвали так называемые потоки восстановления: события потока появляются через одинаково распределенные и независимые промежутки времени. Такого типа потоками занимались А. Я. Хинчин (потоки Пальма), Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев и др. В связи с рассмотрением теории надежности потоками отказов занимались многие исследователи как в плане статистических обработок наблюдений, так и с общетеоретических позиций. А. Д. Соловьевым, Б. В. Гнеденко и их учениками было доказано, что если длительность ремонта невелика по сравнению с длительностью безотказной работы каждого устройства (по вероятности), то длительность безотказной работы резервированной системы с восстановлением асимптотически экспоненциальна. В настоящее время эти результаты распространяются на системы массового обслуживания.

С точки зрения практических применений значительный интерес представляет изучение не только потока входящих требований, но и потока выходящих из системы требований — обслуженных, необслуженных, неполностью обслуженных и т. д. Например, когда работает автоматическая линия и деталь переходит от одного устройства к другому и после каждой операции отбрасываются бракованные, следует изучать потоки деталей, полностью прошедших обработку, отброшенных после операции определенного номера. Часто перед каждым обрабатывающим устройством устраивается накопитель, где собираются детали, которые не поступают немедленно на последующую обработку, поскольку последующее устройство занято предыдущей деталью. При таком положении дел следует изучать и поток деталей, попадающих в бункер. Все это нужно для рационального расчета автоматических линий,

чтобы на каждой операции было поставлено необходимое число обрабатывающих устройств, согласованы скорости работы каждого из устройств со скоростями других устройств, размеры накопителей были не слишком велики и не слишком малы и т. д. Н. В. Яровицкий рассмотрел однолинейные задачи с очередью. Оказалось, что рекуррентные входящие потоки становятся односвязно зависимыми. Теория входящих потоков в настоящее время находится еще на самой начальной стадии разработки.

Интересные исследования пространственных потоков начаты Р. В. Амбарцумяном в связи с изучением звездных скоплений. Некоторые результаты по пространственным потокам, в связи с изучением других вопросов (возникновение солнечных пятен, землетрясения, пожары и др.), были получены Ю. К. Беляевым и Б. В. Гнеденко.

Новые задачи теории массового обслуживания. Классические задачи теории, рассмотренные Эрлангом, составляют лишь часть более широкой проблематики. Советскими учеными рассмотрены вопросы, связанные с показаниями счетчиков Гейгера — Мюллера (Б. В. Гнеденко), системы обслуживания с разного рода ограничениями (И. Н. Коваленко, Б. В. Гнеденко, С. М. Броди и др.), например время пребывания требования в системе ограничено, время ожидания требованием начала обслуживания ограничено. Ограничивающие величины могут быть постоянными или случайными. И тот и другой случай представляет значительный практический интерес. Исследования по расчету запасников для автоматических линий, когда поступление деталей происходит в случайные моменты времени, выполнены Б. А. Севастьяновым и др.

Почти одновременно были начаты исследования систем массового обслуживания при большой загрузке И. Н. Коваленко (1960 г.), Ю. В. Прохоровым и Э. А. Самандровым (1962 г.), Ю. В. Прохоровым и О. А. Висковым (1964 г.). Они перекликаются со статьями Кингмэна и Мюллера, опубликованными в этот же период. Были выяснены закономерности увеличения очереди в системах с очередью распределения длительности ожидания. Оказалось, что в системах с потерями при большой загрузке для любого рекуррентного потока вероятность потери можно приближенно вычислить по формуле Эрланга.

Ряд изящных задач по обслуживанию неординарного потока требований рассмотрен А. А. Шахбазовым (1962 г.), Т. И. Насировой (1963 г.) и др. А. А. Шахбазов рассмотрел интересный для практики феномен: если система прекращает обслуживание, то ей требуется некоторое, вообще говоря, случайное время на «разогревание». В работах Г. П. Башарина большое внимание уделено изучению многокаскадных систем: доказаны предельные теоремы, вычислены таблицы и изучены схемы для постановки на машины расчетов. Ряд интересных задач о предельном поведении систем с большой нагрузкой и большим числом обслуживающих приборов рассмотрел А. А. Боровков. Им же изучены вероятностные закономерности «больших ожиданий» при обслуживании с очередью. Занимаясь вопросами сборки на конвейере, А. Е. Маргулис изучил поток пар: длительность ожидания деталью одного типа детали другого типа (этот же вопрос возникает при изучении проблемы

пассажир — такси, когда либо пассажир ждет такси, либо машина ждет пассажира).

Самым существенным кроме результатов решения конкретных задач является выработка методов исследования и расширение аналитического аппарата, который привлекается для решения теории массового обслуживания.

Много исследований по теории массового обслуживания, связанных с решением конкретных прикладных вопросов, выполнено методом статистических испытаний на электронных вычислительных машинах. Зачинателем этого направления исследований был Н. П. Бусленко. Интересные вопросы, связанные с телефонным делом, физикой, биологией и другими областями знания, были решены с помощью этого метода Г. П. Климовым, М. Шнепсом, А. Г. Алиевым, А. Е. Маргулисом и др.

Большое и важное направление исследований, которое в СССР представлено лишь небольшим количеством работ, составляет управление процессами массового обслуживания. К этому направлению относятся статьи Г. П. Климова, В. В. Рыкова, а также работы Е. В. Булинской по оптимальному управлению запасами.

Задачи теории надежности. Математические исследования в области теории надежности в СССР начались лишь в 50-х годах. К этому направлению относятся, в частности, исследования Т. П. Марьяновича по эффективности работы систем массового обслуживания с ненадежными приборами, подлежащими восстановлению. А. Д. Соловьеву принадлежат глубокие результаты по теории резервирования без восстановления. Теория резервирования с восстановлением привлекала многих исследователей, главным образом инженеров. Важные математические выводы об асимптотическом поведении основных характеристик работы резервированных систем с восстановлением получили А. Д. Соловьев, Б. В. Гнеденко и их ученики И. Мекке, А. Омар, Ю. Наср. Речь идет об асимптотическом поведении длительности безотказной работы при условии, что время восстановления мало по сравнению с временем безотказной работы отдельного устройства (или при иных условиях). Установлены важные для применений закономерности: асимптотическая независимость длительности безотказной работы системы от распределения времени восстановления, почти постоянство средней длительности безотказной работы системы и т. д. Эти исследования продолжаются. Некоторые из полученных результатов наводят на мысль о возможности широких обобщений.

И. Н. Коваленко изучает возможности использования асимптотических методов расчета надежности сложных систем. Этот круг идей представляет значительный интерес для практики, поскольку в настоящее время надежность компонентов сложных систем очень высока и их очень много (известны системы, состоящие из сотен тысяч и даже миллионов элементов). Попытки моделировать такие системы на электронных вычислительных машинах непосредственно не могут привести к правильным результатам за обозримые сроки даже при очень больших скоростях работы машин. Необходима предварительная работа

математика, позволяющая сократить время моделирования. Результаты И. Н. Коваленко как раз и дают такую возможность.

С вопросами резервирования в значительной степени связаны исследования В. С. Королюка о времени пребывания полумарковского процесса с конечным множеством состояний в данном состоянии. Эти исследования были продолжены С. М. Броди, О. Н. Власенко, а также рядом его учеников.

Своеобразный круг задач возникает в теории надежности в связи с определением оптимального режима профилактических работ, а также в связи с поиском неисправностей. В этом направлении выполнены интересные работы Ю. К. Беляевым, В. А. Каштановым и др. Б. В. Гнеденко предложил использовать идеи и результаты теории профилактических ремонтов для изучения важной проблемы психологии — определения оптимальной смены периодов напряженной работы и отдыха.

В теории надежности особую роль играют вопросы, связанные с разработкой теории испытаний на оценку надежности. Их исследованием занимались Ю. К. Беляев, Я. Б. Шор и др. Обзор и систематизация полученных результатов даны в монографиях Я. Б. Шора (1962 г.) и Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляева, А. Д. Соловьева (1965 г.). Исследования вопросов теории испытаний приводят к необходимости постановки новых статистических задач: оценка надежности многокомпонентных систем по испытаниям отдельных компонентов, оценка многопараметрических систем, введение понятия «доверительные множества» и др.

Большой и важный круг вопросов, связанных с обеспечением надежности изделий при изготовлении, относится к разработке методов приемочного контроля. Один из приемов такого рода был предложен А. Н. Колмогоровым и подвергнут затем дальнейшей теоретической разработке и практическим испытаниям С. Х. Сираждиновым, Ю. К. Беляевым, М. И. Эйдельмантом и др. Этот прием основан на рассмотрении несмещенных оценок. Большое внимание было уделено последующим оценкам качества партии по результатам ее контроля. Интересные исследования проводятся А. Н. Колмогоровым и Ю. К. Беляевым, а также М. И. Эйдельмантом по экономическим планам приемочного контроля, в которых учитываются как стоимость контрольных операций, так и потери от браковки партий и приемки бракованных изделий. Важные результаты получены ими также по указанию практически равномерно наилучших методов приемочного контроля.

Как известно, все изделия и материалы, которые используются промышленностью, стареют. Свойства стареющих элементов и расчет для них характеристик надежности изучает А. Д. Соловьев. Им получены важные результаты. С его работами перекликаются исследования Барлоу и Прошена (США). Интересные работы выполнены по исследованию вопросов, связанных с поддержанием надежности изделий, в частности Ю. К. Беляевым, И. А. Ушаковым, В. А. Каштановым, И. Б. Герцбахом — по оптимальным задачам поиска неисправностей, проведения профилактических осмотров и ремонтов.

Теоретико-вероятностные проблемы в физике, геофизике, технике и биологии. Задачи статистической физики, как отмечалось выше, служили источником постановок многих теоретико-вероятностных проблем. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин, отправляясь от задач физики, положили начало теории случайных процессов. А. Я. Хинчин видел основное назначение математики в строгом обосновании выводов, связанных с эргодическим принципом, в установлении общих закономерностей систем, обладающих большим числом степеней свободы, в разработке аналитического аппарата статистической физики. Именно этим вопросам посвящены три его монографии (1943, 1950, 1951 гг.), а также статьи, написанные на протяжении 25 лет. Для Хинчина задачи статистической физики были источником идей, приведших его к построению основ теории стационарных случайных процессов. Основным аналитическим аппаратом статистической механики Хинчин сделал предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, в особенности локальные теоремы с уточнениями.

Теория марковских случайных процессов уже в первый период развития была использована А. Н. Колмогоровым и М. А. Леонтовичем для решения вопросов теории броуновского движения. Л. С. Понтрягин, А. А. Андронов и А. А. Витт применили теорию марковских процессов в исследовании влияния случайных воздействий на нелинейные колебательные системы. Н. Н. Боголюбов и Н. М. Крылов, а позднее И. И. Гихман исследовали возникновение случайных процессов марковского типа под влиянием сил со спектром, переходящим в непрерывный. Они показали, что при этих условиях из уравнений механики материальной системы с помощью предельного перехода можно получить уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова. Полное образование этого перехода дано (1945 г.) Н. Н. Боголюбовым. Ему принадлежит (1946 г.) также вывод уравнений состояний реальных газов и жидкостей на основе классической модели взаимодействия между молекулами. Именно в разработке метода, позволяющего учитывать динамическое взаимодействие, и заключался успех исследования.

Дальнейшей разработкой математических методов статистической физики занимались Р. Л. Добрушин (1964, 1965, 1967 гг.), Р. А. Минлос (1967 г.), Я. Г. Синай (1967 г.) и др.

С различными задачами геофизики связаны многочисленные работы Е. Е. Слуцкого. Именно в этих задачах следует искать источники чисто математических его успехов в ряде направлений — введение понятия случайной функции, рассмотрение случайных стационарных функций с конечным спектром, введение операции скользящего суммирования и др. С геофизикой связаны также успехи советских исследователей в области турбулентного потока. Основы статистической теории турбулентности были заложены А. А. Фридманом и Л. В. Келлером еще в 1924 г.: ими предложен общий метод описания структуры турбулентности, а именно метод корреляции величин, характеризующих мгновенное состояние гидродинамического поля (скорость, давление) в различных точках потока. Более развернутое изложение этих идей содержится в статье Л. В. Келлера, опубликованной в 1925 г. Десять



М. Д. Миллионщиков.

лет спустя американский ученый Тейлор упростил подход Фридмана и Келлера для случая однородной и изотропной турбулентности, не упомянув, однако, имен своих предшественников в этом направлении. В 1939 г. почти одновременно Л. Г. Лойцянский и М. Д. Миллионщиков предложили решение задачи о затухании изотропной турбулентности в предположении равенства нулю третьих моментов.

Построение общей схемы механизма развитой турбулентности, а также уточнение основных понятий статистической теории турбулентного потока принадлежат (1941 г.) А. Н. Колмогорову. В качестве основных характеристик локальной структуры турбулентного потока он ввел средние значения квадрата продольной и попереч-

ной компонент разности компонент скоростей в двух близких точках потока. Идеи Колмогорова оказали решающее влияние на дальнейшее развитие теории турбулентности как в нашей стране, так и за рубежом. Предложенный им подход позволил найти ряд общих закономерностей и объяснить явления, не поддававшиеся ранее изучению. Значительный вклад в развитие статистической теории турбулентного потока внесли А. М. Обухов, А. С. Монин, А. М. Яглом, М. И. Юдин, В. А. Красильников и многие другие. Их работы сыграли важную роль в создании теории стационарных случайных полей.

Интенсивное развитие техники, естественно, потребовало серьезного изменения и расширения использовавшегося в ней математического аппарата. Автоматические системы и радиотехника были теми основными направлениями, в которых математические методы получали новые сферы применения и новые стимулы для своего совершенствования. В этих областях технического прогресса большую роль играют методы учета случайных воздействий. Так, в связи особое значение имеет разделение сигнала и шума, для управления технологическими процессами необходимы методы оптимального управления при наличии случайных воздействий, для расчета правил стрельбы необходимо научиться так использовать всегда имеющееся случайное рассеивание, чтобы добиться максимальной эффективности стрельбы. Само собой разумеется, что потребность в теоретико-вероятностном подходе при анализе и расчете технических систем возникает и в других областях техники. Например, при расчете энергосистем, загрузки электрических сетей (промышленных, городских и сельских) все в большей мере приходится прибегать к теоретико-вероятностным представлениям и приемам. И причина этого не в том, что из-за нашего незнания мы используем теоретико-вероятностные приемы, а в том, что любую техническую систему приходится использовать в разных условиях работы. Качество же исполнения зависит от этих условий. В процессе работы на

систему оказывают влияние неучитываемые внешние воздействия. Например, отлетка цели на индукторе радиолокационной станции вследствие фединга и подобных иных явлений подвержена случайным воздействиям. Потребляемая мощность группой токоприемников, подсоединенных к фидеру на том или ином промышленном предприятии, подвержена случайным изменениям не только в силу изменений в технологическом режиме, но и в силу ряда иных причин, которые полностью учесть невозможно: изменение плотности обрабатываемых материалов, непрерывное изменение физических или химических свойств среды, незначительные тепловые колебания, изменение свойств режущего инструмента и др. Все эти обстоятельства в настоящее время достаточно хорошо изучены, и техники стремятся использовать имеющийся аппарат теории вероятностей. Одновременно протекает и другой процесс — разработка нового математического аппарата для анализа и точного описания явлений и процессов нового типа.



М. С. Пинскер.

Рассмотрим некоторые работы этого направления. В. С. Пугачев систематически приспосабливал методы теории стационарных случайных процессов для исследования проблем автоматизации. Он разработал метод канонических представлений. Задачи автоматического управления сложными системами выдвинули в качестве одной из основных проблему передачи информации, оптимального ее кодирования и расчета необходимой ее избыточности для передачи сообщений в условиях воздействия сильных шумов. Важные результаты в этой новой области исследований получены А. Я. Хинчиным, А. Н. Колмогоровым и И. М. Гельфандом, Р. Л. Добрушиным, М. С. Пинскером и многими другими. Теория управляемых случайных процессов начала разрабатываться в значительной мере в связи с исследованием задач управления производственными процессами. Одной из таких задач является текущий контроль качества продукции. Вопрос состоит в следующем. Технологический процесс в силу ряда причин, большинство из которых учесть невозможно, разлагается и качество изготавливаемой продукции ухудшается. Требуется установить, когда необходимо произвести подналадку, т. е. вмешаться в управление производственными процессами, чтобы поддерживать производство на необходимом уровне качества. Теорией управляемых процессов занимается А. Н. Ширяев. Ряд работ в этом направлении принадлежит Ю. В. Прохорову, Б. И. Григелионису, И. В. Гирсанову и др.

Одним из весьма перспективных направлений использования теории вероятностей является биология. На протяжении последних лет именно исследования биологических вопросов неоднократно приводили

к развитию теории вероятностей, ее методов. Развитие теории случайных процессов и теории цепей Маркова в значительной степени стимулировалось исследованиями динамики популяций. Изучение математических вопросов генетики приводило к интересным математическим работам, с одной стороны, и к выдающимся биологическим открытиям — с другой. Несомненно, что биологические проблемы являются неисчерпаемым источником теоретико-вероятностных и статистических исследований. Наибольшие перспективы для появления новых ветвей теории вероятностей открывает изучение высшей нервной деятельности, в том числе проблемы распознавания образов.

В СССР развитие теоретико-вероятностных исследований в биологии достигло расцвета в 30-е годы, когда в самой тесной связи работали многие выдающиеся математики (А. Н. Колмогоров, В. И. Гливенко и др.) и биологи (Н. Д. Баранов, А. А. Серебровский, Н. П. Дубинин и др.). В этот период был решен ряд вопросов теории эволюции, генетики, сосуществования двух видов — хищников и жертв и др.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ЧИСЛЕННЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

Введение

Приближенные и численные методы существуют в математике с самого ее возникновения. В разработке этих методов принимали участие крупнейшие ученые. С именами Ньютона, Эйлера, Лобачевского, Гаусса и других выдающихся ученых связаны хорошо известные и широко применяющиеся в численном анализе способы приближенного решения уравнений, интерполирования и численного интегрирования функций.

Значительное место занимают приближенные и численные методы в исследованиях математиков дореволюционной России. Особенно это относится к выдающимся представителям петербургской математической школы, прежде всего к П. Л. Чебышеву и его последователям.

Развитию теории приближенных методов в известной мере способствовали исследования, проводившиеся в отдельных областях естествознания, для выполнения которых потребовалось построение способов решения ряда конкретных задач. Поэтому наряду с математиками важный вклад в разработку приближенных и численных методов внесли ученые смежных специальностей (Б. Г. Галеркин, С. А. Чаплыгин и др.).

Большое внимание приближенным и численным методам уделяли и уделяют крупнейшие советские математики. В числе наиболее выдающихся ученых старшего поколения, имеющих непосредственное отношение к рассматриваемому направлению математики, можно назвать А. А. Маркова, В. А. Стеклова, А. Н. Крылова, С. А. Чаплыгина, Н. М. Крылова, С. Н. Бернштейна и др.

Работы А. А. Маркова по приближенным методам относятся к теории наилучших приближений. Основные научные исследования В. А. Стеклова связаны с уравнениями математической физики. Приближенному анализу посвящены его работы по теории приближения функций и механическим квадратурам. А. Н. Крылов создал и усовершенствовал приближенные методы по улучшению сходимости тригонометрических рядов, численному и механическому интегрированию

дифференциальных уравнений, механическим квадратурам, решению векового уравнения и др. Он много сделал для пропаганды значения исследований в области приближенных и численных методов. В работах С. Н. Бернштейна решаются многие актуальные и трудные вопросы, относящиеся к различным областям анализа. Большой цикл исследований С. Н. Бернштейна посвящен теории приближения функций, и в частности теории наилучшего приближения, восходящей к знаменитым работам П. Л. Чебышева.

Теория приближения функций — одна из больших ветвей классического анализа, не только играющая большую общематематическую роль, но и имеющая принципиальное значение в теории численных методов. Эта теория получила дальнейшее развитие в работах А. Н. Колмогорова, С. М. Никольского, Н. И. Ахиезера, Е. Я. Ремеза и др.

Несколько позднее начала разрабатываться теория приближений функций комплексного переменного. Первые фундаментальные результаты по проблеме равномерного приближения многочленами и рациональными функциями были получены М. А. Лаврентьевым, М. В. Келдышем, С. Н. Мергеляном. Теория приближений функций комплексного переменного в основных чертах развивалась по тем же направлениям, что и теория функций действительного переменного, в частности, выяснялись возможности приближения функций тех или иных классов многочленами, рациональными и некоторыми другими конкретными видами функций, строились методы приближения функций с получением оценок близости приближений, устанавливались различные оценки и асимптотические равенства. Важное место в теории функций комплексного переменного занимают конформные отображения, находящие многочисленные приложения в прикладных науках, развитие которых часто требовало создания эффективных приближенных методов конформных отображений. В построении таких методов принимали участие М. А. Лаврентьев, Л. В. Канторович, В. И. Крылов, П. В. Мелентьев и др.

Исследования по приближенным и численным методам решения уравнений охватывали задачи по построению новых способов, усовершенствованию и видоизменению известных методов, изучению сходимости и точности приближенных методов и др. Ввиду недостаточного уровня выполнения вычислительных работ в начальный период исследования в области вычислительной математики велись преимущественно в направлении разработки методики вычислений, обеспечивающей минимальную затрату времени и труда на получение результатов, как правило, с невысокой точностью, развития номографии и разработки некоторых графических методов решения. Потребность в решении сложных задач практики обусловила развитие вычислительной техники. С созданием быстродействующих вычислительных машин численные методы стали эффективным средством решения сложных задач, что стимулировало дальнейшую разработку этих методов, а также привело к переоценке существовавших методов и установлению их новых свойств, в частности к выяснению устойчивости численных методов относительно ошибок округления и входных данных. К наиболее распространен-



Научный семинар акад. АН БССР В. И. Крылова.

ным задачам, широко применяющимся в различных областях математики и во многих прикладных науках, относятся задачи линейной алгебры и алгебраических уравнений.

Очень удобны и просты при численной реализации итерационные методы. Они весьма разнообразны по идее построения и во многих случаях обладают большой универсальностью. Одними из первых работ по итерационным методам решения линейных алгебраических систем, выполненных в нашей стране, были работы Ф. С. Черепкова (1936 г.), В. К. Иванова (1939 г.), В. П. Зылева (1939 г.). Способы улучшения сходимости методов последовательных приближений при решении линейных систем были предложены Л. А. Люстерником (1947, 1956 гг.), А. А. Абрамовым (1950 г.), М. К. Гавуриным (1950 г.) и др. Влияние ошибок правых частей и ошибок округления на решение исследовалось М. М. Лаврентьевым (1953, 1954 гг.), А. А. Абрамовым (1954 г.) и др. Вслед за работами П. Ф. Папковича (1930 г.) и А. Н. Крылова (1931 г.), посвященными решению векового уравнения, появились исследования по различным вопросам полной и частичной проблемы собственных значений (С. А. Гершгорин, 1931 г.; Ф. Р. Гантмахер, 1936 г.; Д. К. Фаддеев, 1937 г.; А. М. Данилевский, 1937 г.; В. Н. Кублановская, 1961 г.; В. В. Воеводин, 1962 г. и др.). Градиентным методам решения задач линейной алгебры посвящены работы Л. В. Канторовича (1947, 1948 гг.), М. Ш. Бирмана (1950 г.), М. А. Красносельского и С. Г. Крейна (1952 г.). Один из труднейших вопросов линейной алгебры — решение плохо обусловленных систем уравнений — исследовался А. Н. Тихоновым (1965 г.) и В. Н. Фаддеевой (1965 г.).

В работах, посвященных приближенным и численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений, разрабатываются



М. К. Гавурин.

различные аналитические и конечно-разностные методы решения, получаются оценки решения, оценки и асимптотика погрешностей, выясняются условия устойчивости разностных аппроксимаций и т. п. Разностные методы изучались в основном в направлении выяснения возможностей применения классических методов при решении задач на быстродействующих вычислительных машинах, видоизменения их и построения некоторых обобщений. Большой цикл работ по созданию однородных разностных схем для дифференциальных уравнений с гладкими и разрывными коэффициентами выполнен (1958—1963 гг.) А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским. Важные результаты получены советскими математиками по решению краевых задач для систем обыкновенных дифферен-

циальных уравнений, в частности по методу прогонки.

Обширную область математики составляют приближенные и численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. Большое количество исследований выполнено в нашей стране по вариационным и другим аналогичным им методам (методу Рунге, Галеркина, методу моментов и др.), которые, ввиду их общности, применимы не только к уравнениям в частных производных, но и к решению задач в других областях математики. В этом направлении проведены циклы исследований Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым, С. Г. Михлиным и др. Метод сеток для уравнений в частных производных систематически начал разрабатываться в 30-е годы XX в. К числу первых исследований в этой области относятся работы С. А. Гершгорина (1930 г.), Л. А. Люстерника (1934 г.), Д. Ю. Панова (1932, 1933 гг.), И. Г. Петровского (1941 г.) и др. С появлением быстродействующих вычислительных машин этому методу начали уделять большее внимание, особенно в случае многомерных задач (Н. Н. Яненко, А. А. Самарский, С. К. Годунов, Г. И. Марчук и др.). Изучались вопросы устойчивости, сходимости разностных аппроксимаций и погрешности.

Наряду с методом сеток широкое распространение получают методы, позволяющие сводить многомерные задачи к задачам меньшей размерности. К ним относятся: метод, предложенный в 1933 г. Л. В. Канторовичем, метод прямых (гиперплоскостей), первые работы о котором в нашей стране были выполнены М. Г. Слободянским (1939—1940 гг.), метод интегральных соотношений, предложенный в 50-х годах А. А. Дородницыным, и некоторые другие. Исследованию этих методов посвящено значительное количество работ, в которых выясняются сходимость и оценки их погрешностей. Большое количество исследований посвящено развитию методов решения различных прикладных задач, связанных с численным решением дифференциальных уравнений.

Известные результаты достигнуты в развитии вычислительных методов вариационного исчисления, оптимального управления и отыскания экстремума функций (Л. В. Канторович, 1933—1948 гг.; С. Г. Михлин, 1948 г.; Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, 1961 г.; и др.).

Наиболее распространенными методами решения интегральных уравнений второго рода являются методы, сводящие нахождение приближенного решения интегрального уравнения либо к решению систем линейных или нелинейных алгебраических уравнений, либо к решению систем трансцендентных уравнений. Вид этих систем зависит, разумеется, от способа их получения и вида интегрального уравнения. При решении полученных систем в большинстве случаев используются итерационные методы. Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений иногда сводится к решению последовательности некоторых линейных интегральных уравнений. При переходе от интегрального уравнения к указанной выше системе уравнений для вычисления интегрального члена широко применяются квадратурные формулы. В зависимости от свойств ядра (гладкости, наличия особенностей) пользуются теми или иными формулами (Л. В. Канторович, 1934—1936 гг.; В. И. Крылов, 1936 г.; Н. К. Артмеладзе, 1944 г.; Н. М. Коробов, 1959—1962 гг.; и др.).

В 1952 г. Ю. Д. Соколов предложил метод усреднения для решения интегральных уравнений. Позднее были получены различные варианты этого метода и его начали применять к решению некоторых видов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, а также к приближенному решению нелинейных операторных уравнений. Изучению ошибок при численном решении интегральных уравнений посвящен ряд работ И. П. Мысовских.

Приближенные методы решения интегральных уравнений первого рода начали разрабатываться значительно позднее. При разработке приближенных методов решения таких уравнений, являющихся наиболее типичным видом некорректных задач, фундаментальные результаты получены А. Н. Тихоновым, В. К. Ивановым, М. М. Лаврентьевым и др.

Приближенное вычисление интегралов также относится к числу распространенных в приложениях задач. Одним из широко применяющихся методов численного интегрирования является метод механических квадратур, изучение которого в нашей стране было начато П. Л. Чебышевым, В. А. Стекловым (1917 г.), Н. М. Крыловым (1919 г.) и успешно продолжено многими советскими математиками.

В задаче однократного интегрирования исследовалось построение квадратурных формул, точных для некоторой заранее выбранной системы функций, и формул с наименьшей оценкой остатка, выяснялись условия сходимости квадратурных процессов и получения оценок остаточных членов, а также другие вопросы (С. М. Никольский, 1950 г.; Ш. Е. Микеладзе, 1937—1956 гг.; В. И. Крылов, 1954—1959 гг.; и др.).

Несколько кубатурных формул для конкретных областей построили Л. А. Люстерник и В. А. Диткин (1948 г.), И. П. Мысовских (1963 г.)



В. А. Диткин.

и др. Задача вычисления интегралов от функций из некоторых классов, инвариантных относительно вращения пространства, рассматривалась (1962 г.) С. Л. Соболевым.

Применению теоретико-численных методов к вопросам численного интегрирования посвящено несколько работ Н. М. Коробова (1957—1963 гг.), Н. С. Бахвалова (1959—1963 гг.) и др. Советскими математиками выполнены исследования по применению метода Монте-Карло к задаче численного интегрирования. Предложено несколько методов приближенного вычисления бесконечномерных и континуальных интегралов.

Теория приближенных методов решения операторных уравнений развивалась, с одной стороны, в связи с необходимостью приближенного решения бо-

лее сложных задач, систематизации и единой трактовки многих методов, полученных в результате предшествующего развития приближенных методов классического анализа, с другой стороны, в связи с бурным развитием функционального анализа и необходимостью усиления его связи с теорией приближенных методов. Большая заслуга в разработке этих методов принадлежит советским математикам. Наиболее изученным и часто применяющимся на практике методом решения нелинейных уравнений является метод Ньютона, впервые исследованный для операторных уравнений Л. В. Канторовичем (1948 г.). Несколько раньше (1945—1947 гг.) Канторович предложил один из градиентных методов решения операторных уравнений — метод наискорейшего спуска. Впоследствии были построены различные варианты этих методов, предложены и исследованы методы, близкие к методам Ньютона и наискорейшего спуска. В разработке общей теории приближенных методов принимали участие также М. А. Красносельский, С. Л. Соболев, Г. С. Салехов, С. Г. Крейн и др. Существенное влияние на развитие теории приближенных и численных методов решения задач оказывает функциональный анализ. Его идеи и методы широко применяются при построении их, исследовании и формулировке.

Рассмотрим результаты, полученные советскими математиками в области приближенных и численных методов.

Метод сеток

Большинство задач, возникающих в физике и технике, связано с линейными и нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных (уравнениями математической физики). Поэтому центр тяжести в развитии численных методов в послед-

ние годы переносится на задачи математической физики. Универсальным и чрезвычайно эффективным методом решения этих задач оказался метод конечных разностей — метод сеток, позволяющий сводить приближенное решение нелинейных уравнений в частных производных к решению системы конечного порядка линейных алгебраических уравнений. Назовем лишь некоторые области, в которых с успехом применяется метод конечных разностей: расчет потенциальных полей различной физической природы (в простейшем случае задачи приводят к уравнению Лапласа), нестационарные линейные и нелинейные процессы теплопроводности в неоднородных средах, задачи газодинамики и магнитной гидродинамики, ядерной энергетики (например, расчет критического режима ядерного реактора), физики плазмы, метеорологии, статистические задачи теории упругости, задачи электродинамики, фильтрации.

Даже простейшие постановки большинства из перечисленных выше задач приводят к системам уравнений в частных производных. Решение столь сложных задач стало возможным лишь благодаря созданию ЭВМ, а также больших научных коллективов ученых, владеющих как искусством математической постановки прикладных задач, так и методами современной вычислительной математики.

Разностные аппроксимации используются в теории дифференциальных уравнений в качестве средства доказательства теорем существования. Именно такой смысл имеет часто употребляемое выражение «задача решена методом конечных разностей». При доказательстве разрешимости используются лишь асимптотические свойства разностных схем. Вопрос об алгоритме решения разностной задачи вообще не возникает. В вычислительной математике выражение «решить задачу методом конечных разностей» имеет другой смысл, оно означает, что указан алгоритм, позволяющий за конечное число действий найти приближенное решение задачи с заданной точностью. Этим определяется и новая проблематика теоретических исследований разностных методов.

Вычислительная практика привела к постановке ряда специфических проблем, таких, как 1) изучение устойчивости и точности численных методов, 2) создание универсальных алгоритмов, пригодных для решения на ЭВМ больших классов задач по стандартным программам, 3) оптимизация алгоритмов, т. е. выбор алгоритмов, позволяющих найти приближенное решение с заданной точностью ε при минимальной затрате машинного времени (при минимуме числа арифметических и логических операций $Q(\varepsilon)$).

Вопрос о минимизации числа действий (об экономичности алгоритмов) имеет принципиальное значение в связи с численным решением двумерных и трехмерных задач математической физики, таких, например, как задачи газовой динамики, магнитной гидродинамики, теории гетерогенных ядерных реакторов.

В последние 10—15 лет заметно увеличился удельный вес теоретических исследований в огромном потоке работ, посвященных применению разностных методов. Однако в целом развитие теории разност-

ных схем отстает от потребностей вычислительной практики. Это прежде всего относится к нелинейным задачам математической физики (например, к задачам газодинамики), для которых построены и широко применяются на практике различные разностные методы. Однако в большинстве случаев до сих пор нет полного теоретического обоснования этих методов.

В таком небольшом очерке, как наш, не представляется возможным дать даже краткий перечень работ советских математиков, посвященных различным вопросам, связанным с применением и теорией численных методов. Наибольшее внимание в очерке уделяется вопросам, связанным с теорией разностных схем для классических уравнений математической физики второго порядка (в основном для эллиптических и параболических уравнений) и характеристикой некоторых важных направлений развития теории разностных схем. Поэтому упоминание или неупоминание нами тех или иных исследований не должно трактоваться как попытка оценки.

К настоящему времени разработано много разностных методов, позволяющих решать сложнейшие задачи математической физики, решение которых практически невозможно другими методами. Решение этих задач имеет большое значение не столько с точки зрения демонстрации возможностей разностных методов, сколько с точки зрения приложений. Поэтому мы на них не останавливаемся. Мы не касаемся также вопросов, связанных с применением разностных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

1

Общие вопросы теории разностных схем

Метод конечных разностей (называющийся также методом сеток) для решения дифференциальных уравнений состоит в следующем¹.

Пусть в области G с границей Γ требуется найти решение дифференциального уравнения

$$Lu = f(x), \quad x \in G, \quad (1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$lu = \mu(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

где f и μ — заданные функции (входные данные задачи). Область $G + \Gamma$ непрерывного изменения независимых переменных заменяется дискретным множеством точек (узлов), называемым сеткой. Плотность расположения узлов сетки характеризуется параметром или группой параметров h ($h > 0$). Чем меньше h (шаг сетки), тем гуще сетка ω_h .

¹ А. Ф. Филиппов. Об устойчивости разностных уравнений. — ДАН СССР, 1955, т. 100, № 6, стр. 1045—1048. В. С. Рябенский и А. Ф. Филиппов. Об устойчивости разностных уравнений. Гостехиздат, М., 1956, 171 с.

Производные, входящие в (1) и (2), заменяются (аппроксимируются) с помощью соответствующих разностных отношений. В результате получается задача (разностная схема)

$$L_h y^h = \varphi^h, \quad x \in \overset{0}{\omega_h}, \quad l_h y^h = \chi^h, \quad x \in \gamma_h, \quad (3)$$

где L_h и l_h — операторы, действующие на сеточные функции y^h , заданные для $x \in \overset{0}{\omega_h} = \overset{0}{\omega_h} + \gamma_h$ ($\overset{0}{\omega_h}$ — внутренние, γ_h — граничные узлы).

Решение y^h разностной задачи (3) есть сеточная функция, заданная в узлах сетки $\overset{0}{\omega_h}$. Меняя h , т. е. выбирая различные сетки $\overset{0}{\omega_h}$, получаем последовательность $\{y^h\}$, зависящую от параметра h . Таким образом, следует рассматривать семейство схем (3_h) , соответствующих различным значениям параметра h . Естественно возникают вопросы о 1) разрешимости разностной задачи при любых допустимых входных данных φ^h и χ^h , 2) характере зависимости y^h от входных данных, 3) сходимости $\{y^h\}$ к решению исходной задачи при $h \rightarrow 0$ и скорости сходимости (о порядке точности). Все эти вопросы являются программой-минимумом любого исследования по теории разностных схем.

Пусть U, F — классы функций, определенных в области $G + \Gamma$, Φ — класс функций, определенных на Γ , так что $Lu \in F, lu \in \Phi$, если

$$u \in U, \quad \|u\|_U = \|u\|_{(1)}, \quad \|u\|_F = \|u\|_{(2)}, \quad \|u\|_\Phi = \|u\|_{(3)}$$

являются соответствующими нормами. Обозначим U_h, F_h, Φ_h соответствующие классы сеточных функций с нормами $\|y\|_{(1_h)}, \|y\|_{(2_h)}, \|y\|_{(3_h)}$, так что $L_h y \in F_h, l_h y \in \Phi_h$, если $y \in U_h$. Предполагается, что нормы согласованы, т. е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathcal{P}_\alpha^h u\|_{(\alpha_h)} = \|u\|_{(\alpha)}, \quad u \in U \text{ при } \alpha = 1, \quad u \in F \text{ при } \alpha = 2,$$

$$u \in \Phi \text{ при } \alpha = 3,$$

где $\mathcal{P}_1^h, \mathcal{P}_2^h, \mathcal{P}_3^h$ — операторы, отображающие соответственно U на U_h , F на F_h , Φ на Φ_h .

После того как введены сеточные пространства, определяются понятия аппроксимации, сходимости, точности и корректности схем.

Погрешность разностной схемы (3) характеризуется числом $\|y^h - \mathcal{P}_1^h u\|_{(1_h)}$, где u — решение задачи (1), (2). Если $\|y^h - \mathcal{P}_1^h u\|_{(1_h)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то схема (3) сходится; если $\|y^h - \mathcal{P}_1^h u\|_{(1_h)} = O(h^k)$, то схема (3) имеет точность порядка k (сходится со скоростью $O(h^k)$). Подставляя $y^h = \mathcal{P}_1^h u + z^h$ в (3), получаем для погрешности z^h условия

$$L_h z^h = \psi^h, \quad l_h z^h = v^h, \quad (4)$$

где

$$\psi^h = \varphi^h - L_h(\mathcal{P}_1^h u) = (\varphi^h - L_h(\mathcal{P}_1^h u)) - \mathcal{P}_2^h(f - Lu),$$

$$\psi^h \in F_h, \quad v^h = \chi^h - l_h(\mathcal{P}_1^h u) = (\chi^h - l_h \mathcal{P}_1^h u) - \mathcal{P}_3^h(\mu - lu), \quad v^h \in \Phi_h,$$

являются погрешностями разностной аппроксимации уравнения (1) и граничного условия (2) схемой (3) на решении задачи (1), (2). Если

$$\|\psi^h\|_{(2h)} = O(h^k), \quad \|v^h\|_{(3h)} = O(h^k), \quad k > 0,$$

то говорят, что схема (3) аппроксимирует задачу (1), (2) на ее решении с k -м порядком (сходится со скоростью $O(h^k)$). При построении разностных схем обычно оценивают отдельно погрешности разностных аппроксимаций L , l и правых частей на достаточно гладких функциях. Однако в конечном счете точность метода определяется аппроксимацией $Lu - f$ и $lu - \mu$ на решении исходной задачи.

Одним из основных понятий теории разностных схем является понятие устойчивости, возникшее в результате анализа результатов вычислений. На необходимость введения такого понятия, по-видимому, впервые обратил внимание Нейман (1950 г.), как это следует из статьи О'Брайена, Хаймана и Каплана (1951 г.). Однако четкие формулировки понятия устойчивости как аналога корректности для дифференциальных уравнений и теоремы о том, что из устойчивости и аппроксимации следует сходимость, впервые даны советскими математиками В. С. Рябенским (1952 г.), А. Ф. Филипповым (1955 г.). Подробно эти результаты изложены в монографии (1956 г.) Рябенского и Филиппова. Вопрос об устойчивости разностных схем рассматривал (1954 г.) также Н. Н. Мейман. Приведем сначала определение корректности разностной схемы, следуя в основном работе (1955 г.) А. Ф. Филиппова.

Разностная схема (3) корректна (поставлена корректно), если при достаточно малом h 1) решение y^h задачи (3) существует и определено однозначно при любых входных данных φ^h и χ^h , 2) решение y^h непрерывно зависит от входных данных, причем эта непрерывная зависимость равномерна по h ; иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, не зависящее от h при $0 < h < h_0$, что из соотношений

$$\|\varphi^h - \tilde{\varphi}^h\|_{(2h)} < \delta, \quad \|\chi^h - \tilde{\chi}^h\|_{(3h)} < \delta, \quad h < h_0,$$

следует неравенство

$$\|y^h - \tilde{y}^h\|_{(1h)} < \varepsilon,$$

где y^h — решение задачи (3), а $\tilde{y}^h$ — решение этой же задачи с данными $\tilde{\varphi}^h$, $\tilde{\chi}^h$.

Это свойство непрерывной зависимости решения задачи (3) относительно входных данных и называют устойчивостью схемы (3). Если L_h и l_h — линейные операторы, то приведенное выше определение устойчивости эквивалентно такому определению: схема (3) устойчива, если при любых φ^h , χ^h и $0 < h < h_0$ для решения задачи (3) справедлива оценка

$$\|y^h\|_{(1h)} \leq M_1 \|\varphi^h\|_{(2h)} + M_2 \|\chi^h\|_{(3h)}, \quad (5)$$

где M_1 и M_2 — положительные постоянные, не зависящие от h , φ^h и χ^h .

Если схема (3) корректна, то отсюда и из (4) следует оценка для погрешности $z^h = y^h - \mathcal{P}_1^h u$

$$\|z^h\|_{(1h)} = \|y^h - \mathcal{P}_1^h u\|_{(1h)} \leq M_1 \|\psi^h\|_{(2h)} + M_2 \|v^h\|_{(3h)}. \quad (6)$$

Таким образом, верна теорема: из устойчивости и аппроксимации следует сходимость схемы, причем порядок точности определяется порядком аппроксимации. Отсюда следует, что порядки аппроксимации уравнения и граничных условий должны быть согласованы.

В общем случае задается не одно граничное условие (2), а группа дополнительных условий $l_i u = \mu_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Если (1) — уравнение параболического или гиперболического типа, то среди дополнительных условий есть начальные условия, например при $t = 0$. Хотя устойчивость по начальным данным учитывается указанным выше определением, однако вопрос об устойчивости нестационарных (эволюционных) схем целесообразно рассматривать отдельно, выделяя аргумент t .

Пусть $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots\}$ — сетка с шагом τ по переменному t , а $\omega_h = \{x_i\}$ — сетка по остальным переменным $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $h = (h_1, \dots, h_p)$ — набор шагов h_α по переменным x_α , $\|h\|^2 = h_1^2 + \dots + h_p^2$. Обычно рассматриваются разностные схемы, связывающие значения сеточной функции для двух, трех и более значений $t = j\tau$ (двухслойные, трехслойные и т. д.). Простейшей является двухслойная схема ($y^j = y(x, t_j)$, $x \in \omega_h$):

$$By^{j+1} = Cy^j + \tau\varphi^j, \quad (7)$$

где $B = B(x, h, \tau; t)$ и $C = C(x, h, \tau; t)$ — разностные операторы (матрицы). Ее можно записать в одной из канонических форм:

$$y^{j+1} = Sy^j + \tau\tilde{\varphi}^j \quad (\tilde{\varphi} = B^{-1}\varphi, \quad S = B^{-1}C), \quad (8)$$

$$B \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + Ay^j = \varphi^j \quad \left(A = \frac{B - C}{\tau}\right), \quad (9)$$

где S — оператор перехода со слоя на слой.

Дадим схематическое определение устойчивости по правой части и начальным данным двухслойной схемы, не претендуя на его общность. Пусть $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(1*)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ — нормы на линейном множестве H_h сеточных функций от $x \in \omega_h$, удовлетворяющих однородным условиям на границе γ_h сетки ω_h . Операторы B и C предполагаются линейными.

Схема (9) устойчива по правой части и начальным данным, если при достаточно малых $\tau \leq \tau_0$ и $|h| \leq h_0$ существуют такие положительные постоянные M_1 и M_2 , не зависящие от h , τ и выбора y^0 , φ^j , что для решения уравнения (9) при любых y^0 и φ^j верна оценка

$$\|y^j\|_{(1)} \leq M_1 \|y^0\|_{(1*)} + M_2 \max_{1 \leq j' < j} \|\varphi^{j'}\|_{(2)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Если $\varphi = 0$, то это неравенство выражает устойчивость по начальным данным; полагая $y^0 = y(x, 0) = 0$, получаем условие устойчивости по

правой части. Подставляя $y^j = z^j + \mathcal{P}_1^h u^j$, где y^j — решение уравнения (9), u — решение исходной задачи, получаем для погрешности z^j уравнение (9) с правой частью ψ^j , являющейся погрешностью аппроксимации схемы. Если схема (9) устойчива по правой части и $y^0 = u(x, 0)$, $x \in \omega_h$, то

$$\|z^j\|_{(1)} = \|y^j - (\mathcal{P}_1^h u)^j\|_{(1)} \leq M_2 \max_{0 \leq j' < j} \|\psi^{j'}\|_2, \quad (11)$$

т. е. из устойчивости и аппроксимации следует сходимость схемы.

Вопрос об устойчивости эволюционных схем по начальным данным рассматривался В. С. Рябеньким (1952 г.). Им определено понятие устойчивости в теории разностных уравнений как естественный аналог понятия корректности задачи Коши в теории уравнений в частных производных. Устойчивость рассматривалась как некоторое свойство семейства разностных уравнений, зависящего от шага сетки. Схема называлась устойчивой по начальным данным, если выполнено неравенство

$$\|y^j\|_{(1)} \leq M \|y^0\|_{(1*)}, \quad (12)$$

где M не зависит от шага сетки, а $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(1*)}$ — нормы в пространстве сеточных вектор-функций от x . В кандидатской диссертации (1952 г.) В. С. Рябенького указаны необходимые и достаточные спектральные признаки устойчивости схем для гиперболических и параболических по И. Г. Петровскому систем дифференциальных уравнений (с коэффициентами, зависящими только от t). А. Ф. Филиппов показал (1955 г.), что из устойчивости по начальным данным следует устойчивость по правой части.

Достаточные признаки устойчивости для самосопряженных задач с помощью метода разделения переменных получены А. Ф. Филипповым, В. С. Рябеньким, С. К. Годуновым, А. И. Жуковым и др. Предложенное Нейманом определение устойчивости распространено на случай несамосопряженных одномерных граничных задач с двумя боковыми границами $x = a$ и $x = b$ К. И. Бабенко и И. М. Гельфандом (доклад на II Всесоюзной конференции по функциональному анализу, 1956 г.). В 1962 г. С. К. Годунов и В. С. Рябенький ввели понятие спектра семейства операторов, зависящих от шага сетки, и доказали, что расположение спектра оператора внутри единичного круга необходимо для устойчивости в смысле (12).

Практические применения спектрального метода исследования устойчивости относились в основном к уравнениям с постоянными коэффициентами. Устойчивость доказывалась в норме $L_2(\omega_h)$. Вопрос о равномерной устойчивости (в норме $C(\omega_h)$) рассматривался С. И. Сердюковой (1963 г.). Пользуясь разностной функцией Грина для задачи Коши, она нашла достаточные условия устойчивости по начальным условиям для двухслойных схем с постоянными коэффициентами.

В течение длительного времени существовало мнение, что достаточно установить критерии устойчивости схем для уравнений с постоянными коэффициентами, для суждения же об устойчивости схем, соответствующих уравнениям с переменными коэффициентами,

можно пользоваться принципом замороженных коэффициентов, высказанным (1950 г.) Нейманом и Рихтмайером. Этот принцип состоит в следующем. Схема считается устойчивой, если устойчивы схемы с постоянными коэффициентами, построенные по заданной схеме для всех возможных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, совпадающими со значениями коэффициентов данного уравнения в точках (x, t) области его задания. Хотя этот принцип и носил характер гипотезы, однако он широко использовался в качестве практического критерия многими исследователями. А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским (1961 г.) построен пример схемы для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

которая безусловно устойчива в случае непрерывных $k(x)$ и неустойчива (при любых h и τ) в классе кусочно-непрерывных коэффициентов $k(x)$.

И. В. Коновальцев построил (1965 г.) пример схемы

$$y_{i+1} = 2a_i y_i - y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad |a_i| \leq \alpha < 1,$$

устойчивой в случае постоянных коэффициентов и неустойчивой в классе непрерывных коэффициентов $a(x)$ (если модуль непрерывности $\omega(x)$ функции $a(x)$ удовлетворяет условию $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\omega(x)}{x} = \infty$).

Приведенные примеры показывают, что принцип замороженных коэффициентов, вообще говоря, неверен. Необходимо определить область его применимости. С другой стороны, следует признать, что при изучении вопроса об устойчивости сложных систем уравнений с переменными коэффициентами, например уравнений газодинамики, принцип замороженных коэффициентов оказывается полезным в качестве необходимого признака устойчивости и позволяет отбросить заведомо неустойчивые схемы. Эффективным методом исследования схем для линейных уравнений математической физики с переменными коэффициентами является энергетический метод.

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, сделаем некоторые замечания о понятии аппроксимации и связанном с ним требовании к устойчивости схем по правой части.

Погрешность аппроксимации является простейшей априорной характеристикой качества схемы. Из определения устойчивости схемы по правой части вытекает, что погрешность разностного метода $\mathcal{Z}$ и погрешность аппроксимации ψ следует оценивать, вообще говоря, в разных нормах.

Весьма часто пользуются требованием аппроксимации разностным оператором дифференциального оператора в каждом узле сетки. Однако такой «естественный» критерий локальной аппроксимации слишком грубый и может дать неверное априорное представление о качестве схемы. К такому выводу приводит, в частности, изучение сходимости и порядка точности схем для уравнений с разрывными коэффициентами



Президиум собрания, посвященного награждению Института прикладной математики АН СССР орденом В. И. Ленина. Слева направо: М. А. Лаврентьев, Л. И. Седов, А. Н. Тихонов, М. В. Келдыш, А. Н. Куренков, А. К. Платонов, В. Ф. Дьяченко, А. П. Торжевский. 1967 г.

ми, а также для случая неравномерных сеток. Поясним это на простых примерах. Рассмотрим уравнение с разрывными коэффициентами $k(x)$

$$(ku')' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

и аппроксимируем его на сетке $\omega_h = \left\{ x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = \frac{1}{N} \right\}$ схемой

$$\Delta y_i = \frac{1}{h^2} [a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})] = -f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, \mu,$$

$$y_0 = y_N = 0, \quad a_i = 0,5 [k(x_{i-1} + 0) + k(x_i - 0)].$$

Пусть $k(x)$ — кусочно-постоянная функция, имеющая разрыв в иррациональной точке $\xi = x_n + \theta h$, $0 < \theta < 1$. Тогда $\psi = O\left(\frac{1}{h}\right)$ в соседних с разрывным узлах $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$, т. е. схема не аппроксимирует уравнение в этих узлах. Тем не менее схема равномерно (в норме $\|y\|_c = \max_{\omega_h} |y_i|$) сходится со скоростью $O(h)$ на любой последовательности сеток ω_h . В этом случае аппроксимация понимается в норме

$$\|\psi\|_{(2)} = \sum_{i=1}^{N-1} h \left| \sum_{k=1}^i h \psi_k \right|. \quad (13)$$

Нетрудно убедиться в том, что $\|\psi\|_{(2)} = O(h)$.

Рассмотрим еще один пример. На произвольной неравномерной сетке $\omega_h = \{x_i, i = 0, \dots, N, x_0 = x_N = 1, h_i = x_i - x_{i-1}\}$ схема

$$\Lambda y_i = \frac{1}{h_i} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right] = -f(x_i), \quad \tilde{h}_i = \frac{1}{2} (h_i + h_{i+1}),$$

для уравнения $u'' = -f(x)$ имеет первый локальный порядок аппроксимации. Однако она имеет второй порядок аппроксимации в одной из норм вида

$$\|\psi\|_{(2)} = \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left| \sum_{k=1}^i \tilde{h}_k \psi_k \right|, \quad (14)$$

$$\|\psi\|_{(2)} = \left[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \left(\sum_{k=1}^i \tilde{h}_k \psi_k \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

и равномерно сходится со скоростью $O(h_0^2)$, $h_0 = \max h_i$. Наконец, схема

$$\Lambda y_i = \frac{1}{h_{i+1}} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{0,5(h_{i+1} + h_{i+2})} - \frac{y_i - y_{i-1}}{0,5(h_i + h_{i+1})} \right] = -f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

не аппроксимирует уравнения $u'' = -f(x)$ ни в одной точке сетки ($\psi_i = O(1)$) на произвольной неравномерной сетке, и тем не менее она имеет второй порядок точности, так что $\|y - u^n\|_C = O(h_0^2)$.

Эти примеры показывают, что необходимо отказаться, вообще говоря, от требования локальной аппроксимации, заменив его требованием некоторой интегральной (суммарной) аппроксимации или аппроксимации в слабом смысле. Выбор нормы для оценки погрешности аппроксимации, очевидно, зависит от структуры дифференциального оператора и способа его разностной аппроксимации.

С другой стороны, оценку близости решения разностной и непрерывной задач желательно получить в возможно более сильной норме (например, в норме сеточных аналогов пространств C, W_2^2, W_2^1). Отсюда возникает проблема получения оценок решения разностной задачи через правую часть, взятую в более слабой норме (например, в W_2^{-1}, L_2). В общем случае погрешность аппроксимации представляется в виде суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых оценивается в своей норме:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \dots + \psi_\alpha + \dots + \psi_m, \\ \|\psi\|_{(2)} &= \|\psi_1\|_{(2_1)} + \dots + \|\psi_\alpha\|_{(2_\alpha)} + \dots + \|\psi_m\|_{(2_m)}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Это, например, справедливо при оценке порядка точности в норме W_2^1 или C разностной схемы для многомерного эллиптического уравнения (здесь $\|\psi_\alpha\|_{(2_\alpha)}$ — аналоги норм W_2^{-1}).

В случае эволюционных схем оценки ψ носят еще более сложный характер, например

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^m (\psi_{\alpha}^0 + \psi_{\alpha}^*), \quad \|\psi\|_{(2)} = \sum_{\alpha=1}^m [\|\psi_{\alpha}^*\|_{(2_{\alpha})} + \|\psi_{\alpha}^0\|_{(2_{\alpha}^*)} + \|(\psi_{\alpha}^0)_i\|_{(2_{\alpha}^*)}], \quad (17)$$

$$\psi_i^j = \frac{1}{\tau} (\psi^j - \psi^{j-1}),$$

где $\|\cdot\|_{(2_{\alpha})}, \|\cdot\|_{(2_{\alpha}^*)}$ — нормы в пространстве сеточных функций, заданных на ω_h («на слое»).

Связь между нормами $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$ легко проиллюстрировать на примере уравнения $Ay = \varphi$, где A — линейный оператор, заданный на вещественном гильбертовом пространстве H , являющемся аналогом пространства сеточных функций $y(x)$, $x \in \omega_h$. Пусть $(\cdot)$ — скалярное произведение, $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$ — норма в H , $\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}$ — норма в энергетическом пространстве H_A (аналоге пространства W_2^1). Если $A = A^* > 0$ — самосопряженный и положительный оператор, т. е. $(Ay, v) = (y, Av)$ и $(Ay, y) > 0$ для всех $y \neq 0$ из H , то выполняется точное равенство $\|y\|_A = \|\varphi\|_{A^{-1}}$. Если $(Ay, y) \geq \gamma (A_0 y, y) > 0$ для всех $y \in H$, $y \neq 0$, где $A_0 = A_0^* > 0$, $\gamma > 0$, то справедлива оценка $\|y\|_{A_0} \leq \frac{1}{\gamma} \|\varphi\|_{A_0^{-1}}$. Из уравнения $Ay = \varphi$ видно, что $\|Ay\| = \|\varphi\|$. Если же $\|Ay\| \geq \gamma \|A_0 y\|$, то $\|A_0 y\| \leq \frac{1}{\gamma} \|\varphi\|$.

Таким образом, существует естественная связь между нормами $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$: решение y в H_A (в сеточной норме W_2^1 , если A — разностный оператор, соответствующий эллиптическому оператору второго порядка) оценивается через правую часть φ в негативной норме $\|\varphi\|_{A^{-1}}$ (в W_2^{-1}) и т. д. Отсюда следует, что из аппроксимации в $H_{A^{-1}}$ (в H) вытекает сходимость схемы $Ay = \varphi$ в H_A (в H_A^* при $A = A^{\alpha} > 0$). Для двухслойной схемы (9) решение оценивается в H_A через правую часть в $H_{A^{-1}}$, точнее, $\|y\|_A$ оценивается через $\|\varphi\|_{A^{-1}} + \|\varphi_i\|_{A^{-1}}$ (сравни с (17)).

Еще в 1928 г. Курант, Фридрихс и Г. Леви получили энергетическое неравенство для решения разностного уравнения колебаний струны. В дальнейшем И. Г. Петровским, О. А. Ладыженской и другими при изучении методом конечных разностей вопроса о разрешимости различных задач математической физики были получены с помощью энергетического метода неравенства, выражающие устойчивость некоторых разностных схем в нормах, обеспечивающих компактность решений семейства разностных уравнений. Компактность использовалась для доказательства существования решения дифференциальных уравнений. При дополнительном предположении о единственности решения дифференциального уравнения из компактности следует сходимость решения разностного уравнения к решению дифференциального уравнения. Наиболее широко использовала (1953 г.) энергетический метод О. А. Ладыженская. Она получила также некоторые разностные аналоги

теорем вложения С. Л. Соболева. Первые теоремы вложения для сеточных функций были получены (1939, 1940 гг.) С. Л. Соболевым.

При доказательстве теорем существования важны лишь асимптотические (при $h \rightarrow 0$) свойства схем. В теории разностных схем обычно предполагается, что решение исходного дифференциального уравнения существует и единственно. Устойчивость можно понимать в более слабых нормах, чем те, которые обеспечивают компактность и существование. Разностные схемы, представляющие интерес для практики, зачастую носят значительно более сложный характер, чем схемы, применяющиеся в теории дифференциальных уравнений.

В. И. Лебедев применял (1960, 1961 гг.) энергетический метод для получения априорных оценок решения разностных задач, соответствующих задачам Дирихле и Неймана, а также третьей краевой задаче для уравнения Лапласа. Несколько раньше (1958 г.) он получил априорную оценку для неявной схемы, аппроксимирующей уравнение типа С. Л. Соболева с правой частью $f = \operatorname{div} \vec{F}$; при этом правая часть φ разностной схемы также бралась в «дивергентном виде» $\varphi = \operatorname{div}_h F$, где div_h — разностный аналог оператора div . Получена априорная оценка решения разностной задачи в норме $W_2^{(1)}$ через F в норме L_2 . В случае одного измерения на сетке $\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}$ соответствующая норма для φ имеет вид

$$\|\varphi\|_{(2)} = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h F_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для однородных разностных схем, соответствующих одномерному эллиптическому уравнению, А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским получены (1961 г.) равномерные оценки решения через правую часть в слабой норме (13), А. А. Самарским (1963 г.) — оценки в L_p , где $p = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$ — любое число, для однородных разностных схем, аппроксимирующих многомерное эллиптическое уравнение вида $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu = -f$ в произвольной области; правая часть оценивалась в слабой норме, аналогичной (15).

А. А. Самарский исследовал (1961—1963 гг.) устойчивость семейств неявных однородных схем с весами для одномерных линейных и квазилинейных уравнений и систем параболического (второго и четвертого порядков) и гиперболического (второго порядка) типов с разрывными коэффициентами при краевых условиях общего вида, а также для многомерных параболических уравнений. Например, получены априорные оценки решения в нормах $W_2^{(1)}$ и L_{2^n} ($n = 1, 2, \dots$) через правую часть $\psi = \psi^* + \tilde{\psi}$ в составной норме

$$\|\psi\|_{(2)} = \|\psi^*\|_{(2_1)} + \|\tilde{\psi}\|_{(2_2)} + \|\tilde{\psi}_t\|_{(2_2)},$$

где $\|\cdot\|_{(2_2)}$ — слабая норма вида (13), а $\|\cdot\|_{(2_1)}$ — одна из норм $\|\cdot\|_C$, $\|\cdot\|_L$ или (15). Получены также априорные оценки для несамосопряженных уравнений с разрывными коэффициентами.

В работах (1961—1966 гг.) Ю. Е. Бояринцева и Н. Н. Яненко для изучения устойчивости уравнений с переменными коэффициентами используется прямой алгебраический метод, позволяющий сформулировать теоремы сравнения разностных схем, т. е. теоремы, указывающие, при каких условиях из корректности одной разностной схемы следует корректность другой. И. В. Фрязинов обосновал (1961 г.) устойчивость по начальным данным в норме $L_2(\omega_h)$ для схем с весами, аппроксимирующих уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами.

В последние годы (1961—1966 гг.) активно изучались экономичные разностные схемы переменных направлений для широкого класса уравнений математической физики. Для областей специального вида (прямоугольник, параллелепипед) рассматривались так называемые схемы с расщепляющимся или факторизованным оператором. Устойчивость по начальным данным и правой части большого числа двухслойных и трехслойных схем подобного типа исследована с помощью энергетического метода В. Б. Андреевым, Е. Г. Дьяконовым, А. Н. Коноваловым, А. А. Самарским.

Н. Н. Яненко при исследовании устойчивости построенных им (1959, 1960 гг.) экономичных схем для многомерных уравнений теплопроводности и уравнений гиперболического типа с постоянными коэффициентами использовал спектральный метод, а для двумерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами в случае прямоугольной области (1962 г.) — прямой алгебраический метод. Во всех случаях доказывается устойчивость в L_2 при дополнительном условии $\frac{\tau}{h^2} \leq \text{const}$ или $\frac{\tau}{h} \leq \text{const}$.

Указанные выше работы выполнены в связи с изучением разностных схем для дифференциальных уравнений конкретного вида.

В работах (1965—1967 гг.) А. А. Самарского развита конструктивная теория устойчивости двухслойных и трехслойных разностных схем (являющихся аналогами нестационарных уравнений математической физики). Разностные схемы определяются как разностные (по переменному t) уравнения с операторными коэффициентами, заданными на абстрактных линейных нормированных пространствах H_h (являющихся аналогами пространств сеточных функций, зависящих от шага сетки h). Устойчивость изучается вне связи с аппроксимацией.

Отправным пунктом исследования является запись разностных схем в некоторой канонической форме. Любая двухслойная схема

$$B_1 y^{j+1} + B_0 y^j = \varphi^j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad y^0 \in H_h,$$

с линейными операторами B_0 и B_1 , заданными на H_h , может быть записана на равномерной сетке $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots\}$ в виде

$$B \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + A y^j = \varphi^j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad y^0 \in H_h,$$

где $A = B_0 + B_1$, $B = \tau B_1$. Трехслойная схема

$$B_2 y^{j+1} + B_1 y^j + B_0 y^{j-1} = \varphi^j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad y^0, y^1 \in H_h,$$

где B_0, B_1, B_2 — линейные операторы, заданные на H_h и зависящие, вообще говоря, от $t_j = i\tau$, записывается в каноническом виде

$$B \frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{\tau} + \tau^2 R \frac{y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1}}{\tau^2} + Ay^j = \varphi^j, \quad j = 0, 1, \dots,$$

где B, R и A линейно выражаются через B_0, B_1 и B_2 .

Устойчивость исследуется в некотором исходном семействе схем, определяющемся требованиями общего характера, такими, например, как положительность, самосопряженность, гладкость по t операторов схемы. Ставится задача: выделить классы устойчивых схем, принадлежащих исходному семейству (найти необходимые и достаточные условия устойчивости). Формулировка условий устойчивости наиболее удобна, если H_h — вещественное гильбертово пространство (Г. П.). Так, если A — самосопряженный положительный (т. е. $(Ay, y) > 0$ для всех $y \neq 0$ из H_h) и постоянный (не зависящий от t) оператор, а B — постоянный несамосопряженный положительный оператор, то условие $B \gg \frac{1}{2}\tau A$ или $(Bx, x) \gg \frac{1}{2}\tau (Ax, x)$ при всех $x \in H_h$ необходимо и достаточно для устойчивости двухслойной схемы по начальным данным (при $\varphi = 0$) в норме $\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}$ (в H_A), т. е. для выполнения неравенства $\|y_j\|_A \leq \|y^0\|_A$ при $\varphi = 0$. В случае переменных A и B это же условие достаточно для устойчивости, если $A = A(t)$ удовлетворяет условию Липшица по t .

Для схемы с весами

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + A(\sigma y^{j+1} + (1 - \sigma)y^j) = \varphi^j,$$

где $A = A^* > 0$, получаем $B = E + \sigma\tau A$ (E — единичный оператор) и условие устойчивости $B \gg \frac{1}{2}\tau A$ выполняется при $\sigma \gg \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A\|}$.

Трехслойная схема устойчива по начальным данным, если A и R — постоянные самосопряженные и положительные ($A > 0, R > 0$) операторы, а $B \geq 0$ и выполняется операторное неравенство $R > \frac{1}{4}A$.

Условия $B \gg \frac{1}{2}\tau A$ и $R > \frac{1}{4}A$ достаточны для устойчивости и по правой части в случае переменных операторов A, B и R . Заметим, что конкретная структура операторов A, B , и R не задается и нигде не используется, что дает возможность применять теорию к самым разнообразным конкретным схемам, принадлежащим исходному семейству. А. А. Самарским сформулированы (1967 г.) простые правила проверки устойчивости конкретных схем.

Условия устойчивости $B \gg \frac{1}{2}\tau A$ и $R > \frac{1}{4}A$ оставляют произвол в выборе операторов B и R при заданном операторе A (который определяется, как правило, исходной задачей). Поэтому, оставаясь в классе устойчивых схем, можно получать путем изменения B или R

устойчивые схемы заданного качества (удовлетворяющие некоторым дополнительным требованиям, таким, как экономичность, определенный порядок аппроксимации и др.). Этот метод регуляризации разностных схем позволяет, в частности, построить абсолютно устойчивые экономичные двухслойные и трехслойные схемы для широкого класса уравнений математической физики.

Опыт применения ЭВМ показывает, что необходимо развивать универсальные вычислительные методы, пригодные для решения как можно более широких классов задач и характеризующиеся единообразием вычислительной процедуры. Класс задач K_0 определяется заданием типа дифференциального уравнения, дополнительных (краевых, начальных) условий и функционального пространства, которому принадлежат коэффициенты дифференциального уравнения. Универсальные схемы должны удовлетворять требованиям сходимости и нужного порядка точности, а также требованию корректности (разрешимости и устойчивости) на любой последовательности сетки для любой задачи из рассматриваемого класса K_0 . Для того чтобы построить теорию разностных схем, необходимо задать исходное семейство S_0 допустимых схем. Теоретическое исследование состоит из нескольких этапов: 1) для K_0 задается исходное семейство схем S_0 , имеющих некоторый порядок аппроксимации в более узком классе $K_1 \subset K_0$ задач (например, для уравнений с достаточно гладкими коэффициентами), 2) выделяется семейство $S_1 \subset S_0$ корректных схем, 3) из S_1 выделяется семейство S_2 схем, сходящихся в K_0 , 4) на S_2 ищутся наилучшие схемы, оптимальные в некотором смысле (по порядку точности в K_0 и по некоторым другим характеристикам, например по числу арифметических действий, простоте реализации и др.).

Требование единообразия или однородности вычислительного алгоритма для класса задач приводит к понятию однородных разностных схем (А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, 1950—1964 гг.). Большое значение имеет, в частности, проблема выделения семейства однородных схем или схем сквозного (непрерывного) счета, которые позволяли бы решать уравнения математической физики как с непрерывными, так и с разрывными коэффициентами, не прибегая к явному выделению линий разрыва и изменению схемы в их окрестности. Задачи с разрывными коэффициентами встречаются очень часто в физике и технике (например, задачи о диффузии нейтронов или о термическом режиме в реакторе, состоящем из большого числа зон с различными физическими свойствами, о движении границ фазовых переходов — задача Стефана — и др.).

Однородная схема определяется с помощью зависящего от параметра (шага сетки) функционала (производящего функционала) от функции дискретного аргумента (сеточной функции $\bar{u}(j)$) и вектор-функции $\bar{k}(s)$ непрерывного аргумента (коэффициентов дифференциального уравнения). Например, линейный относительно сеточной функции одного переменного производящий функционал имеет вид

$$\Phi^h[\bar{u}(j), \bar{k}(s)] = \sum_{j=-m_1}^{m_2} A_j^h[\bar{k}(s)] \bar{u}(j) + B^h[\bar{k}(s)],$$

где $A_j^h[\bar{k}(s)]$, $B_j^h[\bar{k}(s)]$ — h -параметрические (шаблонные) функционалы вектор-функций, заданных на шаблоне — $m_1 \leq s \leq m_2$. Чтобы получить отсюда однородную схему $L_h^{(h)}$ для дифференциального уравнения с вектор-коэффициентами $k(x)$, надо положить $\bar{u}(j) = u^h(x + jh)$, $\bar{k}(s) = k(x + sh)$, где x — любой узел сетки с шагом h :

$$L_h^{(h)} u^h = \sum_{j=-m_1}^{m_2} A_j^h[k(x + sh)] u(x + jh) + B^h[k(x + sh)].$$

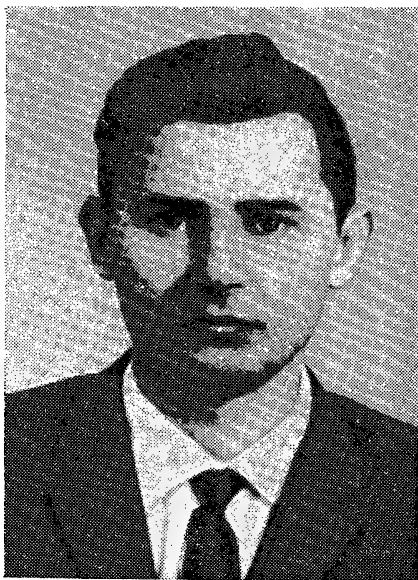
Коэффициенты однородной схемы вычисляются в каждой точке сетки для любой задачи из K_0 по одним и тем же формулам. Исходное семейство S_0 однородных схем задано, если заданы шаблонные функционалы.

При изучении однородных разностных схем для одномерного эллиптического уравнения $(ku')' - q(x)u = -f(x)$ выяснилось, что необходимому условию сходимости в классе разрывных коэффициентов удовлетворяют лишь консервативные (дивергентные) схемы, выражающие закон сохранения на сетке. Этот вывод (поскольку речь идет о необходимом условии сходимости) распространяется и на однородные схемы для многомерных уравнений $Lu + f = 0$, $Lu + f = \frac{\partial u}{\partial t}$,

$Lu + f = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, где $Lu = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu$. Консервативные схемы можно получить методом баланса (интегро-интерполяционным методом). Для элементарной ячейки сетки пишется закон сохранения (уравнение баланса), соответствующий данному дифференциальному уравнению. Входящие в уравнение баланса производные и интегралы заменяются затем приближенными выражениями. В зависимости от применяющейся при этом интерполяции получаются различные однородные схемы. Вопрос о выборе интерполяции подчинен требованиям устойчивости, точности, простоты реализации и др.

Метод баланса в той или иной форме начиная с 1950 г. применялся А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским, Г. И. Марчуком, С. К. Годуновым, А. И. Жуковым, Н. Н. Яненко, В. К. Саулевым и другими при построении разностных схем сквозного счета для решения различных задач математической физики, в частности газодинамики. Например, Г. И. Марчук в работе «Методы численного расчета ядерных реакторов» (1958 г.) применил метод баланса для численного решения уравнений диффузии нейтронов в связи с расчетом гетерогенных цилиндрических ядерных реакторов, С. К. Годунов использовал (1958 г.) законы сохранения при выводе схем сквозного счета разрывных решений уравнений газодинамики.

Интегральные законы сохранения для разностных схем, имитирующие законы сохранения для дифференциальных уравнений, применялись при изучении вопроса о существовании обобщенных решений уравнений эллиптического и гиперболического типов. Так, О. А. Ладженская доказала (1954 г.) сходимость схемы сквозного счета к обобщенному решению задачи дифракции с разрывными коэффициентами.



Г. И. Марчук.

Консервативные разностные схемы рассматривались А. Л. Крыловым (1962 г.), В. И. Лебедевым (1964 г.) и др. В. И. Лебедев построил (1964 г.) конечноразностные аналоги ортогональных разложений пространств сеточных функций и получил разностные аналоги некоторых дифференциальных операторов и краевых задач математической физики, обладающие свойством аппроксимации в интегральном смысле.

При конструировании разностных схем, пригодных (устойчивых, дающих достаточную точность и т. д.) для практической реализации, возникает много специальных вопросов, на которые приходится обращать особое внимание при решении сложных задач. Такими, например, являются вопросы об аппроксимации граничных условий, о выборе сеток, учитывающих специфику задачи, об устойчивости и точности схемы на реальных (достаточно грубых) сетках. Большие трудности представляет решение таких вопросов при рассмотрении нелинейных задач математической физики, например задач газовой динамики. Для выяснения качества разностных методов их обычно испытывают на частных решениях (например, автомоделных) или на модельных линейных уравнениях. При этом часто возникают новые задачи теории разностных схем. Так, при разработке (1954 г.) С. К. Годуновым метода сквозного счета («размазывания») ударных волн возникла модельная задача о выделении класса схем, обладающих свойством монотонности (переводящих монотонные сеточные функции в монотонные). Было установлено, что для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ не существует линейных монотонных схем второго порядка точности. В дальнейшем (1964 г.) В. Я. Гольдину и Н. Н. Калиткину удалось построить для этого уравнения монотонные нелинейные схемы второго порядка точности.

2

Разностные методы для эллиптических уравнений

Метод конечных разностей (метод сеток) для уравнений эллиптического типа рассматривался многими советскими математиками. Он применялся как для доказательства теорем существования, так и для численного решения дифференциальных уравнений.

При доказательстве разрешимости задачи Дирихле для уравнения Лапласа в плоской области (при весьма слабых ограничениях на

ее границу) метод конечных разностей впервые (1924 г.) применил Л. А. Люстерник. Он рассматривал квадратную сетку и простейшую 5-точечную схему. Позднее (1954 г.) Л. А. Люстерник доказал сходимость ряда других разностных схем на треугольных, шестиугольных и косоугольных сетках для уравнения Лапласа.

И. Г. Петровский дал (1941 г.) новое весьма общее доказательство разрешимости задачи Дирихле для случая многих переменных, основанное на применении так называемых барьеров и априорных оценок для разностных уравнений. Метод И. Г. Петровского переносится на широкий класс линейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка.

О. А. Ладыженская доказала (1953 г.) методом конечных разностей существование и единственность обобщенного решения для эллиптического уравнения общего вида. Эти результаты изложены в ее монографии «Смешанная задача для гиперболического уравнения» (1953 г.). Д. М. Эйдус исследовал (1952 г.) разрешимость второй краевой задачи для эллиптического уравнения.

Для того чтобы получить численное решение дифференциальных уравнений, недостаточно установить факт сходимости разностной схемы, т. е. исследовать ее асимптотические свойства при $h \rightarrow 0$. Необходимо получить оценку погрешности разностного метода при любом конечном значении шага сетки h , т. е. оценить порядок точности метода. Поэтому для теории разностных схем типична следующая постановка задачи: решение дифференциального уравнения существует, требуется оценить порядок точности разностной схемы в зависимости от дифференциальных свойств решения исходного уравнения.

Основными вопросами в теории разностных схем являются следующие:

- 1) построение разностных операторов, аппроксимирующих с разными порядками относительно шага сетки эллиптический дифференциальный оператор;
- 2) аппроксимация граничных условий;
- 3) оценка порядка точности схемы;
- 4) выбор и исследование метода решения полученной системы алгебраических уравнений.

Остановимся на первых трех вопросах. Первые исследования по теории разностных схем для двумерного уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x), \quad (18)$$

были проведены (1927 г.) С. А. Гершгориним. Им исследованы различные аппроксимации оператора Лапласа на сетках, составленных из правильных четырехугольников, треугольников и шестиугольников. Разностная задача имеет вид

$$\Lambda u = -\varphi, \quad x \in \omega_h, \quad u|_{\gamma_h} = \mu(x), \quad (19)$$

где вид оператора Λ зависит от вида используемой сетки, а правая часть $\varphi(x)$ — от функции $f(x)$. Гершгорин показал, что для простейших разностных операторов, заданных на шестиугольной (4-точечный

шаблон), четырехугольной (5-точечный шаблон) или треугольной (7-точечный шаблон) сетке, погрешность аппроксимации ψ есть соответственно $O(h)$, $O(h^2)$ и $O(h^4)$. Разностные схемы для уравнения Пуассона на 9-точечном шаблоне (сетка квадратная, двумерная область) исследованы (1934 г.) Ш. Е. Микеладзе. Установлено, что $\psi = O(h^6)$. Аналогичная схема была построена (1936 г.) Л. В. Канторовичем и В. И. Крыловым.

Для уравнения

$$\Delta u + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} + gu = -f(x) \quad (20)$$

Ш. Е. Микеладзе построил 5-точечную схему $O(h^2)$. Исследования Микеладзе изложены в его монографии «Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными» (1936 г.).

Д. Ф. Давиденко построил (1957—1960 гг.) разностные схемы для осесимметрического уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат. Погрешность аппроксимации 9-точечной разностной схемы на квадратной сетке имеет вид $\psi = \frac{O(h^6)}{r}$. Схемы повышенного порядка точности для уравнения

$$\Delta u + \alpha_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} - \alpha_3(x, y) u = -f(x, y) \quad (21)$$

построил (1963 г.) В. В. Бадагадзе. На прямоугольной сетке он получил $\psi = O(h^4)$, а на квадратной сетке (при условии $\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}$) — $\psi = O(h^6)$.

Для того чтобы поставить разностную краевую задачу, аппроксимирующую исходную задачу для дифференциального уравнения, кроме аппроксимации уравнения нужно еще аппроксимировать граничные условия. В случае первой краевой задачи вопрос об аппроксимации граничных условий решается более или менее просто. Наиболее удачный способ задания граничных условий для разностной задачи найден (1940 г.) Ш. Е. Микеладзе. Предложенная им интерполяция граничного условия в приграничный узел соответствует просто написанию разностной аппроксимации дифференциального уравнения на неравномерной сетке в приграничных узлах.

Простейшая аппроксимация нормальной производной, заданной на криволинейном куске границы, была предложена Л. В. Канторовичем и В. И. Крыловым. Погрешность ее составляла $O(h)$. Е. А. Волков построил (1955, 1961 гг.) аппроксимацию граничного условия, содержащего наклонную производную, с погрешностью $O(h^2)$ на решении уравнения

$$\Delta u - q(x, y) u = -f(x, y). \quad (22)$$

Несколько иного типа аппроксимации граничных условий второго и третьего рода для двумерного и трехмерного уравнений Пуассона

построены (1959 г.) В. И. Лебедевым. Для двумерного случая аппроксимация построена с помощью разностной сопряженной задачи, а для трехмерного — с помощью метода ортогональных проекций. Погрешность аппроксимации равна $O(h^2)$. М. А. Алексидзе построил (1960 г.) аппроксимацию граничного условия с наклонной производной; погрешность аппроксимации на решении аппроксимированной задачи равна $O(h^6)$.

Е. А. Волков (1962 г.) при аппроксимации задачи Неймана для двумерного уравнения Пуассона в прямоугольнике построил разностное граничное условие, имеющее на решении задачи погрешность аппроксимации $O(h^6)$. Аппроксимация граничных условий третьего рода для самосопряженного эллиптического уравнения без смешанных производных в p -мерном параллелепипеде построена (1965 г.) В. Б. Андреевым, погрешность ее на решении уравнения равна $O(|h|^2)$, $|h|^2 = h_1^2 + \dots + h_p^2$.

Наибольшую трудность при исследовании разностного метода представляет оценка функции $z = y - u^h$, являющаяся решением разностной задачи

$$\left. \begin{aligned} \Delta z &= -\psi, & x \in \omega_h^0, \\ l_h z &= v, & x \in \gamma_h. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Основными методами оценки порядка скорости сходимости разностных схем являются принцип максимума, метод энергетических неравенств и метод функции Грина. Первое исследование порядка точности метода сеток было выполнено (1927—1930 гг.) С. А. Гершгориним. Он доказал принцип максимума для ряда разностных схем, аппроксимирующих задачу Дирихле для уравнения Пуассона, из которого следует существование и единственность решения y разностной краевой задачи, построил в явном виде мажорирующую функцию и оценил, пользуясь принципом максимума, погрешность z . Позднее (1933 г.) С. А. Гершгорин обобщил свои результаты на случай двумерного эллиптического уравнения второго порядка без смешанных производных с переменными коэффициентами. Принцип максимума доказан при достаточно малых $h \leq h_0$, где h_0 зависит от максимума модулей коэффициентов при первых производных. Мажорирующая функция построена для областей достаточно малого диаметра, который зависит от максимума модулей тех же коэффициентов. Краевые условия задавались с помощью простого сноса, что привело к оценке точности

$$\|y^h - u\|_C \leq M_2 h + M_4 h^2, \quad (24)$$

где M_k ($k = 2, 4$) зависит только от максимума k -х производных решения и диаметра области.

Хотя С. А. Гершгорин исследовал схемы для двумерных уравнений, его методы исследования применимы и для большего числа измерений. Метод мажорирующей функции С. А. Гершгорина до сих пор используется при изучении разностных схем для уравнений эллиптического типа. Дальнейшие исследования, связанные с принципом максимума, посвящены в основном обобщению результатов С. А. Гершгорина на случай аппроксимации иного типа и на случай других краевых задач.

Ш. Е. Микеладзе доказал принцип максимума для 9-точечных схем на квадратной сетке в двумерной области, а также для 19-точечных и 27-точечных схем на кубической сетке в трехмерной области. Он показал, что предложенная им аппроксимация граничных условий Дирихле на криволинейном участке границы не нарушает принципа максимума. Ш. Е. Микеладзе доказал принцип максимума для предложенной им 5-точечной схемы, аппроксимирующей на квадратной сетке уравнения (20), а Е. А. Волков и М. А. Алексидзе — для некоторых разностных схем, аппроксимирующих задачу с кривой производной.

А. А. Самарский, В. Б. Андреев (1964 г.) и В. В. Бадагдзе (1964—1966 гг.) установили налагаемые на соотношения между шагами h_α условия, при которых принцип максимума справедлив для 9-точечных схем на прямоугольной сетке и 19-точечных схем на сетке, составленной из параллелепипедов. М. А. Алексидзе доказал (1960 г.) принцип максимума для случая, когда условие монотонности нарушено на некотором множестве узлов. А. А. Самарский построил (1965 г.) монотонные при любых h_α схемы (для которых справедлив принцип максимума) второго порядка аппроксимации для несамосопряженных эллиптических уравнений.

Оценки погрешности разностной схемы для уравнения Лапласа получены С. А. Гершгориним при предположении ограниченности четырех производных искомого решения. Е. А. Волков (1954 г.) и Н. С. Бахвалов (1957 г.) уточнили эту оценку, снизив требования на гладкость решения в замкнутой области. М. А. Алексидзе перенес результаты Н. С. Бахвалова на случай уравнения Пуассона.

В работах Е. А. Волкова (1960, 1966 гг.) большое внимание уделяется получению так называемых эффективных оценок, т. е. оценок через величины, которые можно непосредственно вычислить. Е. А. Волковым построены разностные схемы, сходящиеся со скоростью $O(h^2)$ при решении уравнения Пуассона в областях с углами и в бесконечных областях. Им же обоснован способ уточнения решения разностной задачи с помощью разностей высокого порядка.

Оценки скорости сходимости 4-точечных схем на шестиугольных сетках для уравнения Пуассона получены (1961 г.) В. И. Лебедевым. Оказалось, что те разностные схемы, которые имеют локальную погрешность аппроксимации $O(h)$, сходятся со скоростью $O(h^2)$, а если исправить правую часть, то можно добиться сходимости со скоростью $O(h^3)$.

В последнее время появилось значительное количество работ, в которых оценка скорости сходимости метода сеток исследуется методом энергетических неравенств. Этот метод позволяет более точно судить, по сравнению с принципом максимума, о скорости сходимости разностных схем. Более того, метод энергетических неравенств позволяет получить оценку скорости сходимости в тех случаях, когда принцип максимума неприменим. При этом используются априорные оценки решения через правую часть в слабой норме. Примером может служить исследование В. И. Лебедева, относящееся к разностным схемам на шестиугольных сетках.

Для решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений в области со сложной геометрией В. К. Саульев предложил (1962 г.) метод фиктивных областей. Его обоснованием занимались также В. Я. Ривкинд и В. И. Лебедев. Сходимость разностных схем для эллиптических уравнений с коэффициентами, имеющими разрывы на некоторых поверхностях, изучалась (1963, 1964 гг.) В. Я. Ривкиндром. Ю. К. Демьянович построил разностную схему (1966 г.) для самосопряженного уравнения второго порядка с измеримыми и ограниченными коэффициентами и доказал ее сходимость со скоростью $O(\sqrt{h})$ в метрике $W_2^{(1)}$ к обобщенному решению из $W_2^{(2)}$; он также определил устойчивость схемы относительно возмущений коэффициентов.

В. Б. Андреев получил (1966 г.) оценку скорости сходимости $O(|h|^4)$ в нормах $W_2^{(2)}$ и C для 9-точечной и 19-точечной схем, аппроксимирующих уравнение Пуассона на прямоугольной сетке. Принцип максимума для этих схем установлен лишь при условии, что отношение шагов $\frac{h_\alpha}{h_\beta}$ по разным направлениям удовлетворяет некоторым ограничениям. Н. С. Бахвалов получил (1966 г.) оценку скорости сходимости $O(h^2)$ (при $h < h_0$) в нормах $W_2^{(2)}$ и C для разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле в прямоугольнике для уравнения с общим эллиптическим оператором второго порядка, для которого нуль не есть точка спектра.

Все указанные выше исследования относятся к уравнению Пуассона или к линейным эллиптическим уравнениям второго порядка. В большинстве работ, относящихся к эллиптическим уравнениям более высокого порядка, вопрос об оценке скорости сходимости не рассматривается, в них обсуждаются те или иные алгоритмические вопросы или исследуется погрешность аппроксимации. В. К. Саульев доказал (1957 г.) сходимость (без оценки скорости) в норме $W_2^{(m)}$ для эллиптиче-



В. К. Саульев.

ского уравнения $2m$ -го порядка с однородными граничными условиями первого рода.

В. И. Лебедев получил (1962 г.) оценки погрешности разностного решения полигармонического уравнения, зависящие от гладкости решения дифференциальной задачи, предполагая, что точное решение исходной задачи известно в некоторой пограничной полосе.

Вариационным методом получения разностных аппроксимаций эллиптических уравнений посвящены работы Л. А. Оганесяна и Ю. К. Демьяновича. Разностные схемы являются уравнениями Эйлера для вариационного функционала, если его минимум искать не во всем пространстве функций, где он определен, а лишь на специальном подпространстве, аппроксимирующем исходное. Вариационный подход к написанию схем позволяет довольно просто решать вопрос об их сходимости, причем оценку скорости сходимости удается получить при весьма слабых предположениях о гладкости решения.

Различные схемы для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка изучались (1965 г.) М. П. Сапаговым.

Однородные разностные схемы для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами изучались (1961, 1962 гг.) А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским. Детально исследован вопрос о сходимости и точности для одномерного эллиптического уравнения $(ku')' - qu = -f(x)$ с разрывными коэффициентами $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$. Показано, что усиленному требованию сходимости в классе разрывных коэффициентов удовлетворяют лишь консервативные схемы

$$\Delta u = (a(x) u_x)_x - d(x) u = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h,$$

где $y_x = \frac{1}{h} (y_i - y_{i-1})$, $y_x = \frac{1}{h} (y_{i+1} - y_i)$, и найдена схема, сохраняющая порядок точности в этом классе. Консервативные схемы устойчивы относительно возмущения коэффициентов. Аппроксимация понимается в слабой норме (аналогичной (13)). Показано, что любая консервативная схема имеет на произвольной последовательности неравномерных сеток тот же порядок точности, что и на равномерной сетке. Найдена однородная 3-точечная схема, точная в классе $Q^{(0)}$ кусочно-непрерывных коэффициентов на произвольной неравномерной сетке ω_h , так что $y_i = u(x_i)$ для любого узла $x_i \in \omega_h$. Эта схема консервативна. Построены схемы, имеющие в $Q^{(0)}$ точность $O(h^{2m})$, $m = 1, 2, \dots$

А. А. Самарский рассматривал (1962, 1963 гг.) однородные разностные схемы для многомерных эллиптических уравнений. Для сопряженного эллиптического уравнения второго порядка без смешанных производных в классе кусочно-гладких коэффициентов с разрывами на плоскостях, параллельных координатным, построено семейство однородных схем и доказана (методом «энергетических неравенств n -го ранга») их равномерная сходимость со скоростью $O(h^2 \ln^\delta \frac{1}{h})$, $\delta > 1$, и сходимость со скоростью $O(h^2)$ в L_2 на произвольной неравномерной сетке в любой p -мерной области. А. К. Боярчук исследовал (1963—1965 гг.) сходимость, точность, коэффициентную устойчивость одно-

родных разностных схем для уравнений и систем уравнений четвертого порядка с разрывными коэффициентами.

Ряд работ посвящен изучению общих свойств разностных уравнений, аппроксимирующих уравнения Лапласа (С. Л. Соболев, Л. А. Люстерник, М. Р. Шура-Бура и др.). С. Л. Соболев исследовал (1952 г.) 5-точечное разностное уравнение $u_{xx} + u_{yy} = 0$ на всей плоскости, построил для него аналог фундаментального решения в явном виде и доказал, что решение, возрастающее на бесконечности медленнее $\sqrt{i^2 + k^2}$, есть постоянная величина. Позднее (1965 г.) он изучил разностный аналог полигармонического уравнения. Л. А. Люстерник исследовал (1957 г.) разностный аналог функции Грина для оператора Лапласа в конечной области для случая двух и трех переменных; он выделил главную часть и оценил ее отклонение от функции Грина. Близкому кругу вопросов посвящена работа М. Р. Шуры-Буры (1953 г.). Разностная функция Грина была использована (1960 г.) В. И. Лебедевым при изучении сходимости метода сеток для задачи Неймана.

После замены дифференциального уравнения разностной схемой получается система алгебраических уравнений, порядок которой равен числу внутренних узлов сетки $\left(O\left(\frac{1}{h^p}\right)\right)$ (в случае p -мерного эллиптического уравнения). В 1947—1953 гг. был предложен ряд прямых методов решения этой системы, учитывающих специальный вид ее матрицы. В случае краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $(ku')' - qu = -f(x)$ получается система разностных уравнений вида

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (25)$$

с трехдиагональной матрицей.

В начале 50-х годов был предложен И. М. Гельфандом, О. В. Локуциевским, А. С. Кронродом, Штарком и другими независимо друг от друга прямой метод решения этой системы уравнений, называемый методом прогонки, или методом факторизации. Его можно трактовать как один из вариантов метода исключения Гаусса или как разностный аналог метода факторизации дифференциального уравнения второго порядка, сводящего краевую задачу к задачам Коши для трех уравнений первого порядка. Для получения решения методом прогонки требуется число действий, пропорциональное числу уравнений. Для решения системы векторных уравнений (25), где A_i, B_i, C_i — матрицы, y_i — вектор, М. В. Келдыш, И. М. Гельфанд, О. В. Локуциевский предложили (1953 г.) метод матричной прогонки. Его устойчивость исследовалась К. И. Бабенко, В. В. Русановым, Н. Н. Ченцовым. Различные варианты метода прогонки для решения уравнений и систем одномерных уравнений, а также вопросы вычислительной устойчивости рассматривались В. С. Владимировым, А. А. Абрамовым, С. К. Годуновым, В. Б. Андреевым, И. Д. Софроновым, В. И. Крыловым, П. И. Монастырным, Г. Д. Майстровским и др. Для периодической задачи метод прогонки разработан (1963 г.) А. А. Абрамовым и В. Б. Ан-



Н. И. Булеев.

древним. Н. С. Бахвалов исследовал вопрос о накоплении вычислительной погрешности при решении методом прогонки разностной краевой задачи для уравнения $u'' - p(x)u = -f(x)$ и показал, что за счет ошибки округления порядка ε решение задачи этим методом получается с точностью $O\left(\frac{\varepsilon}{h^2}\right)$, где h — шаг сетки.

Прямым методом решения многомерных разностных задач является метод суммарных представлений, предложенный Г. Н. Положим («Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента», 1962 г.). Алгоритмы метода суммарных представлений для некоторых задач разработаны и реализованы Г. Н. Положим и его учениками.

В случае многомерных эллиптических уравнений для решения системы разностных уравнений обычно используются итерационные методы. Классический метод простой итерации требует для уменьшения начальной невязки в $1/\varepsilon$ раз (где $\varepsilon > 0$ — требуемая точность) $v \approx \frac{1}{h^2} \ln \frac{1}{\varepsilon}$

итераций с общим объемом вычислений $Q = O\left(\frac{1}{h^{p+2}} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ действий.

Л. А. Люстерник (1947 г.) и А. А. Абрамов (1950 г.) внесли некоторые видоизменения в процессы простой итерации, что позволило несколько увеличить скорость сходимости. Итерационный процесс (метод неполной факторизации), отличный от простой итерации и имеющий большую скорость сходимости, был предложен (1958 г.) Н. И. Булеевым.

В 1955 г. американские математики Писмен, Рекфорд и Дуглас предложили новый итерационный процесс — метод переменных направлений (МПН). Применение его к уравнению Пуассона в прямоугольнике дает решение с точностью ε при затрате $O\left(\ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ итераций и $O\left(\frac{1}{h^2} \ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ действий для двумерного случая. МПН для двумерной задачи Дирихле

$$\Lambda v = -\varphi, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad (26)$$

где Λ — разностный оператор Лапласа, сводится к решению уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^{n+\frac{1}{2}} - y^n}{\tau_n} &= \Lambda_1 y^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^n + \varphi, \\ \frac{y^{n+1} - y^{n+\frac{1}{2}}}{\tau_n} &= \Lambda_1 y^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^{n+1} + \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где n — номер итерации, $y^{n+\frac{1}{2}}$ — промежуточное значение (подытерация). Точность ε за $O\left(\ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ итераций достигается при специальном выборе итерационных параметров τ_n .

Развитию и обобщению МПН на более общие уравнения и более сложные области посвящен ряд работ советских математиков. Основным достоинством МПН, которое следовало сохранить при обобщении, является малость числа итераций $O\left(\ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$, необходимых для достижения требуемой точности, и малость числа действий, необходимых для выполнения одной итерации $O(h^{-p})$ (т. е. число действий на одной итерации пропорционально числу узлов).

Цикл исследований в этом направлении выполнен (1961, 1962, 1965, 1966 гг.) Е. Г. Дьяконовым. Им построены итерационные процессы с теми же асимптотическими (при $h \rightarrow 0$) характеристиками для уравнения Пуассона (задачи Дирихле) в p -мерном прямоугольном параллелепипеде для эллиптических уравнений $2m$ -го порядка с разделяющимися переменными. Эти методы обобщены им (двухступенчатая итерация) на случай общих самосопряженных эллиптических уравнений $2m$ -го порядка, интегро-дифференциальные уравнения, квазилинейные эллиптические уравнения и системы. Для двумерной области, являющейся пересечением прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям, Е. Г. Дьяконов построил итерационный процесс, представляющий собой объединение альтернирующего метода Шварца и МПН с числом итераций $O\left(\ln^2 \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Асимптотические оценки для числа итераций, имеющие важное принципиальное значение, часто оказываются недостаточными для суждения о качестве итерационного процесса. На практике всегда приходится иметь дело с конечными значениями шага h и при сравнении разных итерационных методов может оказаться, что на реальной сетке более выгоден итерационный процесс с меньшей асимптотической скоростью сходимости. Поэтому особую важность приобретает выбор оптимальных итерационных параметров из условия минимума вычислительной работы. Первая и третья задачи для разностного уравнения Пуассона в прямоугольнике могут быть записаны в виде уравнения $(A_1 + A_2)u = f$, где A_1 и A_2 — самосопряженные положительно определенные и перестановочные линейные операторы ($A_1 A_2 = A_2 A_1$) в конечномерном пространстве H со скалярным произведением. Для этого уравнения применяется МПН с двумя наборами параметров $\{\tau_n^{(1)}\}$ и $\{\tau_n^{(2)}\}$. Оптимальные наборы этих параметров были найдены (1965 г.) американским математиком Жорданом. А. А. Самарским и В. Б. Андреевым (1963, 1964 гг.), В. А. Енальским (1964, 1967 гг.) построены итерационные процессы МПН для разностных схем повышенного порядка точности в случае задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике ($p = 2$) и параллелепипеде и найдены наборы циклических итерационных параметров $\{\tau_n\}$ из условия минимума числа итераций. В. Б. Андре-

ев и И. С. Кац построили (1965 г.) и исследовали итерационный МПН для разностного аналога третьей краевой задачи для уравнения Пуассона при аппроксимации граничных условий второго порядка.

А. А. Самарский предложил (1967 г.) итерационный МПН для разностной задачи Дирихле повышенного порядка точности в прямоугольнике и показал, что оптимальные параметры для него выражаются через оптимальные параметры, найденные Жорданом. И. В. Фрязинов построил (1967 г.) схему $O(|h|^4)$ для уравнения Пуассона в прямоугольнике с краевыми условиями третьего рода и предложил итерационный МПН, для которого выбор оптимальных итерационных параметров сводится к задаче, решенной Жорданом.

Итерационные МПН с постоянными параметрами для стационарной задачи теории упругости (первая краевая задача, прямоугольник, параллелепипед) исследованы А. Н. Коноваловым (1964 г.) и А. А. Самарским (1965 г.). Число итераций для этих задач составляет $O\left(\frac{1}{h}\right)$ в

двумерном случае и $O\left(\frac{1}{h^{1/3}}\right)$ — в трехмерном. В. Е. Шаманский рассматривал (1965 г.) различные методы решения разностных эллиптических уравнений. И. Н. Молчанов предложил (1963—1965 гг.), ряд итерационных методов, экономящих память ЭВМ. П. С. Бондаренко исследовал свойства разностных эллиптических операторов и устойчивость реальных вычислительных алгоритмов.

Асимптотически (при $h \rightarrow 0$) оптимальным методам решения многомерных задач посвящен цикл работ (1957, 1959, 1962 гг.) Н. С. Бахвалова. В них изучается вопрос об оптимальных по порядку способах задания информации при решении дифференциальных уравнений и минимальном количестве работы, необходимом для отыскания решения с заданной точностью. Показано, что уравнение Пуассона в квадрате можно решить разностным методом на сетке с шагом h точно за $O\left(h^{-2} \ln^2 \frac{1}{h}\right)$ арифметических действий (если известна таблица разностной функции Грина для квадратов со стороной $2^k h$). Указывается способ получения численных методов решения уравнения Лапласа с оценкой числа действий, по порядку сколь угодно близкой к оптимальной, если исходные данные принадлежат к заданному классу.

Рассматриваются граничные значения из класса $C_{r, \lambda}$ (r — число производных по x_α , λ — показатель Гельдера). Показано, что для получения одного значения решения с точностью ε необходимо использовать значения граничной функции в $N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-\frac{1}{r+\lambda}}$ точках. При $r + \lambda < 3$ построена сетка и указан метод решения задачи со следующими характеристиками: объем памяти приближенно равен $N(\varepsilon)$, число используемых значений граничной функции — $N(\varepsilon)$, число действий — $N(\varepsilon) \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}$. С полученной сетки решение интерполируется в любую внутреннюю точку области за конечное число действий. Если граница принадлежит к классу большей гладкости, чем граничная



Н. М. Крылов.

функция, то для получения значений решения в любой строго внутренней подобласти достаточно $O(H_\varepsilon)$ арифметических действий.

Р. П. Федоренко построил (1961, 1964 гг.) итерационный процесс решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике.

Этот метод позволяет найти решение с точностью ε за $O\left(\ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ арифметических действий. Предложенный им итерационный процесс базируется на простой итерации (или на каком-либо ином итерационном процессе, обладающем, вообще говоря, невысокой скоростью сходимости), но в процессе решения используются вспомогательные сетки с большей величиной шага, что позволяет уменьшить число арифметических операций. Н. С. Бахвалов обобщил (1966 г.) итерационный процесс Р. П. Федоренко на случай общих эллиптических уравнений второго порядка (не обязательно положительно определенных, как это было во всех известных ранее итерационных процессах) в прямоугольнике с сохранением той же скорости сходимости. Показано, что для уравнения Пуассона с правой частью из W_2^2 при отыскании решения с точностью $O(h^2)$ достаточно выполнения $O(h^{-2})$ арифметических действий, т. е. в этом случае метод становится оптимальным.

Ряд работ посвящен изучению разностных схем задачи на собственные значения (задачи Штурма — Лиувилля)

$$Lu + \lambda r(x)u = 0, \quad x \in G, \quad u = 0, \quad x \in \Gamma \quad (r(x) > 0), \quad (28)$$

где L — самосопряженный эллиптический оператор. Заменяя L разностным оператором Λ , получают задачу

$$\Lambda y + \lambda^h \rho(x)y = 0, \quad x \in \omega_h, \quad y = 0, \quad x \in \gamma_h. \quad (29)$$

Требуется найти те значения параметра λ^h (собственные значения), при которых существуют нетривиальные решения (собственные функции). Пусть $\{\lambda_k, u_k(x)\}$ и $\{\lambda_k^h, y_k\}$ — последовательности собственных значений и собственных функций задач (28) и (29). Представляют интерес следующие вопросы: 1) сходимость λ_k^h и y_k к λ_k и u_k (при фиксированном k), 2) оценка скорости сходимости по h , 3) изучение асимптотического разложения λ_k^h и y_k по h .

Рассмотрим сначала одномерные задачи.

Н. Н. Боголюбов и Н. М. Крылов исследовали (1928 г.) задачу

$$u'' + \lambda r(x)u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad 0 < c_1 \leq r(x) \leq c_2.$$

Для простейшей 3-точечной схемы ими были получены оценки

$$|\lambda_k^h - \lambda_k| \leq M_1(k)h^2, \quad \|y_k - u_k^h\|_c = \max_{\omega_h} |y_k - u_k^h| \leq M_2(k)h^2, \quad (30)$$

где $M_1(k)$, $M_2(k)$ — положительные постоянные, зависящие от λ_k , $r(x)$, $r'(x)$, $r''(x)$; для них даны явные выражения. Н. М. Крылов, рассматривая эту же задачу, нашел (1934 г.) двусторонние оценки для λ_k^h — λ_k^h при условии $r(x) \in C^4(0, 1)$.

А. Н. Тихонов и А. А. Самарский изучали (1961 г.) однородные разностные схемы для уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u + \lambda r(x)u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (31)$$

$$q(x) \geq 0, \quad k(x) > 0,$$

в случае разрывных коэффициентов и краевых условий первого и третьего рода. Получены оценки вида (30). В. Г. Приказчиковым построены (1965 г.) схемы повышенного порядка $O(h^{2m})$ ($m = 2, 3, \dots$) и найдены главные члены асимптотических разложений для λ_k^h и y_k при предположении лишь кусочной непрерывности коэффициентов $k(x)$, $q(x)$, $r(x)$. В. К. Саульев рассматривал (1957 г.) задачу Штурма — Лиувилля для системы одномерных уравнений вида (31) с диагональной матрицей $k(x)$ и разрывными коэффициентами. Предположив, что разрывы находятся в узлах сетки, он получил оценку для $\lambda_1^h - \lambda_1$. В. А. Ефименко (1938 г.), Д. М. Эйдуc (1952 г.), О. А. Ладыженская (1953 г.) изучали вопрос о сходимости разностного метода для многомерных задач. О. А. Ладыженская исследовала разностным методом вопрос о дифференцируемости собственных функций задачи (28) с оператором

$$Lu = \sum_{\alpha, \beta=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) - qu \quad (32)$$

в замкнутой области. Л. А. Люстерник установил (1954 г.) связь собственных значений оператора Лапласа ($\Delta u + \lambda u = 0$, $x \in G$, $u|_r = 0$) и собственных значений задачи $\Lambda u + \lambda^h u = 0$, $x \in \omega_h$, $y|_{\nu_h} = 0$, где Λ — различные аппроксимации двумерного оператора Лапласа. Он доказал равномерную сходимость разностного метода в замкнутой области. В. К. Саульев обобщил (1954 г.) результаты Л. А. Люстерника на m -мерный случай ($m \leq 5$). Им исследована (1955 г.) ско-

рость сходимости собственных чисел для задачи (28) с оператором (32) (сходимость была доказана О. А. Ладыженской). Для случая достаточно гладких коэффициентов при отсутствии смешанных производных он получил оценку $|\lambda_k^h - \lambda_k| \leq M(k) h^{2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ (граничные условия сносились с помощью линейной интерполяции). Для случая общего оператора (32) получена оценка $\lambda_k^h - \lambda_k = O(h)$. Для двумерного оператора (32) (при $p = 2$) без смешанных производных в предположении, что $u_k(x) \in C^{(8)}$, на специальных последовательностях сеток найдена (1957 г.) равномерная оценка $\|y_k - u_k^h\|_C \leq M_{(k)}^{h^2}$. Для оператора (32) без смешанной производной и любого p В. Г. Приказчиков получил (1965 г.) оценку $|\lambda_k^h - \lambda_k| \leq M(k) h^2$ на неравномерных сетках в случае как гладких, так и разрывных коэффициентов с разрывами на гиперплоскостях, параллельных координатным. В двумерном случае ($p = 2$) для уравнения с постоянными коэффициентами он нашел равномерную оценку $\|y_k - u_k^h\|_C \leq M(k) h^2$.

3

Разностные методы для нестационарных задач

Остановимся кратко на исследованиях, посвященных разностным методам численного решения нестационарных (эволюционных) задач математической физики. Рассмотрим в основном работы, относящиеся к уравнениям параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_p), \quad (33)$$

и гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad (34)$$

где L — эллиптический оператор. Обозначим h_α — шаг по x_α ($\alpha = 1, 2, \dots, p$) сетки ω_h в области G изменения $x = (x_1, \dots, x_p)$, τ — шаг сетки $w_\tau = \{t_j = i\tau\}$ по переменному t , $|h|^2 = h_1^2 + \dots + h_p^2$.

Построение разностных схем для этих уравнений начинается с аппроксимации оператора L разностным оператором Λ . Простейшие двухслойные схемы для (33) принадлежат семейству «схем с весами» (для простоты положим $f = 0$)

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y^{j+1} + (1 - \sigma) y^j), \quad (35)$$

где σ — вещественный параметр. При $\sigma = 0$ получаем явную схему

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda y^j, \quad (36)$$

при $\sigma = 1$ — неявную схему с опережением

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda y^{j+1}.$$

Схема (35) с $\sigma = 0,5$ называется симметричной, или схемой Кранка — Никольсона.

Для уравнения гиперболического типа (34) часто используются трехслойные схемы с весами

$$\frac{y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1}}{\tau^2} = \Lambda (\sigma_1 y^{j+1} + \sigma_2 y^j + \sigma_3 y^{j-1})$$

$$(f = 0), \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1.$$

При $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = 0$ получаем явную схему с погрешностью аппроксимации $O(\tau^2 + |h|^2)$.

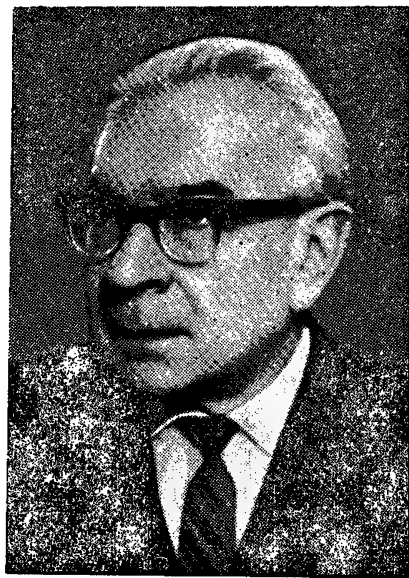
В течение длительного времени основным объектом изучения были уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами, которые служили (в соответствии с принципом замороженных коэффициентов) моделью для уравнений с переменными коэффициентами. Простейшим схемам — явной схеме и схеме с опережением (для которой принцип максимума справедлив при любых τ и h) — для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами посвящено большое количество исследований советских математиков (Л. И. Камынин, П. И. Коваль, Л. А. Люстерник, Н. Н. Мейман, Ш. Е. Микеладзе, Д. Ю. Панов, И. Г. Петровский, В. С. Рябенкий и А. Ф. Филиппов, В. К. Саульев, П. П. Юшков и др.). Результаты этих исследований изложены в книге В. К. Саульева «Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток» (1960 г.), где приведена также подробная библиография до 1960 г. Исследование устойчивости проводилось либо методом разделения переменных, либо с помощью принципа максимума. Изучались явные схемы на косоугольных (треугольных, шестиугольных, параллелограммных) и полярных сетках (Л. А. Люстерник, 1954 г.; П. П. Юшков, 1957 г.).

Было установлено, что неявные схемы (при $\sigma \geq \frac{1}{2}$) обладают свойством безусловной (при любых $\frac{\tau}{h^2}$) устойчивости. Однако при их использовании для определения y^{j+1} на новом слое получаются системы разностных уравнений. В случае одномерного уравнения теплопроводности ($p = 1$) получается система уравнений с трехдиагональной матрицей. Для ее решения, как указывалось выше, следует применять метод прогонки.

Чтобы избавиться от необходимости решать разностные уравнения на новом слое, В. К. Саульев предложил (1957 г.) асимметричные схемы, устойчивые при любых h и τ и приводящие к системам алгебраических уравнений с двухдиагональной матрицей. Решение такой системы находится по рекуррентным 2-точечным формулам (бегущего счета). Чередую две асимметричные схемы, В. К. Саульев получил перемежающуюся схему, безусловно устойчивую и имеющую точность $O(h^2 + \tau^2/h^2) = O(h^2)$ при $\tau = O(h^2)$.

Ш. Е. Микеладзе (1936 г.), П. П. Юшков (1943 г.) рассматривали трехслойные явные схемы $O(h^4 + \tau^2)$. Безусловно устойчивая схема повышенного порядка точности $O(\tau^2 + h^4)$ для одномерного урав-

нения теплопроводности с постоянными коэффициентами ($Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$) рассматривалась И. М. Гельфандом и О. В. Локуциевским (1952 г.), В. К. Саулевым (1960 г.). А. А. Самарский построил (1963 г.) схему повышенного порядка точности для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами $Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ и доказал ее равномерную сходимость со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$. П. П. Юшков и Л. И. Логинов получили (1958 г.) явные схемы для двумерного и трехмерного уравнений теплопроводности ($Lu = \Delta u$), имеющие точность $O(h^4)$ при заданном значении τ/h^2 .



П. П. Юшков.

А. А. Самарский построил и исследовал (1958—1962 гг.) однородные разностные схемы для уравнений и систем уравнений параболического типа с переменными коэффициентами, а также для квазилинейных уравнений ($Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$, $f = f(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})$). Аппарат априорных оценок позволил изучить вопросы, связанные с устойчивостью и точностью для неявных схем с весами в случае разрывных коэффициентов, неравномерных сеток и краевых условий общего вида (например, $C \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x} - \beta u$ при $x = 0$). А. А. Самарский, И. В. Фрязинов исследовали (1961 г.) сходимость и получили оценку порядка точности для однородных схем в случае уравнения теплопроводности с коэффициентами, имеющими разрывы первого рода на конечном числе кривых (движущиеся разрывы).

Однородные разностные схемы с весами для одномерного уравнения теплопроводности с нелинейными краевыми условиями изучались (1965 г.) И. Г. Белухиной. В. Ф. Баклановская доказала (1961 г.) сходимость (к обобщенному решению) явной схемы сквозного счета для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi(u)}{\partial x^2}, \quad \Phi(u) \geq 0,$$

в случае, когда $\Phi(0) = 0$.

Сходимость разностных методов и вопросы существования, единственности и устойчивости решения для некоторого класса обратных краевых задач с неизвестными коэффициентами в случае уравнений параболического типа рассматривались (1966, 1967 гг.) Б. М. Будаком и А. Д. Искендеровым.

В связи с применением ЭВМ, возможностью использования сеток с большим числом узлов, а также в связи с необходимостью проведения серийных расчетов особую остроту приобрел вопрос о числе арифмети-

ческих действий, затрачиваемых для получения приближенного решения с заданной точностью. Поясним это на примере уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha} u, \quad L_{\alpha} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2}. \quad (37)$$

Наиболее проста явная схема

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} y^j, \quad \Lambda_{\alpha} y^j = \Lambda_{x_{\alpha} x_{\alpha}}^j.$$

Решение y^{j+1} на каждом слое находится по явным формулам с затратой числа $O\left(\frac{1}{h^p}\right)$ действий, пропорционального числу узлов сетки. Однако явная схема устойчива лишь при достаточно малом шаге $\tau \leq \leq \frac{h^2}{2p}$. Если коэффициенты уравнения переменны, т. е. $L_{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right)$, то условие устойчивости принимает вид $\tau \leq \frac{h^2}{2pc^*}$, где c^* — максимум коэффициентов $k_{\alpha}(x, t)$. Неявная схема

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} y^{j+1} = \Lambda y^{j+1} \quad (38)$$

устойчива при любых τ и h_{α} . Однако процесс определения y^{j+1} из уравнения $y^{j+1} - \tau \Lambda y^{j+1} = y^j$ очень трудоемкий, в то время как в случае явной схемы решение находится очень просто и достаточно выполнения числа $O\left(\frac{1}{h^p}\right)$ действий (пропорционального числу узлов). Лишь в одномерном случае ($p = 1$) число действий для неявной схемы пропорционально числу узлов сетки (как и для явной схемы). Поэтому возник вопрос о возможности построения схем, устойчивых при любых τ и h и требующих на каждом слое числа действий, пропорционального числу узлов сетки (как в случае явной схемы). Такие схемы называются экономичными.

Первая экономичная схема (неявный метод переменных направлений) для двумерного уравнения теплопроводности была построена, как отмечалось выше, в 1955 г. американскими учеными Писменом, Рекфордом и Дугласом. Она имеет вид

$$\frac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^j, \quad \frac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^{j+1}. \quad (39)$$

По этой схеме решение на промежуточном $(j + \frac{1}{2})$ -м слое ищется прогонкой по строкам с затратой числа $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ действий, а на $(j + 1)$ -м слое — прогонкой по столбцам с таким же числом действий. Так как

эта схема, кроме того, устойчива при любых τ и h_α , то она экономична.

В. К. Саульев предложил (1957 г.) аналогичную схему для осесимметричного уравнения теплопроводности в цилиндрических координатах, а также перемежающуюся схему бегущего счета, которая может быть записана в виде (39), если положить

$$\Lambda_1 y = \frac{1}{h_1} y_{x_1}^- + \frac{1}{h_2} y_{x_2}^-, \quad \Lambda_2 y = -\frac{1}{h_1} y_{x_1} - \frac{1}{h_2} y_{x_2},$$

где $y_{x_\alpha}^-$ — левая, y_{x_α} — правая разностные производные по x_α . Вычисление $y^{j+\frac{1}{2}}$ и y^{j+1} проводится по явным формулам. Схема, как показано (1964 г.) А. А. Самарским, имеет точность $O\left(h^2 + \frac{\tau^2}{h^2}\right)$ ($h_1 = h_2 = h$).

К. А. Багриновский и С. К. Годунов для получения устойчивых схем, соответствующих многомерным дифференциальным уравнениям, предложили (1957 г.) использовать устойчивые схемы, построенные для одномерных уравнений. Метод исследования основан на расщеплении (факторизации) разностного оператора на одномерные операторы. Одна из полученных схем в дальнейшем была использована (1961 г.) С. К. Годуновым, А. В. Забродиним и Г. П. Прокоповым при численном решении двумерных нестационарных задач газовой динамики.

Для решения уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами Н. Н. Яненко, отправляясь от естественной многомерной разностной схемы с весами, предложил (1959 г.) использовать схему, которая в двумерном случае имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{\tau} &= \sigma \Lambda_1 y^{j+\frac{1}{2}} + (1 - \sigma) \Lambda_1 y^j, \\ \frac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \sigma \Lambda_2 y^{j+1} + (1 - \sigma) \Lambda_2 y^{j+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

где σ — весовой множитель, $y^{j+\frac{1}{2}}$ — промежуточное значение. На каждом этапе вычислений применяется схема с весами, соответствующая одномерному уравнению теплопроводности. Этот метод (сформулированный для p измерений) назван методом расщепления. В следующей работе (1960 г.) Н. Н. Яненко предлагает формальное обобщение схемы (40) для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u,$$

где L_α — любой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, и для характеристики метода вводит термин «метод дробных шагов».

Н. Н. Яненко совместно с В. А. Сучковым и Ю. Я. Погодиным рассмотрел (1959 г.) схемы расщепления (дробных шагов) для двумерного

уравнения теплопроводности со смешанными производными

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha, \beta=1}^p a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad a_{\alpha\beta} = \text{const.}$$

Н. Н. Анучина и Н. Н. Яненко (1959 г.), Н. Н. Анучина (1966 г.) исследовали ряд схем расщепления для уравнений и систем уравнений гиперболического типа.

Указанные выше работы американских ученых и Н. Н. Яненко относятся к уравнениям с постоянными коэффициентами в пространственных областях простейшего вида (прямоугольник, параллелепипед).

Для характеристики соответствия схемы данному дифференциальному уравнению необходимо определить, в каком смысле эта схема аппроксимирует дифференциальное уравнение. Все указанные выше исследователи поступали следующим образом. Из (39) и (40) исключали промежуточное значение $y^{j+\frac{1}{2}}$ (что в случае (40) возможно лишь при условии перестановочности операторов Λ_1 и Λ_2). Это приводило к схеме «в целых шагах», которую можно записать в виде

$$A_1 A_2 \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda y^j, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad A_\alpha = E - \sigma \tau \Lambda_\alpha, \quad (41)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots,$$

где E — единичный оператор (в случае (39) $\sigma = 0,5$). Под погрешностью аппроксимации для методов (39) и (40) понималась погрешность аппроксимации для схемы в целых шагах (41). Тем самым каждый из методов (39) и (40) фактически трактовался как вычислительный алгоритм, реализующий схему (41).

Эквивалентность разностных уравнений (39)—(41) существует при определенном способе задания краевых условий для промежуточных значений или при специальном способе задания правых частей уравнения в приграничных узлах. На это впервые (1962 г.) обратил внимание Е. Г. Дьяконов. Он указал также на трудности, связанные с учетом правых частей в схеме (40).

Для схем в целых шагах, получающихся после исключения промежуточных (дробных) значений, характерно то, что оператор, действующий на y^{j+1} (оператор на верхнем слое), факторизован, т. е. представляет собой произведение операторов более простой структуры (одномерных операторов.)

В качестве исходных схем, аппроксимирующих многомерное дифференциальное уравнение, Е. Г. Дьяконов предложил (1962, 1964, 1965 гг.) рассматривать схемы с оператором A на верхнем слое, представимом в виде произведения операторов $A_1, A_2, \dots, A_p$ меньшей размерности (дается специальное определение размерности оператора):

$$A_1 A_2 \dots A_p y^{j+1} = F(y^j, y^{j-1}, \dots), \quad (42)$$

например $A_\alpha = E - \sigma \tau \Lambda_\alpha$. Полученная система уравнений решается путем последовательного обращения операторов $A_1, A_2, \dots, A_p$. Например,

можно воспользоваться алгоритмом

$$A, y^{j+\frac{1}{p}} = F, \quad A_{\alpha} y^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}, \quad \alpha = 2, \dots, p.$$

Так, для p -мерного уравнения теплопроводности рассматривалась схема вида

$$\frac{1}{\tau} A_1 \dots A_p y^{j+1} = \frac{1}{\tau} B y^j + \varphi^j,$$

где оператор B выбирался из условий аппроксимации и устойчивости.

Е. Г. Дьяконов назвал схемы вида (42) схемами с расщепляющимися операторами. Он предложил много схем (двухслойных и трехслойных) с расщепляющимся оператором для уравнений и систем параболического типа второго порядка (первая краевая задача), для уравнений высокого порядка (задача Коши с периодическими начальными условиями), а также для интегро-дифференциальных уравнений. Им рассматривались уравнения с переменными и постоянными коэффициентами. Предложен алгоритм, реализующий схему с расщепляющимся оператором в области, составленной из прямоугольников сторонами, параллельными осям координат.

Методами энергетических неравенств исследованы устойчивость и сходимость (для метода (39) впервые это было сделано Лизом). Получены априорные оценки в различных нормах, главной частью которых является норма как на слое, так и во всей области.

В. Б. Андреевым построена (1966 г.) экономичная схема $O(|h|^2 + \tau^2)$ с расщепляющимся оператором для уравнения теплопроводности в p -мерном параллелепипеде, на границе которого заданы краевые условия третьего рода. Другая схема для третьей краевой задачи построена (1966 г.) Е. Г. Дьяконовым и В. И. Лебедевым. В. Б. Андреев предложил (1966 г.) двухслойные и трехслойные экономичные схемы для параболического уравнения общего вида, устойчивые при естественном условии параболичности. Для получения устойчивых схем с факторизованным (расщепляющимся) оператором А. А. Самарский предложил (1963 г.) процедуру перехода от многомерных схем с весами (факторизацию оператора на верхнем слое в схеме, записанной в канонической форме). Он исследовал ряд двухслойных и трехслойных схем повышенного порядка точности $O(\tau^2 + h^4)$ для многомерного уравнения теплопроводности с постоянными и переменными коэффициентами. Е. Г. Дьяконов рассматривал (1965 г.) аналогичные схемы для системы параболических уравнений с коэффициентами, зависящими только от t . В. Б. Андреев, пользуясь полученными им оценками в W_2^2 на слое и разностными теоремами вложения, доказал (1966 г.) равномерную сходимость ряда схем переменных направлений, в том числе схем повышенного порядка точности.

Для уравнений и систем гиперболического типа в прямоугольных областях различные экономичные схемы построены и исследованы Е. Г. Дьяконовым (1963 г.), А. Н. Коноваловым (1964 г.), А. А. Самарским (1964, 1965 гг.).

Во всех указанных выше работах рассматривались пространственные области простейшего вида — прямоугольники или параллелепипеды, хотя некоторые из алгоритмов, например (39) и (40), формально можно было бы использовать и в случае произвольной области. Ограничения, налагаемые на область их применения, как оказалось в дальнейшем, были связаны с определением понятия аппроксимации. Чтобы распространить эти алгоритмы на произвольную область и получить экономичные методы решения более широкого класса уравнений математической физики, в том числе квазилинейных, понадобилось новое определение схемы. А. А. Самарский предложил (1962 г.) для построения экономичных схем следующий прием.

Исходная многомерная задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad L = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha}, \quad (43)$$

в каждом интервале $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ заменяется системой одномерных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial t} &= L_{\alpha} v_{\alpha} + f_{\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, p; \\ t_j + \frac{\alpha-1}{p} &\leq t \leq t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha\tau}{p}; \quad \sum_{\alpha=1}^p f_{\alpha} = f, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

каждое из которых затем аппроксимируется с помощью простейших устойчивых разностных схем (локально одномерный метод), например двухслойных (или трехслойных) схем с весами. При таком подходе к построению экономичных разностных схем оказывается, что обычное определение схемы не рациональное, в связи с чем вводится понятие суммарной аппроксимации.

Локально одномерная схема для многомерного уравнения определяется как система p промежуточных схем, каждая из которых аппроксимирует уравнение (44) (с погрешностью аппроксимации $\psi_{\alpha}(u)$). Погрешность аппроксимации ψ на решении уравнения (43) для локально одномерной схемы определяется как сумма $\psi = \psi_1 + \dots + \psi_{\alpha} + \dots + \psi_p$. Хотя $\psi_{\alpha} = O(1)$, однако $\psi \rightarrow 0$ при $h_{\alpha} \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$. А. А. Самарским построен ряд экономичных однородных по пространству и циклически однородных по времени разностных схем для уравнений параболического типа с переменными коэффициентами в произвольной области любого числа измерений, для систем уравнений параболического и гиперболического типов, для квазилинейных уравнений параболического типа

$$L_{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha}(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right), \quad f = f(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_p}).$$

В частности, новая трактовка схем, предложенных Н. Н. Яненко, позволила (при любом $\sigma \geq 0,5$) освободиться от требований перестановочности операторов Λ_1 и Λ_2 , указать способ вычисления правых частей для промежуточных шагов и доказать устойчивость и сходимость модифицированных схем (опираясь на свойство суммарной аппроксима-

ции) в случае произвольной области. Класс схем любой природы, обладающий свойством суммарной аппроксимации, назван аддитивными схемами.

При доказательстве устойчивости и сходимости аддитивных схем применяется специальный метод априорных оценок, ориентированный на использование свойства суммарной аппроксимации. В случае линейного и квазилинейного параболических уравнений без смешанных производных доказана равномерная безусловная сходимость со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$.

Для однородного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами в случае прямоугольной области Н. Н. Яненко установил (1962 г.) методом исключения сходимости в L_2 схемы (40) при $\sigma = 0,5$ со скоростью $O(\tau^\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, при фиксированном отношении τ/h^2 . Исследования Н. Н. Яненко были продолжены (1966 г.) Ю. Е. Бояринцевым. Результаты Н. Н. Яненко и его учеников изложены в книге Н. Н. Яненко «Метод дробных шагов» (курс лекций, 1966 г., ротационное издание).

Третья краевая задача для параболических и гиперболических уравнений в p -мерном параллелепипеде рассматривалась И. В. Фрязиновым. Им указан способ аппроксимации краевых условий, обеспечивающий второй порядок точности по τ для локально одномерных схем. Для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами и областей, составленных из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, построены (1963 г.) схемы, которые являются обобщением схемы (39) и точность которых составляет $O(h^2 + \tau^2)$ и $O(h^4 + \tau^2)$ в случае первой и третьей краевых задач. В этой же работе И. В. Фрязинов рассматривает методы, обобщающие локально одномерный метод и метод (39) на случай третьей краевой задачи для некоторого класса областей с криволинейными границами. Схема (39) трактуется им как аддитивная.

Для получения экономичных схем второго порядка С. К. Годунов и А. В. Забродин предложили (1962 г.) метод симметризации и применили его к системе уравнений акустики в случае двух измерений. Другой метод симметризации был предложен (1965 г.) А. А. Самарским и развит (1966 г.) И. В. Фрязиновым при построении аддитивных схем $O(h^2 + \tau^2)$ и $O(h^4 + \tau^2)$, являющихся обобщением схемы (39) для трех и большего числа измерений. И. В. Фрязинов сформулировал достаточные условия общего вида, при которых аддитивная схема имеет второй порядок точности по τ . Ряд экономичных схем для двумерного параболического уравнения со смешанными производными построен И. Д. Софроновым (1963, 1965 гг.), а для уравнений высокого порядка — Д. Г. Гордезиани (1965 г.). Развитию экономичных методов решения многомерных задач математической физики посвящены работы Г. И. Марчука и Н. Н. Яненко (1966 г.) и А. А. Самарского (1966, 1967 гг.).

Различные варианты экономичных методов применялись для численного решения разнообразных задач математической физики. Укажем некоторые из них.

Для численного решения системы квазилинейных уравнений прогноза погоды экономичные методы были разработаны и реализованы Г. И. Марчуком и его учениками; для динамических и статистических задач теории упругости — А. Н. Коноваловым, Т. Б. Буриевым, для задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости — Л. А. Чудовым, Н. Н. Яненко, Б. Г. Кузнецовым, Н. Владимировой и др., для многомерной задачи о движении границ фазовых переходов — Б. М. Будаком, В. Ф. Васильевым, Б. Д. Моисеенко, А. А. Самарским, В. А. Успенским и др., для интегро-дифференциального уравнения переноса — Г. И. Марчуком, Н. Н. Яненко, В. Я. Гольдиным, Н. Н. Калиткиным, В. В. Пененко, У. М. Султангазиным и др.

Весьма существенное продвижение достигнуто в нелинейных задачах типа Стефана, приводящих к нелинейным задачам теплопроводности с подвижными границами (внутренними и внешними), положение которых подлежит определению. В работах Б. М. Будака и его учеников рассматривается применение разностных методов для решения задач типа Стефана в одномерном и многомерном случаях при наличии одного или нескольких фронтов. Исследован ряд методов: метод выпрямления фронтов, метод «ловли фронта в узел» и метод сглаживания. Из полученных в этих работах теоретических результатов отметим доказательство (проведенное методом конечных разностей) существования классического решения для уравнений с квазилинейной главной частью, а также сходимости неявных схем со сглаживанием в варианте локально одномерного метода в многомерном случае. Для многофронтных задач доказана сходимость неявных схем с выпрямлением фронтов и получена оценка скорости сходимости. А. А. Самарским и Б. Д. Моисеенко предложен (1965 г.) также экономичный разностный метод сквозного счета для многомерной задачи Стефана (с любым числом фронтов), основанный на «размазывании» или «сглаживании» энтальпии и коэффициента теплопроводности. Основными конструктивными элементами всех указанных методов решения задач типа Стефана являются однородные разностные схемы для одномерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.

Другие методы решения дифференциальных уравнений

1

Метод характеристик

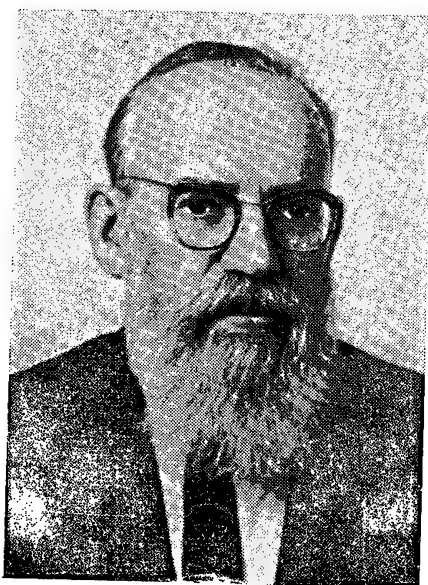
Применение метода сеток при решении нелинейных задач для гиперболических уравнений и систем сопряжено с очевидными трудностями в тех случаях, когда заранее неизвестна область существования решения. Например, в случае системы двух квазилинейных уравнений относительно неизвестных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$

$$\begin{aligned} a_{11}u_x + a_{12}v_x + b_{11}u_y + b_{12}v_y &= f_1, \\ a_{21}u_x + a_{22}v_x + b_{21}u_y + b_{22}v_y &= f_2, \end{aligned}$$

где a_{ij} , b_{ij} , f_i ($i, j = 1, 2$) — заданные функции от x, y, u, v , область существования решения задачи Коши (и других задач) связана с характеристическими кривыми, зависящими, вообще говоря, и от решения задачи (подробнее о характеристиках и дифференциальных соотношениях на них см., например, в статье И. М. Гельфанда, 1959 г.). Предпочтительным здесь является численное интегрирование вдоль этих линий, которое и лежит в основе метода характеристик. Используется сетка, аппроксимирующая характеристические кривые, и предполагается, как правило, одновременное построение сетки и приближенного решения. Сетка строится численным интегрированием уравнений направления характеристик, а приближенное решение задачи находится численно из дифференциальных соотношений на них, содержащих, по существу, дифференцирование лишь по одному направлению. Простейшей схемой метода характеристик является метод Массо. Он основан на замене участков характеристик отрезками прямых в направлении этих характеристик, а дифференциалов, входящих в соотношения на них, — конечными приращениями. Таким образом, по двум соседним точкам предыдущего слоя сетки характеристик и по значениям решения задачи в них представляется возможность найти приближенно точку следующего слоя и значения решения в ней. В дальнейшем метод Массо улучшался (см., например, работы С. А. Христиановича, 1938 г.). В основном способы уточнения метода являются итерационными, при этом найденные по простейшей схеме значения искомых величин служат исходными приближениями процесса итераций, основанного на различных вариантах осреднения. Построению более точных схем метода характеристик посвящены работы (1957 г.) Д. Ю. Панова. Они основаны на том, что дуги характеристик аппроксимируются не отрезками прямой, а участками парабол второй или третьей степени, а при аппроксимации дифференциальных соотношений на характеристиках учитываются также члены высших порядков. Для уточнения найденных значений и здесь используется применяемый обычно итерационный процесс, но он основан на формулах механических квадратур, более точных, чем формула трапеций. Такой подход требует привлечения на каждой характеристике не одной, а нескольких предшествующих точек, что, естественно, делает вычислительные схемы более громоздкими и осложняет построение начальных слоев сетки. Ф. Г. Цхадая несколько видоизменил (1962 г.) схемы Д. Ю. Панова, предложив для уточнения узлов сетки характеристик использовать итерации высших порядков. Различные схемы метода характеристик с успехом применялись при решении конкретных задач математической физики (см.,



Д. Ю. Панов.



К. А. Семендяев.

например, работы А. Ф. Гаврилова, 1933 г.; С. А. Христиановича, 1938 г.; В. В. Соколовского, 1942 г.; В. С. Владимиров, 1958 г.; П. И. Чушкина, 1960 г.; Г. И. Марчука, 1961 г.; О. Н. Кацковой, И. Н. Наумовой, Ю. Д. Шмыглевского, 1961 г.; С. К. Годунова, К. А. Семендяева, 1962 г.). При этом в отдельных случаях проводились и исследования метода. Например, А. И. Жуков в случае одномерных задач газовой динамики рассматривал (1960 г.) различные способы оценки погрешности. В. И. Лебедев при решении методом характеристик односкоростного кинетического уравнения предложил и исследовал (1966 г.) интересный метод ускорения сходимости итераций. В. В. Бобков для задачи Гурса в случае выписанной системы двух уравнений, когда коэффициенты a_{ij} и b_{ij} ($i, j = 1, 2$)

зависят только от x и y , построил (1965 г.) схему метода характеристик с использованием идеи метода интегральных соотношений и получил оценки погрешности его, гарантирующие равномерную сходимость второго порядка. Подобные результаты для задачи Коши получены (1966 г.) Нгуен Конг Туем.

2

Методы понижения размерности задач

Рассмотрим группу методов приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных, которые назовем условно методами понижения размерности задач. Такое название подчеркивает основной признак, по которому они объединены. Наиболее типичным из них является метод прямых (гиперплоскостей). Во многом он близок к методу сеток, но в отличие от последнего замена производных разностными аппроксимациями здесь производится лишь по части независимых переменных. Остальные же производные сохраняются, т. е. дифференциальная задача аппроксимируется также дифференциальной задачей, но меньшей размерности. Относительная простота аппроксимирующих задач позволяет использовать метод прямых как аппарат при исследовании исходных дифференциальных задач для уравнений в частных производных (см., например, работы О. А. Ладженской, О. А. Олейник, А. М. Ильина, А. С. Калашникова, Т. Д. Вентцель и др.). На таких исследованиях, относящихся больше к общей теории уравнений в частных производных, мы останавливаться не будем. Сведения о них можно найти, например, в обзорах

М. И. Вишика, А. Д. Мышкиса, О. А. Олейник (1959 г.) и О. А. Лисковца (1965 г.).

Первым из советских математиков применил (1939 г.) метод прямых для численного решения прикладных задач М. Г. Слободянский. Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в прямоугольнике $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, $y_0 \leq y \leq y_0 + b$ он аппроксимирует на равномерной решетке прямых $y = y_n = y_0 + nh$, $n = 1, 2, \dots, N - 1$ ($h = \frac{b}{N}$), $x_0 \leq x \leq x_0 + a$, системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_n''(x) + \frac{u_{n+1}(x) - 2u_n(x) + u_{n-1}(x)}{h^2} = 0,$$

$$n = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (u_k(x) \approx u(x, y_k)),$$

разрешимой, например, в случае краевых условий первого рода. В этой же работе он строит путем линейного комбинирования систем, подобных выписанной, и более точные схемы метода. Несколько позднее (1940 г.) М. Г. Слободянский указывает вид общих решений построенных им аппроксимирующих систем, а также строит схемы метода прямых и общие решения соответствующих однородных систем для разнообразных задач теории упругости как на плоскости, так и в пространстве. Исследования такого характера для эллиптических уравнений были продолжены В. Н. Фаддеевой (1949 г.), Л. П. Винокуровым (1949 г.), А. Лангенбахом (1956 г.), Я. И. Алихашкиным (1957 г.), А. В. Буледзой (1962 г.), Е. О. Омаровым (1963 г.), В. Т. Ивановым (1965 г.), Т. Л. Мартыновичем, Б. М. Кордубой (1966 г.) и др. При этом метод прямых применялся не только в прямоугольных декартовых координатах. Например, Н. Н. Устинова (1955 г.), В. И. Лебедев (1955 г.) и С. В. Немчинов (1962 г.) в случае уравнений Лапласа, Пуассона и Гельмгольца с успехом использовали полярные координаты, Л. П. Винокуров (1956, 1961 гг.) кроме прямоугольных декартовых и полярных использовал косоугольные декартовы, цилиндрические и сферические координаты (см. также работы К. Е. Чернина, 1959 г.; В. Т. Иванова, 1966 г.; и др.). Применение метода прямых для эллиптических уравнений в случае областей, отличных от прямоугольных, сопряжено со следующей трудностью: если спроектировать на ось координат внутреннее сечение области n -й прямой и полученное множество обозначить g_n , то все g_n совпадут при любом числе прямых только в случае соответствующим образом ориентированного прямоугольника, т. е. в общем случае уравнение схемы, связывающее значения неизвестной функции на прямых $y = y_k$ ($k = n - p, n - p + 1, \dots, n + q$), без дополнительного определения задано лишь на пересечении $G_n = \bigcap_{-p \leq i \leq q} g_{n+i}$. На это обратил внимание Е. Х. Костюкович. Он показал (1957 г.), что если даже считать уравнения схемы выполняющимися и вне G_n (именно это обычно и предполагалось в некоторых из предыдущих работ) и, записав общее решение схемы, попытаться

из краевых условий определить входящие в него константы, то оказывается, что это не всегда возможно. Е. Х. Костюкович предложил способ преодоления таких затруднений, распространил (1965 г.) его на случай общего линейного эллиптического уравнения второго порядка в многомерной области, отличной от прямого цилиндра, и доказал сходимость метода. Первая попытка доказать сходимость метода прямых для уравнения Лапласа была предпринята (1940 г.) М. Г. Слободянским. В основу исследования им было положено использование принципа максимума для построенной схемы. В. И. Лебедев построил (1955 г.) в случае уравнения Пуассона схемы, подобные схемам М. Г. Слободянского, и, опираясь на теоремы вложения, доказал сходимость метода. В. Т. Ивановым с помощью принципа максимума доказана (1965—1967 гг.) сходимость и получены оценки погрешности метода прямых для широкого круга задач в случае уравнений эллиптического типа с гладкими и разрывными коэффициентами. В. Н. Абрашин, используя спектральный анализ, получил (1967 г.) среднеквадратичные оценки погрешности метода прямых для простейшей схемы и для схемы повышенной точности в случае некоторых эллиптических задач. Вопросами сходимости рассматриваемого метода для эллиптических уравнений занимались также Э. И. Сармин (1965 г.), И. П. Семенов (1966 г.), А. Д. Ляшко, М. М. Карчевский (1967 г.) и др.

Для приближенного решения краевых задач в случае уравнений параболического типа первой была применена так называемая схема Роте, т. е. вычислительная схема метода прямых, соответствующая случаю простейшей левосторонней замены производной по времени (с такими схемами связано и первое упоминание — 1930 г. — о методе прямых вообще). Схема Роте принадлежит к группе поперечных схем, в которых прямые (гиперплоскости) располагаются поперек оси времени. А. А. Самарский доказал (1959 г.) равномерную сходимость схемы Роте в случае уравнения $u_t = (k(x, t) u_x)_x + f(x, t)$ с разрывным кусочно-гладким коэффициентом $k(x, t)$. Е. Х. Костюкович, продолжая рассмотрение проблемы, упомянутой в случае эллиптических уравнений, исследовал сходимость схемы Роте в областях $\varphi_1(t) \leq x \leq \varphi_2(t)$, $0 \leq t \leq T$, для уравнений частного вида. В. В. Бобков и О. А. Лисковец, используя принцип максимума и метод мажорант, доказали (1967 г.) равномерную сходимость и получили точные оценки погрешности метода Роте в случае третьей краевой задачи для общего линейного параболического уравнения со знакопостоянным младшим коэффициентом. Эти результаты обобщаются на случай многомерных (не обязательно линейных) уравнений с разрывными коэффициентами. В случае поперечных схем более общего вида

$$\sum_{i=0}^m A_i u_{n+i}(x) = h^k \sum_{i=0}^m B_i [l(u_{n+1}) + f(x, t_{n+i})]$$

с вещественными коэффициентами A_i , B_i для уравнения

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = l(u) + f(x, t)$$

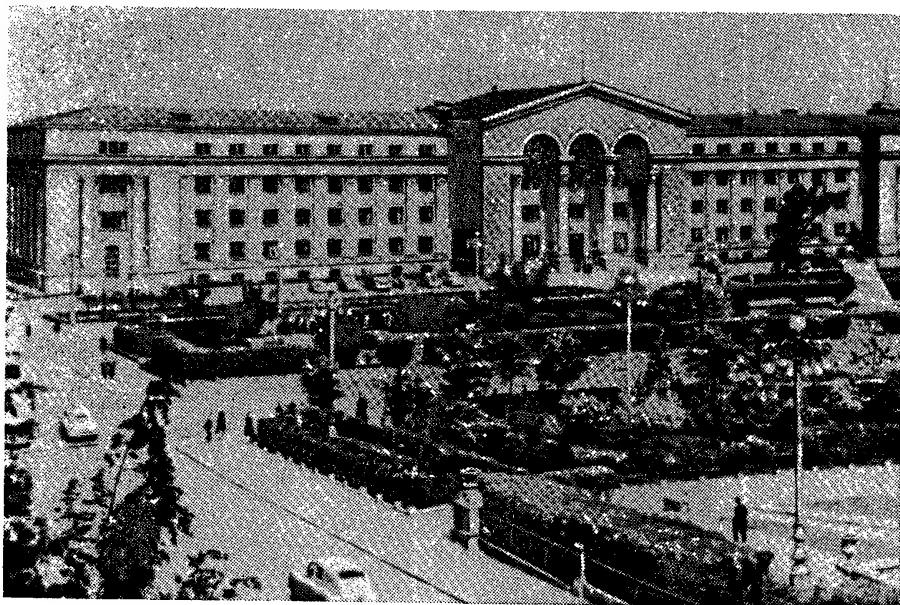
при некоторых дополнительных условиях, используя спектральный анализ в гильбертовом пространстве, В. И. Крылов и О. А. Лисковец получили (1964 г.) оценки среднеквадратичной погрешности. При этом ни порядок производной по времени, ни размерность пространства, ни порядок дифференциальной операции l не играют определяющей роли, а существенно лишь, чтобы операция l вместе с соответствующими задаче однородными краевыми условиями определяла линейный оператор одних лишь пространственных переменных, самосопряженный и ограниченный сверху в L_2 (результаты переносятся и на задачу Коши). Оценки погрешности в равномерной метрике для подобных схем получены (1967 г.) В. Н. Абрашиным. Р. П. Васильев исследовал (1967 г.) сходимость поперечных схем при решении задач типа Стефана. Кроме того, поперечные схемы особенно широко использовались в упомянутых выше теоретических исследованиях для уравнений в частных производных. Однако в прикладных вопросах наибольшее развитие получили продольные схемы метода прямых, в которых аппроксимируются производные не по времени, а по пространственным переменным. Такие схемы приводят к задаче Коши, а не к краевым задачам, как поперечные. Л. И. Камынин посвятил (начиная с 1952 г.) много работ применению продольных схем к задаче Коши для уравнений вида

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \frac{\partial^m u}{\partial x^m}, \quad k \geq 1, \quad m \geq 2.$$

Он получил условия однозначной разрешимости различных схем метода прямых (подобные исследования проводили также Г. И. Басс, 1955 г., и Б. Л. Гуревич, 1956 г.), для некоторых схем с помощью преобразования Фурье построил явное решение в виде ряда, а также в отдельных случаях доказал сходимость схемы. В. И. Лебедев, используя дифференциально-разностный аналог интеграла энергии и теоремы вложения, доказал (1953 г.) сходимость аппроксимаций почти всюду в прямоугольнике к обобщенному решению краевых задач с нулевыми условиями всех трех типов для простейшего неоднородного уравнения теплопроводности. Б. М. Будаков не только доказал (1956 г.) для отдельных краевых задач в случае простейших продольных схем сходимость, но и с помощью интеграла энергии получил равномерную оценку погрешности метода. Эти же идеи, а также оценки С. М. Лозинского (1958 г.) неоднократно использовались Б. М. Будаковым (1961, 1962 гг.) и В. А. Морозовым (1962, 1964, 1966 гг.) при исследовании параболических задач, в том числе с разрывными элементами и квази-



М. Г. Слободянский.



Уральский государственный университет им. А. М. Горького.

линейных. Исследованию продольных схем метода прямых в случае параболических уравнений посвящены также работы Л. Ф. Рахматулиной (1958 г.), Г. М. Комладзе (1959 г.), Э. Я. Демьяшкиной (1965 г.) и др.

При исследовании схем метода прямых в случае задачи Коши и смешанных задач для гиперболических уравнений наблюдаются большие аналогии со сходными задачами для параболических уравнений. Почти все методы и идеи, использовавшиеся для параболических уравнений (кроме принципа максимума), пригодны и в гиперболическом случае. Поэтому большинство результатов, упомянутых при рассмотрении параболических уравнений, были распространены их авторами и на гиперболический случай. Особую группу составляют задачи для уравнений в канонической форме $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$, для которых среди параболических уравнений нет прямых аналогий. Б. М. Будаков (1956 г.) простейшую схему для задачи Гурса в случае уравнения $u_{xy} = f(x, y, u)$ и последовательным мажорированием решений уравнений для погрешности получил ее оценку. Подобная оценка для линейного канонического уравнения без производной u_x получена (1959 г.) Г. М. Комладзе. Для уравнения

$$u_{xy} = a(x, y) u_x + f(x, y, u, u_y)$$

В. И. Крылов и О. А. Лисковец исследовали (1963 г.) с помощью априорной оценки решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений сходимость и получили оценки погрешности более общих схем

$$\sum_{i=0}^m A_i [u'_{n+i}(y) - a(x_{n+i}, y) u_{n+i}(y)] = h \sum_{i=0}^m B_i [f(x_{n+i}, y, u_{n+i}(y), u'_{n+i}(y)) - a_x(x_{n+i}, y) u_{n+i}(y)], \quad m \geq 1.$$

Из таких схем они рассматривали лишь устойчивые, для которых все корни многочлена $\sum_{i=0}^m A_i z^i$ принадлежат единичному кругу, причем на его границе допускаются лишь простые корни. Более общая задача с данными на прямой $x = 0$ и на кривой $y = g(x)$ ($g(0) = 0$, $g'(x) \geq 0$) для уравнения $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ рассмотрена (1958 г.) Б. М. Будаком и А. Д. Горбуновым. Для простейшей схемы, соответствующей левосторонней замене производных по x , ими исследована сходимость и получена оценка погрешности метода. Эту же задачу как частный случай задачи Пикара изучал (1964 г.) О. А. Лисковец для более общих схем. Он исследовал также применение двухслойных схем метода прямых к решению задачи Коши и некоторых других задач для гиперболических уравнений канонического вида.

Метод прямых с успехом применялся и к уравнениям смешанного типа. И. А. Кодачигов, например, построил (1961 г.) общее решение схемы метода для уравнения Лаврентьева — Бицадзе. Ряд работ посвящен также применению метода к системам дифференциальных уравнений. Эти исследования, как правило, связаны с упомянутыми выше именами. В дополнение укажем лишь на работы Е. А. Григорьевой (1958 г.), Н. И. Челнокова (1962 г.), Ш. И. Векилова (1965 г.). Находят приложение идеи метода прямых и при решении интегро-дифференциальных уравнений (см., например, работы К. Ю. Юсупова, 1955 г.; И. П. Семенова, 1966 г.). Применение метода прямых к операторным уравнениям исследовано О. А. Ладыженской (1956 г.) и Ш. И. Ибрагимовым (1963 г.). С. Г. Крейн и О. И. Прозоровская применили (и исследовали) (1963 г.) метод прямых для решения некорректной по Адамару задачи типа обратной теплопроводности.

Таков далеко не полный перечень приложений метода прямых. Более подробный обзор работ по методу прямых (до 1965 г.) и их библиографию можно найти в упоминавшейся выше статье О. А. Лисковца (1965 г.).

К методам понижения размерности задач можно отнести также предложенный в начале 50-х годов А. А. Дородницыным метод интегральных соотношений. В простейшей форме этот метод тесно примыкает к методу прямых. Характерным же для него является аппроксимация не производной, как в методе прямых, а, по сути дела, интеграла, для которого легче получить хорошее представление. Введение (1960 г.) А. А. Дородницыным в обобщении метода сглаживающих функций, выбирающихся с учетом характера решения, позволяет повысить его точность для некоторых классов задач.

Пусть, например, в прямоугольной области $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ рассматривается система уравнений дивергентного вида $\frac{\partial P_i}{\partial x} + \frac{\partial Q_i}{\partial y} = F_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, где P_i , Q_i , F_i — известные функции от x , y , $u_1(x, y)$, ..., $u_m(x, y)$. Умножая эти уравнения на функции $f_j(y)$ какой-либо линейно независимой системы и выполняя интегрирование



Н. Х. Арутюнян.

поперек всей области, приходим к интегральным соотношениям

$$\frac{d}{dx} \int_c^d P_{if_j}(y) dy + Q_{if_j}(y) \Big|_c^d - \\ - \int_c^d Q_{if'_j}(y) dy = \int_c^d F_{if_j}(y) dy.$$

Интерполируя стоящие под знаком интеграла функции P_i , Q_i , F_i по их значениям на каких-либо линиях, разбивающих область на полосы, и интегрируя, получаем аппроксимирующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций вдоль избранных линий. Линии разбиения обычно согласуются с формой области и могут и не быть прямыми. В простей-

шей схеме метода сглаживающие функции $f_j(y)$ не вводятся, а интегрирование выполняется поперек каждой полосы.

Метод интегральных соотношений с успехом применялся для решения целого ряда аэрогидродинамических и других задач, в том числе и в случае неизвестных границ (см., например, работы О. М. Белоцерковского, П. И. Чушкина, Ю. Н. Павловского, Я. И. Алихашкина, А. П. Фаворского). Подробный обзор работ этого направления дан (1962 г.) О. М. Белоцерковским и П. И. Чушкиным. Однако сходимость метода в общем виде до сих пор не исследована. Первые результаты в этом направлении были получены (1963 г.) В. И. Крыловым и В. В. Бобковым. Метод интегральных соотношений применялся к решению задачи Гурса для уравнения

$$u_{xy} = a(x, y) u_y + f(x, y, u, u_x),$$

при этом последнее не приводилось к системе уравнений дивергентного вида. Получены равномерные оценки погрешности, гарантирующие второй порядок сходимости построенных двухслойных схем метода. Распространению этих результатов на многослойные схемы, двухслойные схемы повышенной точности, а также на другие задачи посвящены работы В. В. Бобкова (1963, 1964 гг.), В. В. Бобкова и В. И. Крылова (1965 г.), В. В. Бобкова, В. Н. Абрашина, А. В. Самусенко (1967 г.).

Повторное применение идеи метода интегральных соотношений к решению аппроксимирующей задачи в линейном случае приводит к системе линейных алгебраических уравнений. В. В. Бобков и В. И. Крылов получили (1966 г.) оценки погрешности такой сеточной схемы, гарантирующие в простейшем случае линейного интерполирования ее сходимость второго порядка. Для эллиптических задач с положительно определенным самосопряженным дифференциальным опе-

ратором порядка $2k$ Ю. К. Демьянович, применяя вариационный подход, получил (1967 г.) оценки скорости сходимости некоторых схем метода интегральных соотношений через модуль непрерывности точного решения.

Метод понижения размерности вариационной задачи, предназначенный специально для решения дифференциальных уравнений в частных производных и приводящий к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, был предложен (1933 г.) Л. В. Канторовичем. Наряду с задачей Дирихле для уравнения $L(u) = f(x, y)$ рассматривается связанная с ней вариационная проблема о минимуме интеграла $I(u)$. Неизвестная функция $u(x, y)$ ищется приближенно в виде $u_n(x, y) =$

$= \sum_{i=1}^n \varphi_i(x, y) f_i(x)$, где $\varphi_i(x, y)$ — заданные функции. Рассматривая функционал I на таких $u_n(x, y)$, получаем одномерную вариационную проблему, приводящую к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $f_i(x)$. Показано (см., например, работы Я. И. Перельмана, 1941 г.; Л. В. Канторовича, 1942 г.), что эта система может быть записана в форме Галеркина:

$$\int_{D_x} [L(u_n) - f(x, y)] \varphi_i(x, y) dy = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где D_x — сечение области D прямой $x = \text{const}$. З. А. Власова распространила (1959 г.) этот метод на случай третьей граничной задачи и указала ряд возможностей его численной реализации. Приложение метода к трехмерным задачам изучено (1934 г.) Н. А. Быстровым. Другие его приложения к конкретным задачам рассматривались Л. В. Канторовичем и П. В. Фрумкиным (1937 г.), Т. К. Чеповой (1937 г.), Н. С. Семеновым (1939 г.), Т. Н. Роговым (1940 г.), Н. Х. Арутюняном (1942 г.), И. А. Баславским (1943 г.), М. Т. Пыхтуновым (1953 г.), В. М. Фроловым (1956 г.), В. А. Стрешневой (1959 г.), А. И. Вайндинером (1967 г.) и др. В некоторых из этих работ предлагаются различные видоизменения метода.

Рассматриваемый метод с успехом может применяться при нахождении собственных значений и собственных функций (см., например, Л. В. Канторович и В. И. Крылов, 1962 г.). Доказательство сходимости метода Л. В. Канторовича можно найти в его статье, опубликованной в 1941 г. В ней показано, например, что при некоторых простейших требованиях к решению и виду области, а также при соответствующем выборе функций $\varphi_i(x, y)$ существует равномерная сходимость последовательности приближений метода, при этом порядок погрешности

n -го приближения равен $O\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{n}\right)$. Доказательство сходимости метода в случае третьей граничной задачи дано (1959 г.) З. А. Власовой.

Л. В. Канторович предложил (1934 г.) также метод понижения размерности дифференциальной задачи, не связанный с вариационной проблемой. Приближенное решение здесь по-прежнему

ищется в виде

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x, y) f_i(x),$$

но система обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $f_i(x)$ получается из условий, что приближенное решение удовлетворяет исходному уравнению на некоторых линиях. Этот метод может применяться в случае уравнений всех типов, а не только эллиптического. По своей идее он близок к методам совмещения и прямых (см., например, работу В. Н. Фаддеевой, 1949 г.).

3

Вариационные и примыкающие к ним методы

Вариационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений являются составной частью классической проблематики приближенных методов и тесно связаны с задачами прикладной математики и механики. Весьма широкому применению этих методов в настоящее время способствовали плодотворные исследования отечественных математиков. В первую очередь — это исследования (1928—1932 гг.) Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова по вопросам сходимости метода Рунге для обыкновенных дифференциальных уравнений и для задачи Дирихле в случае уравнения эллиптического типа с двумя переменными. В последующие десятилетия вариационные методы изучались в основном в применении к граничным задачам для уравнений в частных производных.

Большой круг вопросов теории вариационных методов освещен в монографиях С. Г. Михлина (1950, 1952, 1957, 1966 гг.), Л. В. Канторовича и В. И. Крылова (1962 г.).

Рассмотрим линейное операторное уравнение

$$Au = f, \quad (45)$$

где A — положительно определенный симметричный оператор в гильбертовом пространстве H , f — некоторый элемент из H , u — искомый элемент. Решение этого уравнения можно свести к задаче отыскания минимума функционала

$$F(u) = (Au, u) - 2(u, f). \quad (46)$$

Метод решения краевых задач, состоящий в замене уравнения (45) задачей о минимуме функционала (46), назван энергетическим методом. Построение (каким-либо способом) для функционала (46) минимизирующей последовательности составляет содержание многих методов, получивших название вариационных. Наиболее распространенный из них был предложен в 1908 г. Рунге.

С. Г. Михлин доказал (1950 г.) сходимость в метрике (Au, u) к решению уравнения (45) минимизирующей последовательности, построен-

ной для функционала (46) по методу Ритца. Если координатные элементы в методе Ритца выбираются специальным образом, то сходимость существует в более сильной метрике (Au, Au) (см. С. Г. Михлин, 1956 г.). С. Г. Михлиным изучены также (1953, 1954 гг.) вопросы применимости вариационных методов к некоторым вырождающимся эллиптическим уравнениям и энергетического метода к уравнению Пуассона в бесконечной области.

В. П. Ильин установил равномерную сходимость (1951 г.) приближений, полученных по методу Ритца для эллиптического оператора второго порядка, а также условия (1959 г.) равномерной сходимости метода Ритца для основной бигармонической задачи ($u = 0, \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на контуре)



В. П. Ильин.

с m переменными, когда ее решение ищется в форме $\omega^2(x_1, x_2, \dots, x_m) P_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$. При этом он опирался на результаты И. Ю. Харрик (1951, 1955 гг.) о возможном порядке приближения выражениями вида $\omega(x, y) P_n(x, y)$ (P_n — полином n -й степени) в области D , ограниченной кривой $\omega(x, y) = 0$, функции $u(x, y)$, обращающейся в нуль на контуре. И. Ю. Харрик принадлежат также исследования аналогичной проблемы в многомерном случае.

Д. М. Эйдуc показал (1951—1954 гг.) применимость энергетического метода к уравнениям теории упругости в случае третьей и четвертой краевых задач (первые две задачи были исследованы американским математиком Фридрихсом).

В последние годы большое количество работ посвящено вопросам численной реализации вариационных методов. В монографии С. Г. Михлина «Численная реализация вариационных методов» (1966 г.) изучаются в основном две наиболее важные проблемы: 1) учет влияния погрешностей, допущенных при составлении и решении системы Ритца, на точность приближенного решения и 2) выбор системы координатных функций. Первая проблема возникает в связи с тем, что при желании получить более точное приближение обычно прибегают к системам Ритца более высоких порядков, однако погрешности, допущенные при вычислении матрицы системы Ритца и столбца ее свободных чисел, а также при решении этой системы, могут приобрести существенное значение, если координатная система взята произвольно. В связи с этим возникает вопрос об устойчивости метода Ритца по отношению к такого рода малым погрешностям. Четкие определения устойчивости процесса Ритца и приближенного решения по Ритцу, а также соответствующие теоремы впервые (1960, 1966 гг.) были сформулированы и доказаны С. Г. Михлиным. С. Г. Михлин доказал (1960 г.), что для устойчивости процесса Ритца и приближенного решения по Ритцу



К. З. Галимов.

необходимо и достаточно условие сильной минимальности координатной системы в соответствующем энергетическом пространстве. Им же были получены (1961 г.) некоторые эффективные условия сходимости метода Ритца.

Тесно связана с вопросами устойчивости процесса Ритца проблема выбора координатных функций. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и A — положительно определенный оператор. Чтобы применить процесс Ритца, обычно выбирают для построения приближенного решения систему координатных элементов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, которые должны удовлетворять трем условиям: 1) $\varphi_n \in H_A$ ($n = 1, 2, \dots$); 2) элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно независимы при любом n ; 3) система элементов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ полная в H_A . Однако такой выбор системы еще

не гарантирует устойчивости как процесса решения системы Ритца, так и самого приближенного решения. Поэтому на систему элементов φ , как это было показано С. Г. Михлиным (1962 г.), Б. А. Самокишем (1963 г.), И. К. Даугаветом (1965 г.), целесообразно налагать дополнительные условия; 4) координатная система сильно минимальна в энергетическом пространстве H_A ; 5) последовательность $\{\varphi_k\}$ полная и ортонормирована в H_B , где H_B — энергетическое пространство положительно определенного оператора B , полусходного с положительным оператором A ; 6) пусть A и B — самосопряженные положительно определенные операторы $CD(A) = D(B)$; выполняется неравенство $|(Au, Bu)| > m \|Au\|^2$, $m = \text{const} > 0$, и система собственных элементов оператора B , которую мы будем считать нормированной в H_B , полная в H_B . За координатную систему элементов φ принимают нормированную систему собственных элементов оператора B .

Устойчивость процесса Ритца в задачах о спектре исследована (1965 г.) Л. Н. Довбыш.

Теории вариационных методов в нелинейных задачах, численному решению нелинейных вариационных задач и приложению вариационных методов к конкретным задачам математической физики посвящены работы В. М. Павферова (1952 г.), И. В. Свирского (1950—1953 гг.), Б. Л. Абрамяна (1950—1955 гг.), З. А. Власовой (1962—1965 гг.), Ю. В. Рыбаковой (1965 г.), И. И. Воровича (1957—1958 гг.), К. З. Галимова (1953—1959 гг.), И. В. Гельмана (1958 г.), А. М. Горлова (1959 г.), Л. И. Календерьяна (1954 г.), Л. М. Качанова (1960 г.), А. Лангебаха (1958 г.), Н. Ф. Морозова (1957—1961 гг.), Ю. С. Вержбинской, Н. П. Канаревой, С. Г. Михлина, Б. А. Самокиша (1967 г.), Д. Ф. Давиденко (1953 г.).

Для вывода оценки погрешности приближенного решения, полу-

ченного энергетическим методом, важно уметь оценивать минимум функционала $F(u)$ снизу. Среди методов, предназначенных для отыскания приближенного решения вариационной задачи и позволяющих получить оценку снизу для минимума функционала $F(u)$, наиболее важными являются метод ортогональных проекций и метод Треффтца. В развитии теории метода ортогональных проекций большую роль сыграли исследования (1947 г.) М. И. Вишика, проведенные им для широкого класса эллиптических краевых задач. Сходимость метода ортогональных проекций для первой краевой задачи уравнений полигармонического типа исследована (1957 г.) М. И. Клиот-Дашинским.

Метод Треффтца для решения линейных дифференциальных уравнений состоит в следующем. Пусть в области Ω требуется проинтегрировать уравнение

$$Lu = f \quad (47)$$

при некоторых, например, однородных краевых условиях

$$G_{ki} u|_s = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (48)$$

и пусть оператор A , совпадающий с L на множестве функций, удовлетворяющих (48), положительно определенный. Обозначим u_0 решение задачи (47), (48). Далее строится какой-либо неотрицательный однородный квадратичный функционал Φ , определенный на решениях уравнения (47) и удовлетворяющий на этих решениях неравенству $\Phi(v) \geq \Phi(u_0)$ и равенству $\Phi(u_0) = (Au_0, u_0)$. Решение уравнения (47), минимизирующее этот функционал на множестве всевозможных решений уравнения (47), принимается за искомое решение задачи (47), (48).

Сходимость метода Треффтца для задачи Дирихле и оценки погрешности впервые (1950 г.) были получены С. Г. Михлиным. Некоторые исследователи занимались перенесением метода Треффтца на другие случаи. Для первой краевой задачи в бигармонической проблеме З. Х. Рафальсон предложил (1949, 1952 гг.) полезную разновидность метода Треффтца, названную им методом негармонического остатка. Соображения З. Х. Рафальсона впоследствии (1952, 1954 гг.) были развиты М. И. Клиот-Дашинским. Приложения метода Треффтца к конкретным задачам указаны в работе (1954 г.) Г. А. Гринберга, Н. Н. Лебедева, И. П. Скальской и Я. С. Уфлянда. М. Ш. Бирман обобщил (1953—1956 гг.) метод Треффтца на широкий класс краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений. Задачей оценки минимума функционала $F(u)$ занимался также (1952—1955 гг.) М. Г. Слободянский.

С рассматриваемой проблемой тесно связан вопрос о двусторонних оценках собственных чисел самосопряженных полуограниченных операторов. Энергетический метод дает приближенное значение собственных чисел с избытком, поэтому для получения достоверного результата важно построить прямой метод, позволяющий получить эти значения с недостатком. Исследуя вопрос об оценках точности вариационных методов определения собственных значений, И. В. Свирский предложил (1952, 1953 гг.) способ, который позволяет уточнять оценки



В. В. Иванов.

собственных значений снизу, получаемые путем сопоставления операторов.

Пусть A — линейный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве. Других ограничений на A не накладывается. Пусть уравнение (45) разрешимо. Очевидно, что решение этого уравнения минимизирует функционал $I(u) = \|Au - f\|^2$. Метод наименьших квадратов заключается в построении последовательности, минимизирующей этот функционал. В применении к различным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений метод наименьших квадратов исследовался математиком школы Н. М. Крылова.

С. Г. Михлин доказал (1948—1950 гг.) сходимость к решению уравнения (45) минимизирующей последовательности, построенной по методу Ритца для функционала $I(u)$.

При этом оператор A не предполагался самосопряженным, требовалось лишь существование оценки вида $\|u\| \leq K \cdot \|Au\|$ для всех u из области задания A и разрешимость уравнения (45) при заданном f . Последовательность координатных элементов предполагалась полной в метрике формы (Au, Au) . Установлена связь этого метода с энергетическим, исследована его сходимость для ряда краевых задач. Приложение метода наименьших квадратов к решению задач теории потенциала на плоскости и задач теории упругости исследовано в монографии С. Г. Михлина и Х. Л. Смолицкого «Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений» (1965 г.).

В. В. Иванов, В. Ю. Кудринский рассмотрели (1966, 1967 гг.) вопросы приближенного решения линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве методом наименьших квадратов. В частности, они исследовали некоторые вычислительные алгоритмы минимизации:

$$\Delta_n(P_n) = I^\alpha(x_n) = \left\| y - \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot y_k \right\|^2 + \alpha \cdot \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot e_k \right\|^2,$$

$$y_k = Ae_k, \quad P_n = P_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad x_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot e_k, \quad \alpha \geq 0,$$

вопросы сходимости этих алгоритмов, вопросы оценки неустраняемых погрешностей и погрешностей алгоритмов.

Пусть в уравнении (45) A — линейный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве H . Применяя метод Галеркина (этот метод называют также методом Бубнова—Галеркина), выбирают последовательность элементов $\varphi_n \in D(A)$ и ищут приближенное ре-

нение в виде $u_n = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \varphi_k$, где коэф-

фициенты a_k определяют из условия ортогональности $(Au_n - f)$ к элементам $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Заметим, что метод Галеркина совпадает с методом Ритца, если A — положительно определенный оператор.

Рассматриваемый метод был предложен в 1915 г. Б. Г. Галеркиным и получил весьма широкое распространение после того, как его сходимость была исследована в случае краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений Г. И. Петровым (1940, 1957 гг.) и М. В. Келдышем (1942 г.), причем в последней работе весьма полное разрешение нашла также проблема сходимости метода Галеркина в случае уравнений второго порядка эллиптического типа.

Сходимость метода Галеркина для обыкновенных дифференциальных уравнений была вновь исследована (1948 г.) Л. В. Канторовичем на основании общей теории приближенных методов. Одновременно им была указана быстрота убывания погрешности. Общая теорема о сходимости метода Галеркина доказана (1948 г.) С. Г. Михлиным.

Б. А. Самокиш исследовал (1964 г.) устойчивость абстрактного метода Галеркина с помощью специальным образом введенных параметров, один из которых характеризует устойчивость процесса, другой — устойчивость приближенного решения. При этом он рассматривал два тесно связанных между собой понятия устойчивости и практической устойчивости, что позволяет расширить класс задач, решаемых по абстрактному методу Галеркина.

В ряде работ изучались свойства систем алгебраических уравнений, возникающих при решении вариационных задач по методу Бубнова — Галеркина. М. Н. Яковлев и Г. Н. Яскова исследовали (1962 г.) устойчивость более общего вычислительного процесса, так называемого процесса Галеркина — Петрова, и получили ряд достаточно простых условий его устойчивости. Необходимое и достаточное условие сходимости метода Галеркина — Петрова получил (1965 г.) Г. М. Вайникко. Он исследовал также вопрос о необходимых условиях устойчивости приближенного решения, построенного по этому методу. На основании возмущенного метода Галеркина Г. М. Вайникко построил (1967 г.) общую теорию для нелинейных уравнений, аналогичную общей теории приближенных методов, разработанной Л. В. Канторовичем.

М. И. Вишик, С. Г. Михлин, М. А. Велиев рассматривали задачу Коши для нестационарного операторного уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2} Au + \frac{d}{dt} Bu + Cu = f(t) \quad (49)$$



Г. И. Петров.



И. И. Ворович.

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi, \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = \psi. \quad (50)$$

Метод Бубнова — Галеркина применим к различным случаям задачи (49), (50). В этом направлении одно из наиболее полных исследований принадлежит (1956 г.) М. И. Вишику. Им рассмотрен также случай, когда A, B, C могут зависеть от t . М. А. Велиевым (1964 г.) и С. Г. Михлиным (1966 г.) исследована устойчивость процесса Бубнова — Галеркина для нестационарных задач.

Метод Бубнова — Галеркина применим для отыскания собственных значений и элементов. Эта сторона вопроса исследовалась М. В. Келдышем и С. Г. Михлиным, а также Н. И. Польским (1949 г.), Г. М. Вайникко (1967 г.) и др.

Другие вопросы, связанные с теорией метода Бубнова — Галеркина, рассматривались в работах Н. И. Польского (1952—1956 гг.), С. Г. Винокурова (1956 г.), И. И. Воровича (1956 г.), И. К. Даугавета (1958 г.), О. К. Богарян (1961 г.), Б. А. Самокиша (1963—1965 гг.), Г. М. Вайникко (1965—1967 гг.) и др.

Метод моментов, являющийся обобщением метода Бубнова — Галеркина, широко исследовался математиками школы Н. М. Крылова, а также Н. И. Польским (1952 г.), В. А. Бородиным (1953 г.), Ю. Ф. Дитякиным (1953 г.), И. К. Даугаветом (1954, 1955 гг.), М. Б. Гагуа (1955 г.), С. Г. Гуревичем (1955 г.), С. Г. Михлиным (1956 г.), С. Г. Винокуровым (1956 г.) и др.

М. А. Красносельским изучена (1950, 1955 гг.) сходимость специального метода типа Галеркина для общих функциональных уравнений (в том числе нелинейных) в пространстве типа B . Для уравнения $x = A(x)$ в качестве приближенных рассматриваются уравнения $x = P_n \cdot A(x)$, где P_n — оператор проектирования на пространство X_n , порожденное первыми n элементами некоторого базиса $\{\varphi_n\}$. При известных ограничениях устанавливается разрешимость приближенных уравнений и сходимость полученных приближенных решений уравнения к точному. Порядок аппроксимации такой же, как и при аппроксимации решения отрезком ряда Фурье. А. А. Киселев, используя развитый М. А. Красносельским метод, доказал (1955 г.) существование решения уравнения движения вязкой жидкости.

И. И. Ворович изучал применение методов рассматриваемого типа к нелинейным задачам теории оболочек. Он рассмотрел (1958 г.) вопрос о погрешности прямых методов в нелинейной теории оболочек.

В методе совмещения (коллокации) коэффициенты a_k линейной комбинации $u_n = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \varphi_k$ подбираются так, чтобы уравнение (45) выполнялось в n заранее выбранных точках t_i . Сходимость этого метода для интегральных уравнений установил Л. В. Канторович (1948 г.), а для обыкновенных дифференциальных уравнений четного порядка при простейших граничных условиях в случае полиномиальных приближений, а также для некоторых граничных задач математической физики — Э. Б. Карпиловская (1953, 1965 гг.). Вопросам реализации, устойчивости и сходимости метода коллокации посвящены работы Г. М. Вайникко (1964—1966 гг.), М. Ф. Каспшицкой (1967 г.), А. А. Шиндлера (1967 г.), Ю. Л. Ярцева (1967 г.) и др.

Метод решения нелинейных систем Ритца был предложен (1959 г.) Л. М. Качановым для некоторых задач теории пластичности. С. Н. Розе распространил (1961 г.) этот метод на некоторые более общие функционалы.

4

Приведение краевых задач к задачам с начальными условиями

Для решения задач Коши в случае обыкновенных дифференциальных уравнений существует ряд аналитических и дискретных методов, позволяющих находить решение уравнения со сколь угодно большой точностью (методы Рунге — Кутты, Адамса, Штермера, Чаплыгина, Ньютона — Канторовича, малого параметра и др.). Эти методы непосредственно к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений не применяются. Поэтому представляют большой интерес такие методы, которые позволяют сводить решение краевой задачи к решению последовательности задач Коши для дифференциальных уравнений того же или низших порядков. Идея одного из таких методов состоит в следующем.

Пусть для $\alpha \leq t \leq \beta$ задано линейное дифференциальное уравнение

$$L(y) \equiv \sum_{k=0}^n p_k(t) \cdot y^{(n-k)} = f(t) \quad (51)$$

с граничными условиями

$$l_s(y) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{si} y^{(n-1-i)}(\alpha) + \beta_{si} y^{(n-1-i)}(\beta)) = A_s, \quad (52)$$

где $p_0(t) > 0$ и $s = 1, 2, \dots, n$. Предположим, что задача (51), (52) имеет единственное решение. Тогда общее решение уравнения (51) отыскивается в виде линейной комбинации с произвольными постоянными коэффициентами из решений $z_i(t)$, составляющих фундаментальную

систему, и частного решения $z(t)$ неоднородного уравнения

$$y(t) = z(t) + \sum_{i=1}^n c_i z_i(t), \quad (53)$$

причем функции $z(t)$ и $z_i(t)$ находятся как решения задач Коши при некоторых начальных условиях, например задач

$$L(z) = f(t) \text{ и } z^{(v)}(a) = 0, \quad (54)$$

$$L(z_i) = 0 \text{ и } z_i^{(v)}(a) = \begin{cases} 1 & \text{при } v = i - 1, i = 1, 2, \dots, n, \\ 0 & \text{при } v \neq i - 1, v = 0, 1, \dots, n - 1. \end{cases} \quad (55)$$

Используя затем граничные условия (52), находим постоянные c_i и вычисляем искомое решение $y(t)$ по формуле (53).

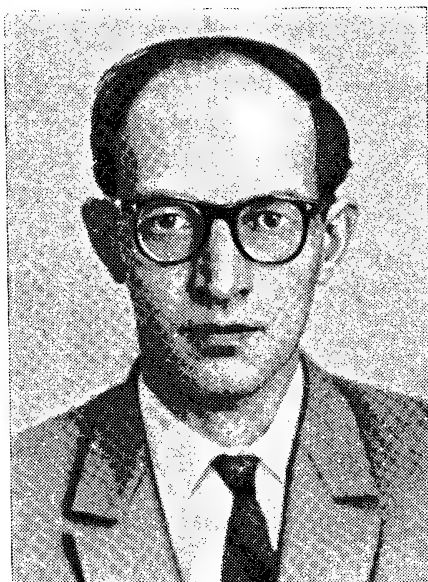
Алгоритм такого метода простой, но ему свойствен существенный недостаток, а именно: в тех случаях, когда решение краевой задачи не является быстрорастущей функцией, а некоторые решения соответствующего однородного уравнения, наоборот, быстро растут и интервал значений аргумента большой, отыскание искомого решения в виде линейной комбинации (53) может оказаться невыгодным с вычислительной точки зрения, так как оно связано с большой потерей значащих цифр. Чтобы обойти эти затруднения, были предложены иные методы сведения краевых и многоточечных задач к задачам с начальными условиями, основанные на идее факторизации и ортогональных преобразованиях.

М. В. Келдыш, И. М. Гельфанд, О. В. Локуциевский рассмотрели (1953 г.) метод дифференциальной прогонки в случае одного уравнения и системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной. При естественных ограничениях на коэффициенты уравнений и параметры граничных условий, возникающих после применения метода прямых к решению второй краевой задачи для уравнения теплопроводности, исследованы вопросы осуществимости и численной устойчивости метода.

В. С. Владимиров применил (1955 г.) идею факторизации линейного дифференциального уравнения вида $y'' - p(x)y = f(x)$, где $p(x) > 0$, к двум линейным уравнениям первого порядка в случае задачи с краевыми условиями $y'(0) + \alpha_0 y(0) = A$, $y'(l) + \beta y(l) = B$.

Самую общую краевую задачу для линейного дифференциального уравнения второго порядка рассмотрел (1961 г.) А. А. Абрамов. Он построил алгоритм варианта метода прогонки, не имеющего исключительных случаев и применимого к решению всех хорошо обусловленных граничных задач. В. И. Крыловым и П. И. Монастырным (1963 г.) изучены особенные случаи классического метода прогонки и построены алгоритмы, применимые к решению краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка. Ими развиты (1964 г.) соображения А. А. Абрамова при построении схемы метода прогонки для дифференциальных уравнений четвертого порядка с разделенными краевыми условиями.

Исследуя вопрос о накоплении вычислительной погрешности при численном решении дифференциальных уравнений, Н. С. Бахвалов показал (1962 г.), в частности, что замыканием по С. Л. Соболеву дискретного алгоритма метода прогонки является один из вариантов метода дифференциальной прогонки. Изучение свойств последних оказалось полезным при решении таких вопросов, как разрешимость и корректность метода разностной прогонки. Используя результаты М. Р. Шуры-Буры (1952 г.) и Н. С. Бахвалова (1955 г.), П. И. Монастырный получил (1964 г.) оценки накопления вычислительных погрешностей, возникающих при численном решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений по некоторым схемам метода приведения краевых задач к задаче Коши.



О. В. Локуциевский.

А. А. Абрамов рассмотрел (1961 г.) вопрос о переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Он нашел в самом общем виде соотношения переноса граничных условий и получил задачи Коши для определения матриц и векторов соотношений, характеризующих перенос условий.

Многоточечную задачу для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка рассматривал (1967 г.) П. И. Монастырный. Применяв к исходной системе последовательно преобразования с ортогональными матрицами $B_n(t)$, $B_{n-1}(t)$, ..., $B_2(t)$, он заменил многоточечную задачу последовательностью $n - 1$ задач Коши и доказал, что получающийся таким образом метод приведения многоточечной задачи к задачам Коши устойчив. П. И. Монастырный также построил (1967 г.) алгоритм метода ортогональной прогонки для решения краевых задач с неразделенными условиями в случае системы двух уравнений первого порядка.

Метод дифференциальной прогонки применялся к решению самосопряженной системы уравнений второго порядка. В частности, В. Б. Лидский и М. Г. Нейгауз, используя линейные преобразования с унитарной матрицей, построили (1962 г.) для таких систем по аналогии с методом А. А. Абрамова вариант метода прогонки, не имеющий исключительных случаев и обладающий устойчивостью.

5

Разностные методы для обыкновенных дифференциальных уравнений

Одной из наиболее полно изученных групп методов численного решения дифференциальных уравнений с начальными условиями является группа разностных методов. Для определенности будем говорить о таких методах в приложении к задаче Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Найдем численно в равноотстоящих точках $x_k = x_0 + kh$ приближенное решение $y_k \approx y(x_k)$ этой задачи (по поводу переменного шага интегрирования см., например, работу А. С. Стукало, 1966 г.). Весьма общей вычислительной схемой, применяющейся для этой цели, является схема вида

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^m A_i y_{n-i} + h \sum_{j=-p}^q B_j f(x_{n-j}, y_{n-j}).$$

Строить подобные схемы можно, исходя из различных соображений. Наиболее распространенными среди таких схем являются схемы типа Адамса, построить которые можно, например, опираясь на очевидное равенство

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(t) dt,$$

если функцию $y'(t) = f(t, y(t))$ на отрезке интегрирования заменить интерполяционным многочленом по ее значениям в нескольких точках сетки. Если при этом использовать лишь точки, предшествующие точке x_{n+1} , то построим так называемые экстраполяционные правила Адамса, если же привлечь для интерполирования и точку x_{n+1} , то придем к неявным интерполяционным правилам Адамса, если же использовать еще и точки, следующие за точкой x_{n+1} , то получим правила типа Коуэлла. Точно так же и в случае задачи Коши $y'' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ можно построить экстраполяционные и интерполяционные правила Штермера и правила типа Коуэлла, если исходить из равенств

$$y(x_{n+1}) = 2y(x_n) - y(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} y''(t) (h - |t - x_n|) dt.$$

Характерной особенностью разностных методов является необходимость предварительного составления начала таблицы, которое обычно приходится находить по алгоритму, отличному от основного алгоритма метода. Удобный метод итерационного типа для построения начала таблицы был предложен А. Н. Крыловым. Развитию этой его идеи посвящены работы Е. А. Жоголева (1962 г.), С. С. Гайсаряна (1965 г.) Ю. В. Ракитского (1967 г.) и др.

Основоположники разностных методов развивали обычно лишь частные варианты этих методов. Исследования советских математиков первоначально были направлены на расширение области возможного приложения основных идей разностных методов. В работах М. Ф. Субботина (1927, 1928 гг.), В. П. Ветчинкина (1932, 1937 гг.), Я. С. Безиковича (1936 г.), А. Н. Волохова (1937 г.) и других математиков методы типа Адамса, Штермера и Коуэлла обобщаются на уравнения высших порядков. Предлагаются также новые вычислительные схемы этих методов. Построению новых вычислительных схем разностных методов посвящены работы А. П. Доморяда (1934 г.). Он предложил для нахождения y_{n+1} использовать значения не только правой части уравнения, но и производных от нее. Это позволило повысить точность формулы без привлечения новых точек, что особенно важно в начале вычислений. П. В. Мелентьев построил (1937 г.) расчетные формулы с простыми коэффициентами, удобные для быстрых вычислений ограниченной точности. Л. В. Бочек (1955 г.) и Ш. Е. Микеладзе (1956 г.) применили разностные схемы для интегрирования в комплексной области. В монографии (1951 г.) Ш. Е. Микеладзе содержатся также другие результаты исследований автора по выбору разностных формул. А. Д. Горбунов и А. Г. Сенюкова, опираясь на правила численного дифференцирования функции $y(x)$, построили (1963 г.) для рассматриваемой задачи системы конечноразностных формул. А. Д. Горбунов предложил (1965 г.) так называемый предсказывающе-исправляющий метод с забеганием вперед. Обычно при численном решении задачи Коши экстраполяционные и интерполяционные формулы разностных методов применяются последовательно, что позволяет практически решать вопрос о выборе шага интегрирования. А. Д. Горбунов построил новый вариант таких предсказывающе-исправляющих методов, при котором для исправления применяются формулы вида

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^q B_{jf}(x_{n+j}, y_{n+j}),$$

называющиеся формулами с забеганием вперед. Эти методы позволяют сократить вычисления, связанные с построением начальных значений.

Основные усилия советских математиков были направлены на исследование разностных методов, в частности проблемы сходимости и устойчивости. Вопросами оценки погрешности отдельных разностных методов занимались Ш. Е. Микеладзе (1935—1940 гг., для уравнений первого и высших порядков), А. П. Доморяд (1934 г.), Ф. Г. Цхадая (1942 г.). Попытку оценки погрешности классической формулы Штермера в случае приведенной задачи Коши для уравнения второго порядка предприняли Л. Г. Афендик (1937, 1938 гг.) и Н. С. Самойлова-Яхонтова (1939 г.), однако их результаты не окончательны. Для этой же задачи В. И. Крыловым были исследованы (1960 г.) на сходимость и устойчивость формулы более общего вида

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^m A_i y_{n-i} + h^2 \sum_{j=-1}^m B_{jf}(x_{n-j}, y_{n-j}).$$



Н. С. Бахвалов.

В статье (1952 г.) М. Р. Шуры-Буры для задачи Коши в случае уравнения первого порядка дана оценка погрешности формул выписанного выше общего вида при $p = 0$, $q = m$. Погрешность приближенного решения расчленяется на части, определяющиеся соответственно ошибками в начальных данных, погрешностью аппроксимации и ошибками округления. Для каждой из этих частей даются строгие оценки. М. Л. Бродский (1953 г.) и Н. С. Бахвалов (1955, 1956 гг.) получили асимптотические формулы поведения ошибки на конечном промежутке при уменьшении шага и ряд критериев устойчивости схемы. Для устойчивых схем они приводят оценки погрешности метода. Для некоторого класса задач Н. С. Бахвалов получил (1963 г.) двусторонние оценки погрешности методов типа Адамса и пока-

зал, что способ численного интегрирования по формулам Адамса асимптотически неулучшаем в рассматриваемом классе задач. В частности, он показал, что главный член ошибки численного интегрирования не уменьшается при употреблении и более общих формул вида

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^m A_i y_{n-i} + h \sum_{j=-1}^m B_j y'_{n-j} + h^2 \sum_{k=-1}^m C_k y''_{n-k}.$$

Н. С. Бахваловым проведены также глубокие исследования (1962 г.) вопроса о накоплении вычислительной погрешности при численном решении дифференциальных уравнений. На основании полученных оценок накопленных вычислительных погрешностей он делает выводы о преимуществах того или иного способа численного решения дифференциальных уравнений, в частности устанавливает, что в случае большого числа шагов численное интегрирование уравнений высоких порядков следует сводить к интегрированию систем уравнений низших порядков. В случае задачи Коши для системы уравнений П. С. Бондаренко были сформулированы (1961 г.) весьма общие теоремы о необходимых и достаточных условиях устойчивости реального вычислительного алгоритма.

Большой цикл исследований по многоточечным разностным методам проведен Б. М. Будаком и А. Д. Горбуновым. Ими дано (1958 г.) обоснование метода ломаных Эйлера для случая, когда правая часть уравнения терпит разрыв типа скачка на некоторых линиях, но между ними удовлетворяет условию Липшица, установлен целый ряд условий сходимости и устойчивости различных методов, а также в большинстве из рассмотренных случаев получены оценки погрешности метода и оценки полной погрешности приближенного решения (априорные и апостериорные). Глубокий анализ погрешности решения задачи

Коши разностными методами проведен А. Н. Тихоновым и А. Д. Горбуновым. Полученные (1962 г.) ими асимптотические разложения погрешности разностных методов решения задачи Коши для системы уравнений являются основополагающими в области исследований и анализа погрешности. В приложении к задаче для одного уравнения, которая решается, например, с помощью явной формулы Адамса q -й степени

$$y_n - y_{n-1} = h \sum_{j=0}^q \beta_j f(x_{n-j-1}, y_{n-j-1})$$

при начальных значениях $y_n = y(x_n)$, $n = 0, -1, \dots, -(q+1)$, асимптотическое разложение погрешности метода по степеням шага h записывается в виде

$$\delta_n = y_n - y(x_n) = h^q \frac{K_1}{B_0} \int_{x_0}^{x_n} e^{\xi} \int_{y=y(\eta)}^{\frac{\partial f}{\partial y}} d\eta y^{(q+1)}(\xi) d\xi + O(h^{q+1}),$$

где

$$B_0 = \sum_{j=0}^q \beta_j, \quad K_1 = \sum_{j=0}^q \left[\frac{(j-1)^{q+1} \alpha_j}{(q+1)!} - \frac{(-j)^q \beta_j}{q!} \right], \quad \alpha_0 = 1, \\ \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0.$$

При некоторых дополнительных предположениях подобное асимптотическое разложение получено А. Н. Тихоновым и А. Д. Горбуновым и для полной погрешности приближенного решения. Аналогичные результаты получены Ю. В. Ракитским (1961 г., при более суровых ограничениях) и Н. П. Салиховым (1962 г.). Опираясь на данное разложение, А. Н. Тихонов, А. Д. Горбунов и С. С. Гайсарян проводят (1966 г.) анализ полной погрешности приближенного решения и устанавливают существование так называемой реальной области асимптотики, т. е. области значений шагов, которая ограничена сверху и снизу и в которой главный член асимптотического разложения погрешности метода хорошо представляет полную погрешность приближенного решения. Исходя из асимптотических разложений такого типа, А. Н. Тихонов и А. Д. Горбунов исследуют (1962 г.) задачу об оптимальности разностных схем, т. е. задачу об отыскании относительного минимума выражения $\frac{K_1}{B_0}$ в разложениях подобного вида, если рассматривать его как функцию коэффициентов при условиях, что последние удовлетворяют требованиям устойчивости и соответствующей степени аппроксимации. Показано, что в случае формул наивысшей степени к решению задачи можно лишь приблизиться сколь угодно хорошо. Базируясь на этих результатах, А. Д. Горбунов и О. П. Шебалина строят (1965 г.) предсказывающе-исправляющие методы с оптимальными (в некотором смысле) формулами исправления.

Различными вопросами теории разностных методов занимались также Т. Г. Абдулаев (1953 г.), Н. А. Гольцов (1961 г.), Н. И. Штепа (1962 г.), Т. С. Зверкина (1967 г.) и др. Исследования С. М. Лозинского

относятся и к аналитическим и к численным методам. Существенной особенностью полученных (1958 г.) им оценок погрешности является то, что в некоторых случаях они остаются ограниченными или даже убывают по экспоненциальному закону.

6

Одношаговые методы

Рассмотренным выше многошаговым разностным методам присущи некоторые недостатки, например необходимость предварительного составления начала таблицы, трудность в изменении шага интегрирования, относительно невысокая эффективность их на участках резкого изменения функций, обусловленная во многом и тем, что при построении алгоритма используется информация, рассредоточенная на сравнительно большом (в несколько шагов) отрезке интегрирования. От этих недостатков в значительной мере свободны одношаговые методы, использующие информацию, сконцентрированную в пределах одного шага. Основной недостаток одношаговых методов высокой точности, связанный с необходимостью большого числа подстановок в дифференциальное уравнение, по мере роста быстродействия ЭВМ постепенно теряет вес, и одношаговые методы становятся ведущими методами численного решения задач с начальными условиями.

Наиболее известными среди одношаговых методов являются правила вида Рунге — Кутта. Способ Рунге — Кутта построения одношаговых правил удобно проследить на примере задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Ищем по x , $y(x)$ и h приближенно $y(x+h)$ или $\Delta y = y(x+h) - y(x)$. Для этого вводим последовательность чисел $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r$, треугольную таблицу чисел

$$\begin{pmatrix} \beta_{21} & & & & \\ \beta_{31} & \beta_{32} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \dots & \beta_{rr-1} & \end{pmatrix}$$

и составляем линейную комбинацию $p_1 k_1 + p_2 k_2 + \dots + p_r k_r$, где величины

$$k_1 = hf(x, y),$$

$$k_2 = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1),$$

$$\dots$$

$$k_r = hf(x + \alpha_r h, y + \beta_{r1} k_1 + \beta_{r2} k_2 + \dots + \beta_{rr-1} k_{r-1})$$

вычисляются последовательно, а коэффициенты p_i , $i = 1, 2, \dots, r$, как и параметры α_i , β_{ij} , $i = 2, 3, \dots, r$, $j < i$, надлежит подобрать так, чтобы разложения в ряд по степеням h разности Δy и линейной комбинации $\sum_{i=1}^r p_i k_i$ совпадали до членов с возможно более высокими степе-

ниями h . Если эти требования удовлетворяются, мы приходим к соответствующему правилу вида Рунге — Кутта

$$y(x+h) \approx y(x) + \sum_{i=1}^r p_i k_i.$$

Такой подход к построению одношаговых правил очевидным образом обобщается на случай системы уравнений первого порядка. В. П. Ветчинкин применил (1936 г.) подобный подход к уравнениям высших порядков, не приводя их к системам. В последние годы интерес к методам Рунге — Кутта значительно возрос. Краткие обзоры исследований по этим методам можно найти в монографии (1962 г.) П. С. Бондаренко и в работе В. М. Гурьянова (1966 г.). П. С. Бондаренко получил (1960, 1961 гг.) условия сходимости и устойчивости методов вида Рунге — Кутта и оценку полной погрешности приближенного решения. Оценкам погрешности этих методов посвящены также работы (1962, 1963, 1966 гг.) А. А. Курмита. Опираясь на упомянутые выше результаты С. М. Лозинского, он строит свои наиболее точные априорные оценки погрешности метода. Им же получены (1964 г.) с помощью метода мажорант апостериорные оценки погрешности приближенного решения при интегрировании задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка любым методом, в котором используются только приближенные значения решения в предшествующей точке. Удобные оценки погрешности приближенного решения этой же задачи методами вида Рунге — Кутта приведены (1966 г.) В. М. Гурьяновым. Он ставит задачу о получении формул типа Рунге — Кутта наивысшей точности на некотором классе функций, к которому принадлежат правые части исходной системы, а также указывает применение методов вида Рунге — Кутта для получения конечноразностного аналога краевой задачи. Н. С. Бахвалов исследует (1962 г.) возможность применения двухшагового правила улучшения сходимости (правила Рунге) при численном решении с переменным шагом $h_n = x_{n+1} - x_n$ задачи $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ по рекуррентной формуле $y_{n+1} = F(f, x_n, y_n, h_n)$, где $F(f, x_n, y_n, h_n)$ — некоторый функционал от функции f .

Очень удобные для вычислений двусторонние формулы вида Рунге — Кутта построены и исследованы (1963 г.) на сходимость А. Д. Горбуновым и Ю. А. Шаховым. Для численного решения задачи Коши в случае уравнения первого порядка (и системы таких уравнений) строятся пары формул типа Рунге — Кутта, с помощью которых получаются приближения с недостатком и избытком.

Для методов типа Рунге — Кутта с погрешностью аппроксимации



П. С. Бондаренко.

порядка h^{s+1} в случае задачи Коши для системы N уравнений первого порядка с начальными условиями в точке x_0 А. Н. Тихоновым и А. Д. Горбуновым получена (1963 г.) оценка первой нормы вектора погрешности $\delta_k = y(x_k) - y_k$ вида

$$\|\delta_k\| \leq O(h^s) \left[\int_0^{x_k - x_0} e^{\xi NL} d\xi + O(h) \right]$$

(где L — константа Липшица для исходной системы), а также формула, выражающая главный член этой погрешности. Аналогичные оценки и разложения погрешности получены (1964 г.) ими и в случае неравномерной сетки. Здесь также введено понятие меры погрешности метода вида Рунге — Кутта при любой неравномерной сетке и получено асимптотическое разложение для нее, с помощью которого решается задача о выборе оптимальных сеток, обеспечивающих в данной точке заданную точность за наименьшее возможное число шагов. В случае одного уравнения, например, этот выбор осуществляется на основе минимизации модуля главного члена меры погрешности метода, при этом показывается возможность последовательного построения оптимальной сетки в процессе численного решения задачи. Базируясь на этих исследованиях, А. Н. Тихонов, А. Д. Горбунов и С. С. Гайсарян описывают (1966 г.) конкретный алгоритм построения оптимальных сеток для рассмотренного выше случая при $N = 1$.

Изложенный способ Рунге — Кутта построения одношаговых правил приближенного решения дифференциальных уравнений не единственно возможный. Так, В. В. Бобков рассматривает (1967 г.) регулярный способ построения одношаговых правил, основанный на многократном использовании квадратурных формул понижающейся алгебраической степени точности. В отличие от способа Рунге — Кутта при построении приближенного выражения для разности

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = h \int_0^1 f[x + \alpha(h), y(x + \alpha h)] d\alpha = h \int_0^1 z(\alpha) d\alpha$$

он использует хорошо развитый аппарат теории квадратур. Выбору подлежат лишь узлы α_i и коэффициенты p_i ($i = 1, 2, \dots, r$) квадратурной формулы

$$\int_0^1 z(\alpha) d\alpha \approx \sum_{i=1}^r p_i z(\alpha_i).$$

Неизвестные значения $y(x + \alpha h)$ подсчитываются исходя из аналогичных соображений, но с меньшими требованиями к точности. Построенные таким образом одношаговые правила дают кроме значений приближенного решения в точках основной сетки дополнительную информацию о решении в промежуточных точках. Доказана принципиальная возможность построения таким способом одношаговых пра-

вил любой точности и исследована их сходимость. По описанному способу можно построить и часть известных одношаговых правил: метод Эйлера, метод трапеций, а также некоторые правила вида Рунге — Кутты. Изложенный подход к построению одношаговых правил переносится (1967 г.) В. В. Бобковым на уравнения высших порядков, а также на некоторые задачи для уравнений в частных производных.

Интегральные уравнения

Основные приближенные методы решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода — последовательных приближений, замены ядра вырожденным и механических квадратур — возникли одновременно с теорией интегральных уравнений и первоначально использовались при ее изложении. Предложенные в дальнейшем новые методы так или иначе приводятся к основным методам. Например, методы моментов, наименьших квадратов, интерполяционный (называемый также методом совпадения или методом коллокации) представляют собой специальные методы замены ядра вырожденным.

Значительное влияние на развитие приближенных методов решения интегральных уравнений оказала книга Л. В. Канторовича и В. И. Крылова «Приближенные методы высшего анализа» (1962 г.), где эти методы получили дальнейшее развитие. В книге указаны оценки ошибки методов механических квадратур и вырожденного ядра применительно к задаче о решении неоднородного уравнения, расширена область применимости метода последовательных приближений, метод механических квадратур дополнен приемом выделения особенности. Вопросы сходимости и оценки ошибки методов механических квадратур, вырожденного ядра, моментов, интерполяционного метода Л. В. Канторович рассматривал ранее (1948 г.) в качестве примера применения общей теории приближенных методов.

Оценки ошибки метода механических квадратур, возникающей при решении неоднородного интегрального уравнения и вычислении собственных чисел эрмитова ядра, получены (1966, 1967 гг.) И. П. Мысовских. Из оценки для решения неоднородного уравнения следует сходимость метода механических квадратур в пространстве C непрерывных функций, если последовательность применяемых квадратурных формул сходится в C . Предполагается, что ядро и правая часть непрерывны. Существенным моментом оценок, пригодных и для многомерных интегральных уравнений, является использование квадратурных ошибок ядра и правой части.

Быстроту сходимости метода последовательных приближений и метода механических квадратур для многомерных интегральных уравнений в случае, когда применяются квадратурные формулы, узлы которых получены на основании соображений теории чисел, изучал (1963 г.) Н. М. Коробов.



И. П. Мысовских.

Наряду с исследованием известных методов разрабатывались новые алгоритмы приближенного решения интегральных уравнений. Так, Л. В. Канторович (1948 г.) предложил метод наискорейшего спуска, Ю. Д. Соколов (1957 г.) — метод осреднения функциональных поправок. Метод Ю. Д. Соколова представляет собой метод последовательных приближений, применяющийся к преобразованному интегральному уравнению. Предлагались и другие методы, основанные на преобразовании уравнения и последующем применении метода последовательных приближений (Г. Н. Положий, 1959 г.; Б. А. Бельтюков, 1965 г.). Из приближенных методов решения линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода можно назвать метод механических квадратур. Удобный вариант его, где используется квадратур-

ная формула Эйлера — Лапласа, предложен (1949 г.) В. И. Крыловым. Нами не рассмотрены здесь нелинейные интегральные уравнения. Многие результаты по этим уравнениям были получены в связи с исследованием методов решения общих нелинейных функциональных уравнений.

Некорректные задачи и их решение

Понятие корректно поставленной задачи принадлежит Адамару. Задача называется корректно поставленной, если удовлетворяет следующим условиям:

1) решение задачи существует для всех данных, принадлежащих некоторому замкнутому линейному многообразию линейного нормированного пространства (чаще всего это многообразие совпадает со всем пространством);

2) решение единственно для указанного класса данных в некотором аналогичном классе возможных решений;

3) решение устойчиво, т. е. непрерывно зависит от данных задачи при соответствующих метриках пространства.

При несоблюдении хотя бы одного из этих требований задача называется некорректно поставленной.

Долгое время господствовало высказанное Адамаром мнение, что задачи с неустойчивым решением не описывают реальных физических процессов. Однако развитие науки привело к пересмотру этой точки зрения. Оказалось, например, что многие важные в физике задачи приводят или могут быть приведены к интегральным уравнениям первого рода, являющимся типичными некорректными задачами.

Основополагающий вклад в теорию и методы решения некорректно поставленных задач внесли советские математики, в первую очередь А. Н. Тихонов, М. М. Лаврентьев и В. К. Иванов.

Начало исследований некорректных задач в нашей стране относится к 30-м годам XX в. И. Г. Малкин (1932 г.), Г. М. Голузин и В. И. Крылов (1933 г.) предложили методы последовательных приближений для решения некоторых неустойчивых задач в случае, когда исходные данные известны точно и все вычисления не округляются. П. С. Новиков впервые (1938 г.) доказал единственность решения обратной задачи теории потенциала для достаточно широкого класса областей. Вопросы единственности решения обратных задач теории потенциала изучались затем Л. Н. Сретенским, И. М. Рапопортом, Ю. А. Шашкиным, В. Н. Симоновым, А. И. Прилепко и др.

А. Н. Тихоновым был предложен (1943 г.) совершенно новый подход к некорректно поставленным задачам. Он показал, что если решение некорректной задачи существует, единственно и при варьировании данных не выходит за пределы компакта, то оно устойчиво. Идеи этой его работы были положены в основу понятия корректности задачи по Тихонову, впервые сформулированного (1962 г.) М. М. Лаврентьевым.

Задача называется поставленной корректно по Тихонову, если удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) решение задачи априори существует для какого-то класса данных N и принадлежит некоторому множеству M пространства возможных решений;
- 2) для данных из класса N решение единственно на множестве M ;
- 3) принадлежащее множеству M решение задачи устойчиво относительно данных из класса N . Множество M называется ее множеством корректности.

1

Изучение корректных по Тихонову задач

Корректные по Тихонову задачи изучены главным образом М. М. Лаврентьевым (статьи 50—60-х годов и монография «О некоторых некорректных задачах математической физики», 1962 г.). В гильбертовом пространстве рассматривается уравнение первого рода

$$A\varphi = f \quad (56)$$

с вполне непрерывным оператором A . Всякий компакт M , на котором для уравнения (56) выполнены первое и второе условия корректности по Тихонову, является множеством корректности этой задачи, и существует непрерывная неубывающая функция (модуль непрерывности) $\omega(\tau)$, $\omega(0) = 0$, такая, что из соотношений $u, v \in M$, $\|Au - Av\| < \tau$ вытекает неравенство $\|u - v\| \leq \omega(\tau)$. Считая множество M и функцию $\omega(\tau)$ известными, М. М. Лаврентьев предлагает эффективные методы приближенного решения уравнения (56) с оценкой отклонения приближенного решения от точного.

Для случая, когда оператор A линейный, $\|A\| \leq 1$, а множество корректности M определяется соотношениями $\{u : u = Bv, \|v\| \leq 1\}$ с линейным вполне непрерывным оператором B , $\|B\| \leq 1$, предложены два способа решения. В первом из них исходное уравнение заменяется уравнением второго рода

$$[(AB)^* AB + \varepsilon^2 E] B^{-1} \varphi_\varepsilon = (AB)^* f_\varepsilon,$$

где f_ε — приближенная правая часть уравнения (56), $\|f_\varepsilon - f\| \leq \varepsilon$, E — тождественный оператор, а φ_ε — искомое приближенное решение. Показано, что $\|\varphi_\varepsilon - \varphi\| \leq 2\omega(\varepsilon)$. Во втором методе решения уравнения (56) предлагается выполнить n итераций по формулам

$$\varphi_{k+1,\varepsilon} = \varphi_{k,\varepsilon} - B(AB)^*(A\varphi_{k,\varepsilon} - f_\varepsilon), \quad \varphi_{0,\varepsilon} = f_\varepsilon,$$

где $n = n(\varepsilon)$ — целая часть числа $\frac{(1-\varepsilon^2)}{4\varepsilon^2}$. При этом

$$\|\varphi_{n,\varepsilon} - \varphi\| \leq 2\omega\left(\frac{1 + \sqrt{n+2}(\ln n + 1)\varepsilon}{\sqrt{n+2}}\right) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Применительно к задаче Коши для уравнения Лапласа этот способ был предложен и обоснован (1949 г.) Б. А. Андреевым в случае точно известной правой части f и использовался затем (без обоснования) также в случае приближенных данных. Для решения произвольных линейных уравнений первого рода с точной правой частью этот метод исследован в монографии (1956 г.) А. К. Маловичко.

Для нелинейных уравнений вида (56) М. М. Лаврентьев предложил два метода последовательных приближений. Множество корректности M считается выпуклым компактом. В одном из способов используются элементы $\bar{u} \in M$, реализующие расстояние от элементов u до множества M . Выполняется n итераций

$$\varphi_{k+1,\varepsilon} = \bar{\varphi}_{k,\varepsilon} - \lambda_k (A\bar{\varphi}_{k,\varepsilon} - f_\varepsilon), \quad \varphi_{0,\varepsilon} \in M,$$

где λ_k и $n = n(\varepsilon)$ выбираются определенным образом, и в качестве приближенного решения используется элемент $\bar{\varphi}_{n,\varepsilon}$. В другом методе оператор A считается дифференцируемым по Гато. В обоих случаях оценивается отклонение приближенного решения от точного.

М. М. Лаврентьевым изучен также ряд конкретных задач, сводящихся к уравнению первого рода вида (56).

Задача Коши для уравнения Лапласа. В плоском случае эта задача эквивалентна определению аналитической функции по ее значениям на кривой, несущей данные Коши. Доказана устойчивость последней задачи в классе корректности, составленном из аналитических функций, равномерно ограниченных в соответствующей области, и построена функция, характеризующая устойчивость. С помощью метода функций Карлемана задачу Коши для уравнения Лапласа удается исследовать не только на плоскости, но и в пространстве. Для класса равномерно ограниченных функций доказана устойчивость задачи в любой области с достаточно гладкой границей, на части которой известны данные Ко-

ши, и предложен эффективный способ отыскания приближенного решения с оценкой погрешности. Оценки, характеризующие устойчивость пространственной задачи, получил (1956 г.) также С. Н. Мергелян. Относительно задачи Коши для общего линейного эллиптического уравнения получены сходные результаты; в частности, М. М. Лаврентьевым и Е. М. Ландисом найдены оценки устойчивости. З. Г. Агеевой и В. К. Ивановым предложен (1964 г.) метод численного решения многомерной задачи Коши, основанный на выходе в комплексную плоскость по одной из переменных.

Обратная задача теории потенциала. Эта задача была модельной в статье А. Н. Тихонова «Об устойчивости обратных задач» (1943 г.). Еще раньше (1940, 1941 гг.) корректность ее для весьма узкого класса решений в плоском случае установил И. М. Рапопорт. Сведя задачу к линейному уравнению первого рода, М. М. Лаврентьев получил оценки, характеризующие ее устойчивость в классе областей, ограниченных непрерывно дифференцируемыми поверхностями с равномерно ограниченными производными. В. К. Иванов предложил (1962 г.) для решения обратной задачи теории потенциала метод последовательных приближений, пригодный в случае, когда известно тело, потенциал которого близок к потенциалу искомого тела.

М. М. Лаврентьевым исследованы также задачи аналитического и гармонического продолжения функций.

2

Теория квазирешений

Корректность по Тихонову для некорректной задачи восстанавливается, в сущности, за счет сужения класса рассматриваемых решений до множества корректности. Возможны, однако, и другие способы восстановления корректности. Исходя из первоначальной идеи С. Н. Мергеляна, В. К. Иванов предложил изменить для этой цели понятие решения, рассматривая вместо него квазирешения. Для уравнения (56) с оператором A , действующим из пространства Φ в метрическое пространство F , квазирешением на множестве $M \in \Phi$ называется всякий элемент $\varphi' \in M$ наилучшего приближения, т. е. такой, что

$$\rho(A\varphi', f) = \min \rho(A\varphi, f), \quad \varphi \in M.$$

Квазирешения обобщают понятие решения, так как при $f \in AM$ совпадают с точными решениями на M .

Разработка теории квазирешений начата В. К. Ивановым в 1962 г. Оказалось, что если оператор A непрерывен, а множество M является компактом, то квазирешения на M заведомо существуют и в случае единственности устойчивы относительно правой части f . При линейном обратимом операторе единственность квазирешения обеспечена, если M — выпуклый компакт, а банахово пространство F строго выпукло. Таким образом, при этих условиях задача отыскания квазирешений является корректной в классическом смысле. При отсутствии единственности квазирешений обычная устойчивость теряет смысл, но существует

β -непрерывная (по Е. А. Барбашину) зависимость множества квазирешений от f (В. К. Иванов, 1963 г.). Предлагается способ численного отыскания квазирешений на компакте M . Для этого следует построить возрастающую цепочку конечномерных компактов M_n , $n \geq 1$, так, чтобы $\bigcup_{n \geq 1} \overline{M_n} = M$. Квазирешения на компакте M аппроксимируются при больших n квазирешениями на M_n , которые, в силу конечномерности M_n , нетрудно отыскать эффективно. Для линейных уравнений в случае гильбертовых пространств Φ и F квазирешения на шаре в общем виде получены В. К. Ивановым (1962 г.) при обратимом вполне непрерывном операторе и И. Н. Домбровской (1964 г.) — при обратимом непрерывном операторе.

Для уравнений с замкнутым линейным обратимым оператором В. К. Иванов доказал (1965 г.) устойчивость квазирешений в хаусдорфовом пространстве с первой аксиомой счетности. Результаты, аналогичные изложенным выше, О. А. Лисковец перенес (1967 г.) на случай необратимого замкнутого линейного оператора. Он установил также (1967 г.), что при широких и естественных условиях квазирешения уравнений с непрерывным или линейным замкнутым оператором обладают β -устойчивостью по совокупности входных данных задачи, т. е. по правой части уравнения f , оператору A и компакту M . Как и В. К. Иванов, О. А. Лисковец через характеризующий устойчивость модуль β -непрерывности получил оценку близости приближенных квазирешений к точным.

Методом квазирешений решено большое количество некорректных задач, в том числе прикладных. Обратная задача логарифмического потенциала рассмотрена В. К. Ивановым (1962 г.), задача ньютонова потенциала простого слоя — Л. Э. Казаковой (1964 г.), а объемного потенциала — О. А. Лисковцом (1967 г.). Эффективный способ равномерной аппроксимации решения интегрального уравнения первого рода предложила (1964 г.) И. Н. Домбровская. Алгоритм численного дифференцирования на основе уравнения с замкнутым оператором построили Т. Ф. Долгополова и В. К. Иванов (1966 г.), а на основе уравнения с непрерывным оператором — О. А. Лисковец (1967 г.). Задачу численного аналитического продолжения функций решила Л. Э. Казакова (1963 г.), задачу Коши для уравнения Лапласа и задачу Дирихле для простейшего гиперболического уравнения — О. А. Лисковец (1967 г.). Многие из разработанных алгоритмов приводят к задачам квадратичного программирования.

3

Регуляризация существенно некорректных задач

Новое направление в теории и методах решения некорректно поставленных задач открыто работами А. Н. Тихонова, опубликованными в 1963 г. Если раньше, чтобы придать решению устойчивость, либо сужали класс допустимых решений, либо обобщали само

понятие решения, т. е. так или иначе изменяли первоначальную постановку задачи, то А. Н. Тихонов нашел возможность эффективно строить решение некорректной задачи, не изменяя ее постановки. В этом принципиально новом подходе используется некоторая общая вариационная идея, на основе которой строятся численные алгоритмы, легко реализующиеся на быстродействующих вычислительных машинах. Априорная принадлежность решения заданному компакту уже не требуется, но взамен предполагается, что решение достаточно гладко и что известен уровень погрешности в исходных данных.

Сущность излагаемого способа, названного методом регуляризации², состоит в следующем. В случае нормированного пространства F решение уравнения (56) эквивалентно минимизации в пространстве Φ функционала $\|A\varphi - f\|^2$ (метод наименьших квадратов). Вместо этой точной (и некорректной) вариационной задачи предлагается найти минимизирующий элемент для приближенного параметрического функционала $M^\alpha(\varphi, f) = \|A\varphi - f\|^2 + \alpha\Omega(\varphi)$, где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, а $\Omega(\varphi)$ — регуляризирующий функционал, предназначенный для стабилизации решения. Он выбирается так, чтобы множества $\{\varphi: \Omega(\varphi) \leq c\}$ при всех $c \geq 0$ были компактными в пространстве Φ . Искомое решение считается принадлежащим области задания $D(\Omega)$ функционала $\Omega(\varphi)$. Чем меньше значение параметра α , тем ближе приближенная вариационная задача к точной, но и тем слабее устойчивость.

Пусть, например, решается одномерное интегральное уравнение Фредгольма первого рода с обратимым оператором, действующим вполне непрерывно из пространства $C[a, b]$ в пространство $L_2(c, d)$. Не для всякой правой части $f \in L_2(c, d)$ решение должно существовать, но если выбрать при $n \geq 1$

$$\Omega(\varphi) = \int_a^b \sum_{i=0}^n a_i(s) \left(\frac{d^i \varphi}{ds^i} \right)^2 ds, \quad a_i(s) > 0, \quad a \leq s \leq b, \quad 0 \leq i \leq n$$

(регуляризатор порядка n), то регуляризованное решение φ_α (элемент, минимизирующий $M^\alpha(\varphi, f)$) существует для $\alpha > 0$ и при $\alpha \rightarrow 0$ сходится в метрике пространства $C_{n-1}[a, b]$ к точному решению, если последнее существует и принадлежит пространству $W_2^{(n)}(a, b)$. Доказано, что задача отыскания регуляризованного решения является корректно поставленной. В случае приближенных правых частей f_ε , $\|f_\varepsilon - f\|_{L_2} \leq \varepsilon$, следует выбирать параметр $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ так, чтобы $O(\varepsilon^2) \leq \alpha(\varepsilon) \leq o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда регуляризованные решения $\varphi_{\alpha(\varepsilon), \varepsilon}$, минимизирующие $M^{\alpha(\varepsilon)}(\varphi, f_\varepsilon)$, сходятся к точному решению при $\varepsilon \rightarrow 0$ и тех же условиях в указанной выше метрике. Отыскание регуляризованного элемента сводится к решению краевой задачи для соответствующего уравнения Эйлера (А. Н. Тихонов, 1963 г.).

² А. Н. Тихонов. О регуляризации некорректно поставленных задач. — ДАН СССР, 1963, т. 153, № 1, стр. 49—52

В следующих работах А. Н. Тихонова (частично выполненных в соавторстве) метод регуляризации применяется к целому ряду некорректных задач: к задаче равномерной аппроксимации функции по возмущенным в l_2 коэффициентам Фурье, к задачам спектроскопии, оптимального управления и оптимального планирования, численного дифференцирования и операционного исчисления, к решению вырожденных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений, к задаче оптимизации функционалов и др. В. Я. Арсенин изучал (1965 г.) отыскание разрывного решения интегрального уравнения первого рода, В. А. Морозов и В. Ф. Иванищев рассмотрели (1966 г.) расчет арочных плотин.

Проведенные расчеты и численные эксперименты по применению метода регуляризации (например, в работах А. Н. Тихонова и В. Б. Гласко, 1964—1967 гг.) показали его эффективность и позволили высказать рекомендации о выборе параметра регуляризации. В теоретическом плане последний вопрос исследовался (1967 г.) В. А. Морозовым.

И. Н. Домбровская и В. К. Иванов показали (1965 г.), что семейство регуляризованных решений φ_α при $\alpha \rightarrow 0$ для линейных уравнений состоит из квазирешений на расширяющейся системе множеств; это не связано ни с какими структурными свойствами оператора, лишь бы он был определен на $D(\Omega)$, а регуляризующий функционал был неотрицательным (О. А. Лисковец, 1967 г.). Доказано также, что в равномерно выпуклых по Кларксону пространствах вместо компакта M можно брать шар (слабый компакт). Это равносильно выбору $\Omega(\varphi) = \|\varphi\|^2$ и позволяет отказаться от требования гладкости решения. Уравнения первого рода с линейным непрерывным оператором в гильбертовом пространстве при подобном выборе функционала $\Omega(\varphi)$ (регуляризация нулевого порядка) рассматривались А. Б. Бакушинским (1965 г.) и В. А. Морозовым (1965—1967 гг.), а в случае замкнутого оператора — В. В. Ивановым и В. Ю. Кудринским (1966 г.).

По идее близкий к методу А. Н. Тихонова и двойственный ему способ решения, состоящий в минимизации функционала $M^\alpha(\varphi, f_\varepsilon)$ при условии $\|A\varphi - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon$, так называемый принцип невязки, разрабатывался И. Н. Домбровской (1964 г.), В. К. Ивановым (1966 г.), В. А. Морозовым (1967 г.).

А. Н. Тихонов ввел (1963 г.) понятие регуляризатора. Под регуляризатором уравнения (56) понимается регуляризующий оператор, т. е. такой непрерывный ограниченный параметрический оператор R_α , $\alpha > 0$, для которого $R_\alpha A\varphi \rightarrow \varphi$, $\alpha \rightarrow 0$. Согласно современным представлениям, каждая реальная задача математической физики регуляризуема, т. е. имеет регуляризатор. Для построения регуляризатора можно использовать квазирешения на расширяющейся системе компактов. Метод регуляризации фактически тоже дает значения регуляризующего оператора. В ряде случаев возможно независимое построение регуляризатора. Например, для уравнения (56) с линейным непрерывным или вполне непрерывным оператором регуляризатор имеет вид $R_\alpha = (A^*A + \alpha E)^{-1} A^*$, он изучался А. Б. Бакушинским (1965 г.), Ю. И. Худаком (1966 г.), В. К. Ивановым (1967 г.). В частности, для

гильбертова пространства, где этот регуляризатор совпадает с регуляризатором нулевого порядка, установлено, при какой зависимости $\alpha(\varepsilon)$ оператор R_α обеспечивает слабую либо сильную регуляризацию. Аналогичный результат для замкнутого линейного оператора A получила (1967 г.) Л. Ф. Коркина. Класс равномерных регуляризаторов рассмотрен (1966 г.) В. К. Ивановым.

Пользуясь спектральным представлением самосопряженных операторов гильбертова пространства, А. Б. Бакушинский предложил (1967 г.) весьма общий способ построения семейства регуляризаторов в случае ограниченного оператора и решил ряд связанных с этим семейством экспериментальных задач, а Ю. Т. Антохин, построив регуляризаторы для уравнения с неограниченным оператором, получил (1967 г.) оценки быстроты приближения к истокорпредставимому решению. Один из регуляризаторов в виде ряда по $A^k f$ Ю. Т. Антохин применил (1966 г.) к построению аналитической функции $\psi(z)$ по ее значениям в точках $z = 1, 2, \dots, n$, к обратной задаче теории потенциала и другим задачам.

В заключение укажем работы М. М. Лаврентьева и В. Г. Васильева (1966 г.) и А. П. Петрова (1967 г.), в которых развивается теоретико-вероятностный подход к некорректным уравнениям первого рода, и работы Л. А. Чудова (1962—1967 гг.), Л. С. Франка (1964—1967 гг.) и Л. И. Северинова (1965 г.) по разностным методам решения различных некорректных задач.

Численное интегрирование

Один из способов нахождения приближенного значения интеграла состоит в замене его линейной комбинацией из конечного числа значений интегрируемой функции

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}). \quad (57)$$

Формула (57) при заданном n определяется своими узлами $x_k^{(n)}$ и коэффициентами $A_k^{(n)}$. Следуя Гауссу, их можно выбирать так, чтобы формула (57) была точной для возможно большего числа первых функций из заранее заданной системы $\omega_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Наиболее изучен случай $\omega_k(x) = x^k$. Кроме того, изучались квадратурные формулы, точные для систем рациональных функций (В. И. Крылов и др.) и тригонометрических многочленов (А. Х. Турецкий, Н. П. Кеда). Составлены (см., например, В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина, 1966 г.) подробные таблицы узлов и коэффициентов квадратурных формул для классических весовых функций.

Квадратурные формулы можно строить, подчиняя выбор узлов и коэффициентов и другим целям. За величину, характеризующую точ-

ность квадратурной формулы для всех функций f из заданного класса F , может быть принята, например, верхняя граница $|R_n(f)|$:

$$R = \sup_f |R_n(f)|,$$

где

$$R_n(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}).$$

Стремясь достичь возможно большей точности для всех функций $f \in F$, выбирают узлы $x_k^{(n)}$ и коэффициенты $A_k^{(n)}$ так, чтобы величина R имела наименьшее значение. Такие квадратурные формулы называют формулами с наименьшей оценкой остатка. Для некоторых классов функций их изучали С. М. Никольский (1950 г.), М. Б. Аксень и А. Х. Турецкий (1966 г.), Г. Я. Доронин (1955 г.), Т. А. Шайдаева (1959 г.), И. И. Ибрагимов и Р. М. Алиев (1965 г.).

Одной из основных задач сходимости квадратурного процесса является следующая: определить, каким условиям должны удовлетворять узлы и коэффициенты квадратурной формулы, чтобы выполнялась сходимость остатка $R_n(f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех функций из заданного класса F . Первые значительные результаты в этом направлении принадлежат В. А. Стеклову (1916—1918 гг.) и Г. По́я (1933 г.). В. А. Стекловым были найдены достаточные условия сходимости квадратурного процесса в классе непрерывных функций. С. М. Лозинский получил (1940 г.) необходимые и достаточные условия сходимости квадратурного процесса в следующих классах функций: а) абсолютно непрерывных, б) ограниченной вариации, в) имеющих разрывы только первого рода, г) ограниченных и имеющих не более чем счетное множество точек разрыва. В. И. Крыловым найдены (1955 г.) такие условия для функций, имеющих производные определенного порядка. В. И. Крылов и Т. К. Арлюк рассматривали (1963 г.) квадратурные формулы, содержащие как значения функций f , так и значения ее производных, и установили условия сходимости их в классах функций, r -я производная которых непрерывна, абсолютно непрерывна или изменяется ограниченно.

Рассмотрим проблему повышения точности квадратурного процесса. Остаток квадратуры $R_n(f)$ зависит как от вида квадратурной формулы, так и от свойств интегрируемой функции. Поэтому увеличить точность квадратуры можно либо путем преобразования квадратурной формулы, либо путем «улучшения» свойств функции $f(x)$. Стремясь повысить точность квадратурного правила путем его преобразования, В. И. Крылов (1954 г.) и В. Н. Смирнов (1956 г.) нашли аналоги хорошо известной формулы Эйлера — Маклорена.

Во втором случае обычно используют особое преобразование подынтегральной функции, которое позволяет либо ослабить особенности функции $f(x)$, либо устранить их совсем (Л. В. Канторович, 1934 г.; В. И. Крылов, 1955 г.). При вычислении определенного интеграла обычно стремятся построить правило вычисления, содержащее возможно меньшее число значений интегрируемой функции, но в то же время

дающее возможность вычислить интеграл с заданной точностью. В задаче неопределенного интегрирования можно использовать не только значения интегрируемой функции, но и ранее найденные значения первообразной функции, причем каждое из них по нескольку раз. Используя эти идеи, В. И. Крылов исследовал (1954 г.) для некоторых случаев возможность построения таких формул наивысшей алгебраической степени точности.

Большое количество работ советских математиков посвящено построению и применению интерполяционных квадратур, квадратурным правилам с равными коэффициентами, представлению и оценке остатков квадратур (С. Н. Бернштейн, Я. Л. Геронимус, В. И. Крылов, Н. М. Крылов, Ш. Е. Микеладзе, Е. Я. Ремез, А. Х. Турецкий, М. В. Пентковский и др.). Эти и другие вопросы теории квадратур исследуются в монографиях В. И. Крылова (1967 г.) и С. М. Никольского (1958 г.).

Остановимся на некоторых задачах, относящихся к проблеме приближенного вычисления n -кратных интегралов.

Как и в одномерном случае, составляя линейную комбинацию значений интегрируемой функции, для искомого интеграла записываем равенство

$$\int_R f(x) dx = \sum_{k=1}^N A_k^{(N)} f(x_k^{(N)}) + R_N(f). \quad (58)$$

Одна из задач теории кубатур заключается в следующем: в кубатурной сумме выбрать число слагаемых N , N коэффициентов $A_k^{(N)}$ и Nn координат узлов $x_k^{(N)}$ так, чтобы формула (58) без остатка была точной для конечного числа s функций из системы $\omega_j(x)$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) при достаточно малом или даже наименьшем возможном числе узлов N . Эта задача частично решена для случая, когда в качестве функций $\omega_j(x)$ взяты многочлены

$$1, x_i, x_i x_j, x_i x_j x_k, \dots \quad (1 \leq i \leq j \leq k \leq \dots \leq n)$$

(см., например, В. И. Крылов, 1967 г.).

Рассмотрим кубатурные формулы, построенные С. Л. Соболевым. Пусть G — некоторая группа вращений сферы, преобразующая систему точек $x_k^{(N)}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) в себя. Если g — элемент группы, тогда множество $(gx_k^{(N)}, k = 1, 2, \dots, N)$ совпадает с множеством $\{x_k^{(N)}\}$. Заставим g пробегать всю группу G . Все точки вида $g_i x_k^{(N)}$ ($i = 1, 2, \dots, M$) при фиксированном k , где M — порядок группы, назовем



М. В. Пентковский.

эквивалентными. Рассмотрим кубатурную формулу

$$\iint_s f ds \approx \sum_{k=1}^N C_k^{(N)} f(x_k^{(N)})$$

для функций, заданных на сфере, и предположим, что коэффициенты $C_k^{(N)}$ при всех эквивалентных точках совпадают. Такие формулы С. Л. Соболев назвал (1962 г.) инвариантными относительно преобразований группы G . Они оказываются всегда точными для большого числа сферических гармоник. Их ошибки исследованы С. Л. Соболевым для различных классов функций.

Более подробно эти вопросы изложены в лекциях (1964, 1965 гг.) С. Л. Соболева.

Остановимся, наконец, еще на одном направлении в теории кубатур. Согласно классической теории для вычисления интеграла

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

его записывают в виде повторного интеграла и последовательно заменяют по каждой переменной аппроксимирующей суммой. В результате получают кубатурную формулу с узлами в вершинах прямоугольной сетки. Н. С. Бахвалов показал (1959 г.), что построенные таким образом кубатурные формулы обеспечивают наилучший возможный порядок убывания погрешности $R_N = O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right)$ на классе функций, имеющих непрерывные производные до порядка αn :

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \quad (0 \leq k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq \alpha n,$$

$$0 \leq k_v \leq \alpha n, \quad n \geq 1, \quad \alpha \geq 1).$$

Большой практический интерес представляют также классы функций, у которых непрерывны не все производные до порядка αn , а лишь те из них, у которых порядок по каждой переменной не превосходит α . На таких классах функций для погрешности R_N нельзя получить лучшую оценку, чем $R_N = O(N^{-\frac{\alpha}{n}})$. Эта оценка зависит от кратности интегралов, и поэтому при больших n формулы, полученные классическим способом, малоприменимы.

Н. М. Коробов предложил (1957, 1959 гг.) в качестве узлов кубатурных формул использовать сетки, носящие теоретико-числовой характер. В частности, к ним относятся так называемые параллелепипедальные сетки, т. е. сетки вида

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_n k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

где величины $a_1, a_2, \dots, a_n$ — специальным образом выбранные целые числа, называемые оптимальными коэффициентами. Для погреш-

ности кубатурных формул с параллелепидальными сетками справедлива оценка

$$R_N = O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right),$$

где $\alpha \geq 1$, γ — некоторое число, зависящее только от α и n .

Последнему направлению в теории кубатур посвящена монография (1963 г.) Н. М. Коробова.

Кубатурные формулы исследовали Н. Я. Виленкин (1959 г.), Д. Г. Гребенюк (1950 г.), В. А. Диткин (1948 г.), С. М. Ермаков (1959 г.), В. И. Крылов (1961 г.), Л. А. Люстерник (1948 г.), Ш. Е. Микеладзе (1952 г.), И. П. Мысовских (1962 г.), И. М. Соболев (1960 г.), В. М. Солодов (1959 г.), Н. Н. Ченцов (1961 г.), И. Ф. Шарыгин (1960 г.), И. А. Эброхи (1954 г.), Т. Г. Эброхи (1955 г.), Л. А. Янович (1962 г.).

Приближенные и численные методы теории функций комплексного переменного

Теория функций комплексного переменного — одна из больших ветвей анализа, тесно связанная с различными областями математики и играющая важную роль во многих ее приложениях. Приближенные методы этой теории систематически разрабатываются с середины первой половины XX в. Советскими математиками получен ряд важных основополагающих результатов. Рассмотрим некоторые результаты по вопросам приближенного конформного отображения и некоторым вопросам приближения функций комплексного переменного. Остановимся на одном из понятий, общих для геометрии и теории функций комплексного переменного, — конформном отображении.

Точно выполнить конформные преобразования в удобном для приложений виде удалось в сравнительно небольшом числе областей, что, естественно, потребовало разработки приближенных методов конформных отображений. Как отмечалось, значительный вклад в развитие теории функции комплексного переменного, в частности в теорию конформных отображений, внес М. А. Лаврентьев. Разработанный им метод (1934 г.) приближенных конформных отображений основан на построении главных частей отображающей функции, которые строятся в результате выяснения зависимости отображающей функции от геометрических свойств области и интегральных представлений аналитических функций.

Рассмотрим конформное отображение с точки зрения конкретизации видов отображаемых областей. В задаче конформного отображения односвязных областей важны случаи, когда одна из отображаемых областей является кругом. С помощью приближенных методов для таких видов областей задача отображения произвольных областей решается последовательным выполнением этих двух преобразований.

С. А. Гершгорин свел (1933 г.) задачу построения функции, конформно отображающей заданную односвязную область D на круг, к решению интегрального уравнения Фредгольма. Функцию отображения предлагается приближенно находить, решая полученное уравнение методом механических квадратур. Эта идея остается справедливой и в случае отображения односвязной области, содержащей бесконечно удаленную точку, на внешность единичного круга. Для того чтобы регулярная в области D , содержащей начало координат, функция $f(z)$, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$, давала конформное отображение D на круг, необходимо, чтобы квадрат ее модуля в граничных точках области D был постоянной величиной. Учитывая этот факт, В. И. Крылов предложил (1937 г.) метод приближенного конформного отображения D на круг, состоящий в том, что искомая функция находится либо в виде линейной комбинации известных функций, либо в виде разложения по степеням малого параметра; в первом случае ищутся коэффициенты, во втором — функции при степенях малого параметра из условий, чтобы квадрат модуля на границе области был равен постоянному значению. Это позволяет в некоторых случаях сравнительно просто найти приближенно отображающую функцию. Аналогично можно отобразить внешность области D на внешность круга.

Л. В. Канторович предложил (1933 г.) метод конформного отображения единичного круга на конечную односвязную область, основанный на том, что задача конформного преобразования круга на область эквивалентна отысканию специального параметрического представления контура области. Для получения искомого представления контура строится бесконечная система, вообще говоря, нелинейных уравнений для нахождения коэффициентов этого параметрического представления. Метод Л. В. Канторовича особенно удобен в случае отображения единичного круга на область, уравнение контура которой имеет вид

$$x^2 + y^2 - 1 - \lambda P(x, y) = 0,$$

где $P(x, y)$ — четный полином. В этом случае искомая отображающая функция представляется в виде ряда по степеням параметра λ . Ограничиваясь несколькими членами этого ряда, во многих случаях можно получить приближенные формулы конформного отображения. Г. А. Николаева описывает (1956 г.) различные численные варианты реализации метода Л. В. Канторовича, а также рассматривает с несколько новой точки зрения вопросы сходимости и оценки точности этого метода, основанные на сведениях данной задачи к решению некоторого функционального уравнения.

П. В. Мелентьев предложил (1937 г.) приближенный метод конформного преобразования круга на область, состоящий в построении многочлена, который преобразует окружность круга в кривую, имеющую с контуром данной области некоторое число общих точек. Построение этого многочлена включает графический перенос точек на контур области и ряд несложных вычислений. Используя идеи этого метода, Ю. В. Благовещенский разработал (1950 г.) аналогичный ме-

тод конформного отображения указанных областей, основанный на использовании рядов Фурье и некоторого приема последовательных приближений.

Б. А. Вертгейм указывает (1958 г.) способ отображения единичного круга на область, уравнение которой задано параметрически в виде

$$W = \exp \{f_1(t) + if_2(t)\},$$

где функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют вторую производную, удовлетворяющую условию Липшица. Этот способ основан на применении к решению соответствующего нелинейного сингулярного интегрального уравнения модифицированного метода Ньютона, развитого Л. В. Канторовичем.

Конформное отображение круга $|z| < 1$ в плоскости $z = x + iy$ на произвольный многоугольник в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ выполняется, как известно, с помощью интеграла Кристоффеля — Шварца:

$$\zeta = c \int_{a_1}^z (z - a_1)^{\alpha_1-1} (z - a_2)^{\alpha_2-1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n-1} dz + A_1,$$

где $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ — внутренние углы при вершинах $A_1, A_2, \dots, A_n$ многоугольника, c — постоянная, $a_1, a_2, \dots, a_n$ — точки единичной окружности в плоскости $z = x + iy$, соответствующие вершинам многоугольника, причем три из этих точек могут быть заданы произвольно, а расположение остальных $n - 3$ точек должно быть определено из некоторой системы уравнений. Нахождение постоянных Кристоффеля — Шварца при отображении круга или верхней полуплоскости на многоугольник — сложная проблема. При исследовании этой проблемы были разработаны приближенные методы ее решения.

Н. П. Стенин при решении системы уравнений для определения параметров a_i применяет (1937 г.) метод Ньютона — Фурье, при этом он указывает условия выбора начальных значений, обеспечивающих сходимость приближений. П. П. Куфарев предложил (1947 г.) другой метод для определения постоянных Кристоффеля — Шварца, основанный на применении дифференциального уравнения Левнера.

Для некоторых видов многоугольников И. С. Хара получил (1959 г.) в конечном виде приближенные формулы, дающие явное аналитическое выражение длин сторон многоугольников через постоянные Кристоффеля — Шварца, которые в свою очередь несложно выражаются через отношения длин сторон многоугольников.

П. Ф. Фильчаков, используя разложение в степенные ряды, получил (1961 г.) систему для определения искомых констант, из которой эти константы находятся методом Ньютона — Фурье. С помощью гипергеометрических рядов В. Н. Савенков решил (1964 г.) задачу определения констант интеграла Кристоффеля — Шварца для произвольного четырехугольника. Методы нахождения этих констант, основанные на электро моделировании, предложены Г. Н. Положим (1955 г.), П. Ф. Фильчаковым (1949—1963 гг.) и др.

С помощью метода Л. В. Канторовича М. И. Муратов решил задачу о приближенном построении функции, совершающей конформное

преобразование полуплоскости на область, уравнение контура которой задается в виде рациональной функции. Как и в методе Л. В. Канторovichа, в уравнение контура вводится вещественный параметр λ и иско-мая функция получается в виде ряда по степеням параметра λ , который сходится при малых значениях $|\lambda|$.

Как известно, две произвольные области одинакового порядка связности не могут быть, вообще говоря, конформно отображены друг на друга. Существование такого отображения гарантируется наличием у областей одних и тех же так называемых конформных инвариан-тов. Что касается двусвязных областей, то каждая из них может быть отображена на круговое кольцо, отношение внешнего и внут-реннего радиусов которого зависит от вида области. Для гранич-ных значений полярного угла функции, отображающей двусвязную область на соответствующее кольцо, В. И. Крылов получил (1937 г.) интегральные уравнения, приближенно решая которые можно в ряде случаев эффективно построить функцию, приближенно отображающую двусвязную область на кольцо. На основании одной экстремаль-ной задачи Г. Я. Хажалия предложил (1940 г.) процесс построения последовательности рациональных дробей, которые равномерно схо-дятся к функции, конформно отображающей данную двусвязную область на круговое кольцо. Б. И. Гехт показал (1955 г.), что для некоторых видов двусвязных областей сингулярное интегральное уравнение, получающееся при построении отображаемой функции, может быть ре-шено методом последовательных приближений.

Г. М. Голузин построил (1937 г.) эффективный метод конформного отображения многосвязных областей на плоскость с параллельными разрезами. Задача построения отображающей функции сводится к ре-шению системы функциональных уравнений, для которой выясняются условия разрешимости методом последовательных приближений. В не-которых случаях этот метод весьма удобен и приводит к законченным результатам. В. И. Крылов свел (1937 г.) задачу отображения такого вида областей к системе интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода, которые имеют довольно простой вид и, следовательно, удобны для практического приложения.

В 1955—1964 гг. вышло несколько работ П. Ф. Фильчакова, в ко-торых предлагается метод последовательных конформных отображений и метод, основанный на тригонометрической интерполяции. Эти методы позволяют с помощью простых расчетных формул получить отображаю-щую функцию с требуемой точностью.

Как отмечалось выше, для решения задачи конформного отобра-жения начали широко применять методы электромоделирования. В этом направлении в первую очередь следует назвать работы Ю. Г. Толстова (1942—1944 гг.), Г. Н. Положего (1955 г.), П. Ф. Фильчакова (1949—1963 гг.), А. Г. Угодчикова (1955—1966 гг.).

Остановимся на некоторых других методах теории функций комп-лексного переменного.

Заметим, что метод аналитического продолжения посредством замены переменной применяется в ряде задач численного анализа.

Л. В. Канторович и В. И. Крылов успешно использовали его для расширения области применимости метода последовательных приближений в задаче численного решения интегральных уравнений. Дальнейшему исследованию метода замены переменных при аналитическом продолжении посвящена работа (1959 г.) В. Н. Кублановской, в которой выясняются условия применимости его к достаточно широкому классу задач численного анализа и даются некоторые рекомендации для пользования им.

Весьма широко применяются методы теории функций комплексного переменного в операционном исчислении. При решении задач с использованием преобразования Лапласа довольно часто не представляется возможным точно восстановить функцию $f(t)$ по ее изображению $F(p)$. В этом случае или даже когда функция $f(t)$ может быть найдена, но имеет громоздкий вид прибегают к приближенным методам обращения преобразования Лапласа. Часто удобно исходить из интеграла Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp,$$

обращающего преобразование Лапласа, и строить для него соответствующие квадратурные формулы. В. И. Крылов и Н. С. Скобля (1961 г.) и Н. С. Скобля (1964 г.) рассматривали квадратурные формулы наивысшей степени точности для интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \varphi(p) dp \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi(p_k)$$

и составили таблицы коэффициентов A_k и узлов p_k для некоторых значений n и s .

Задаче приближенного восстановления функции по ее преобразованию Лапласа и некоторым другим преобразованиям с помощью представления искомой функции в виде ряда и сведения этой задачи к проблеме моментов посвящены работы (1960, 1963 гг.) В. М. Амербаева. К этому же направлению относится исследование (1952 г.) В. П. Пилатовского, где на основании полученного автором функционального равенства, связывающего $f(t)$ и $F(p)$ в бесконечном числе точек, предлагается находить приближенное значение функции $f(t)$ в виде тригонометрического ряда, коэффициенты которого являются значениями лапласового преобразования $F(p)$ в некоторых дискретных точках. Так как восстановление функции $f(t)$ по ее изображению $F(p)$ в сущности представляет собой решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода (57), то к этой задаче применимы методы решения некорректных задач, разработанные А. Н. Тихоновым, В. К. Ивановым и др.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Развитие теоретической физики и ее математических методов

1

Единство физической теории и ее математического аппарата

Стало уже трюизмом говорить об огромной роли математики в современном естествознании и технике. Но говоря об этой роли, многие понимают ее как подсобную; математику часто рассматривают как вспомогательное средство, с помощью которого можно находить результаты применения известных законов природы к определенным конкретным условиям и задачам. При этом считается, что сами законы природы, по крайней мере если речь идет о неживой природе, хотя и облекаются в математическую форму, но формулируются физикой самой по себе, независимо от математики, и что физика располагает для этого особыми, свойственными ей средствами *suī generis*, о которых, вместе со специфическим субстратом физических теорий, говорят как о некоторой физической сущности, противопоставляя эту сущность математической оболочке теории, ее форме.

Особенно частым такое противопоставление было в середине 40-х годов нашего века, в дискуссиях о природе электромагнитного поля и электрического тока: многие считали, что следует различать физическую, фарадеевскую сущность электромагнитного поля и математическую, максвеллову форму уравнений этого поля. Теперь мы все понимаем нелепость такого противопоставления и все больше и больше убеждаемся в том, что роль математики не сводится к роли слуги, что физическая теория может быть сформулирована только на языке математики и что физическое содержание теории неотделимо от ее математической формы.

Это не значит, однако, что можно ставить знак равенства между физическими теориями и чистой математикой. Физика занимается установлением законов неживой природы, а не взаимосвязями математических концепций самих по себе, как это делает математика; поэтому она всегда должна помнить о соответствии между объективно существующим предметом изучения — природой и его отображением — физической теорией.

Но мы теперь очень далеки от признания ньютоновского положения «гипотез не строю», ибо все развитие физики подтверждает другое по-

ложение — положение Эйнштейна, согласно которому «любая попытка чисто логического вывода основных понятий и законов физики из элементарного опыта обречена на провал». Иными словами, нет однозначного логического пути от фактов опыта к теоретическим системам физики.

И действительно, о каком логическом выводе закона гравитации Ньютона из опытов Галилея можно говорить, если ошибка в этих опытах достигала нескольких процентов; точность опытов Майкельсона тоже была недостаточной для того, чтобы можно было, исходя только из них, чисто логически вывести принцип инвариантности скорости света и сформулировать теорию относительности Эйнштейна.

Нельзя говорить и о логическом выводе уравнений Максвелла из опытов Фарадея. Опыт никогда не может полностью подтвердить физическую теорию. Поэтому создание физической теории, т. е. построение физической картины мира, связано не только с данными опыта, но еще, как об этом прекрасно сказал Ленин, с образованием ряда понятий и процессом ряда абстракций.

Усиление роли абстракций, необходимость введения новых понятий и концепций, столь характерные для современной физики, и объясняют особое значение математики в физике, которая по самой своей сущности, естественно, приспособлена для этой цели, тем более что новые понятия, как правило, не допускают наглядной интерпретации. Мы не видим, например, в окружающем нас мире гильбертова пространства, без введения которого невозможна формулировка квантовой механики. В окружающем нас мире мы не видим также операторов, которые должны сопоставляться различным физическим величинам, но все эти понятия хорошо были известны математике задолго до того, как введение их стало необходимостью для физики.

Так математический аппарат становится неотъемлемой частью физической теории, без него невозможна сама формулировка физической теории. Именно поэтому Бор говорил, что математика — это больше чем наука, это — язык.

Усиление роли абстракций в физической теории, нашедшее отражение в известном афоризме Гильберта «физика слишком тяжела для физиков», привело к разделению физики на две науки — экспериментальную физику и теоретическую физику — с одним объектом изучения, но разными методами.

Методы теоретической физики — это математические методы, отличающиеся большим разнообразием, но вместе с тем и определенным единством, отражающим единство объекта изучения. Чтобы понять закономерности использования того или иного математического метода в теоретической физике, а также постепенного расширения математического аппарата теоретической физики, нужно проследить за эволюцией основных физических идей и понятий. Такими понятиями являются понятия частицы и поля, и следует прежде всего выяснить, какой смысл имеют эти понятия в классической физике, т. е. классической механике Ньютона и классической электродинамике Максвелла.

В классической механике исследуются только частицы, при этом исходят из того, что движение частиц происходит строго детерминиро-



Научный семинар акад. Н. Н. Боголюбова. В первом ряду (слева направо) В. П. Шелест, Н. Н. Боголюбов, А. Н. Тавхелидзе. Киев, 1967 г.

ванно по определенным траекториям, в соответствии с законом движения, связывающим вторую производную от смещения частицы по времени с силой. Произвольными при заданной силе могут быть только начальные условия — значения координат и скорости в начальный момент времени. Поэтому основным математическим аппаратом классической механики является теория обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Основные уравнения классической механики столь прочны и незыблемы, что эту науку очень часто вообще относят не к теоретической физике, а к математике, подчеркивая этим тот факт, что главным в ее развитии в настоящее время является не установление и обоснование новых физических законов, а применение известных основных уравнений к решению конкретных задач. Тем не менее в этой устоявшейся области в последние десятилетия получены новые результаты, обогатившие физическое содержание механики. К ним относится прежде всего развитие теории нелинейных колебаний, оформившейся в самостоятельную область науки благодаря фундаментальным трудам Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского. Важные теоретические результаты по устойчивости движений механических систем получены А. Н. Колмогоровым и В. И. Арнольдом. Существенное значение имеют исследования М. Г. Крейна по теории параметрического резонанса систем со многими степенями свободы.

Приложением общих принципов механики к исследованию движений сплошных сред занимаются гидродинамика и теория упругости. В выражения законов движения среды входят теперь как производные

по времени, так и производные по координатам, т. е. вместо обыкновенных дифференциальных уравнений механики получают уравнения в частных производных.

Хотя уравнения гидродинамики известны очень давно (они были получены Л. Эйлером в 1755 г.), гидродинамика в значительно большей степени, чем механика, является физической дисциплиной. Это связано со сложностью уравнений гидродинамики, являющихся нелинейными уравнениями. Поэтому, чтобы получить новые результаты в гидродинамике, всегда приходится делать добавочные предположения и часто проводить очень сложный физический анализ конкретных условий задачи. С другой стороны, благодаря этому обстоятельству гидродинамика привлекает к себе много исследователей и в ней появляются все время новые существенные результаты. После классических исследований Н. Е. Жуковского о подъемной силе и его знаменитой теоремы, устанавливающей связь между подъемной силой и циркуляцией, а также исследований Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина о потенциальном обтекании несжимаемой жидкостью различных профилей, в которых были использованы методы теории функций комплексного переменного, самыми замечательными являются работы А. Н. Колмогорова и А. М. Обухова по теории турбулентности, в частности установление ими спектра локальной турбулентности (закон Колмогорова — Обухова).

2

Классическая электродинамика и теория относительности

Основными понятиями классической электродинамики являются понятия полей — электрического и магнитного, которые связываются ею с электрическим зарядом и током. Электрический заряд создает вокруг себя электрическое поле, а электрический ток — магнитное поле. Кроме того, электрическое поле создается переменным магнитным полем, а магнитное поле — переменным электрическим полем. Связи между различными величинами снова имеют вид дифференциальных уравнений в частных производных, так что основным математическим аппаратом всей классической физики, т. е. классической механики и классической электродинамики, является теория дифференциальных уравнений — обыкновенных и в частных производных, развитие которой, собственно говоря, и стимулировалось классической физикой.

Новые классические методы пришли в теоретическую физику вместе с теорией относительности. Основным в специальной теории относительности является положение о независимости скорости света от движения системы отсчета — принцип инвариантности скорости света. Но любая инвариантность означает существование некоторой группы преобразований. В данном случае речь идет о группе преобразований Лоренца, оставляющей инвариантной квадратичную форму, составленную из разностей декартовых координат и моментов времени

двух каких-либо событий, причем форма эта отличается тем, что квадраты декартовых координат входят с одним знаком, а квадрат времени — с другим.

Линейные преобразования, оставляющие инвариантной эту форму, трактуются как преобразования, связывающие реальные координаты и время какого-либо события в разных инерциальных системах отсчета. Ясно, что при этом время теряет свой абсолютный характер, так как мы должны считать время разным в разных системах отсчета, если только справедлив принцип инвариантности скорости света. Отсюда возникли новые кинематика и динамика материальной точки, причем формулировка законов новой динамики потребовала нового подхода к понятию поля; из формального вспомогательного понятия, каким оно было до появления теории относительности, поле стало физической реальностью, такой же как вещество.

Если лоренцевы преобразования связывают реальные пространственные и временные координаты в различных системах отсчета, то по отношению к этим преобразованиям должны быть инвариантны все законы природы, т. е. уравнения любой физической теории. Так возник мощный необходимый критерий правильности физической теории, который отбрасывает все не удовлетворяющие условию инвариантности по отношению к лоренцевым преобразованиям теории как неправильные. В частности, оказалось, что уравнения механики Ньютона не удовлетворяют этому критерию, и они были заменены другими, инвариантными уравнениями Эйнштейна. Однако при этом же выяснилось, что уравнения Ньютона являются предельным случаем уравнений Эйнштейна, если в последних чисто формально устремить скорость света к бесконечности. Таким образом, была выяснена область применимости уравнений классической механики Ньютона — они справедливы при скоростях, малых по сравнению со скоростью света в вакууме.

Уравнения электродинамики Максвелла оказываются инвариантными по отношению к преобразованиям Лоренца при соответствующем преобразовании электрического и магнитного полей. Это преобразование включает одновременно как электрическое, так и магнитное поле, так что оба они в действительности образуют единое электромагнитное поле, проявляющееся по-разному в различных системах отсчета. Математически это выражается в том, что два трехмерных вектора — электрическое и магнитное поля — образуют вместе единый антисимметричный 4-тензор второго ранга — тензор электромагнитного поля.

Фактически специальная теория относительности объединила механику и классическую электродинамику, и в этом заключается одно из важнейших ее достижений.

Релятивистская динамика широко применяется при решении ряда физических и технических задач. В. И. Векслер установил принцип автофазировки, имеющей важное значение при сооружении мощных циклических ускорителей заряженных частиц. Развитию теории этих ускорителей посвящены работы В. В. Владимирского, А. А. Коломенского, М. С. Рабиновича, а теории линейных ускорителей — работы А. И. Ахиезера, Я. Б. Файнберга, Г. Я. Любарского, Л. Э. Паргаманика

и др. Новые методы ускорения были развиты В. И. Векслером и В. П. Саранцевым, А. Н. Будкером и Я. Б. Файнбергом.

Тесно связана с проблемой ускорения частиц проблема излучения электромагнитных волн электроном, движущимся по круговой орбите в магнитном поле. Эта проблема всесторонне исследована в работах Л. А. Арцимовича и И. Я. Померанчука, Д. Д. Иваненко и А. А. Соколова. Н. Н. Боголюбовым и Д. Н. Зубаревым изучен принцип усреднения в быстроизменяющемся магнитном поле. Разработанный Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским асимптотический метод успешно применяется в теории ускорителей.

Подобно электромагнитному полю, и другие поля характеризуются определенными законами преобразования при лоренцевых преобразованиях, поэтому все поля можно классифицировать в соответствии с их законами преобразования. Математически это означает нахождение всех неприводимых представлений группы Лоренца, которые и могут в принципе служить для характеристики различных полей. Наиболее полно эта задача — нахождение всех унитарных представлений группы Лоренца — была решена И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком.

В дальнейшем мы еще вернемся к этому вопросу, здесь же заметим, что не только для полей, но и для всех величин вообще существует закон их преобразования при лоренцевых преобразованиях. В частности, энергия и импульс преобразуются по простейшему тензорному — векторному представлению и образуют, как говорят, 4-вектор. Квадрат 4-вектора (в метрике Минковского) представляет собой постоянный скаляр, равный квадрату массы частиц. Это обстоятельство разъясняет возможность существования частиц с нулевой массой, какими и оказываются фотоны, или кванты света.

Специальная теория относительности переросла в общую теорию относительности, или теорию гравитации Эйнштейна, главной идеей которой является наличие связи между геометрией пространства — времени, т. е. четырехмерного континуума, в котором происходят все физические явления, и содержимым этого континуума — материей и ее движением. Математическим аппаратом этой теории, естественно, является риманова геометрия и общий тензорный анализ.

Уравнения эйнштейновской теории гравитации связывают между собой тензор кривизны 4-мерного пространства — времени и тензор энергии — импульса «населяющей» его материи и позволяют в принципе, если известен последний, определить метрику пространства — времени. Классической задачей этого типа является задача о метрике 4-пространства и гравитационном поле в случае одной материальной точки, решенная Шварцшильдом.

Общая проблема инвариантной классификации полей тяготения на основе анализа структуры тензора кривизны пространства — времени недавно решена А. З. Петровым. В последнее время много работ посвящается обоснованию и аксиоматическому построению теории гравитации Эйнштейна. Существенный вклад в решение этой проблемы внес В. А. Фок.

Общая теория относительности открыла новые возможности для решения космологической проблемы, т. е. исследования свойств Вселенной как целого. Фундаментальное значение имеют в этом отношении исследования А. А. Фридмана, построившего теорию изотропной космологической модели (с однородным и изотропным распределением вещества по пространству) и установившего ее нестационарность. К этому же кругу вопросов относятся исследованные Е. М. Лифшицем и И. М. Халатниковым проблемы гравитационной устойчивости изотропного мира и существования особенностей в космологических решениях уравнений Эйнштейна.

Приложению общей теории относительности к релятивистской астрофизике, в частности к проблеме гравитационного коллапса, посвящены работы Я. Б. Зельдовича, И. Д. Новикова.

3

Макроскопическая электродинамика

Теория электромагнитных полей в материальных средах и теория макроскопических электрических и магнитных свойств вещества составляют предмет макроскопической электродинамики. Она тесно связана с микроскопической электродинамикой, т. е. классической электродинамикой вакуума. Как было показано еще Лоренцем, усреднив уравнения Максвелла для полей в вакууме с учетом всех зарядов и токов как внешних, так и микрочарядов и микротоков, связанных с атомами, можно получить уравнения для макрополей, содержащие только внешние заряды и токи. Это усреднение представляет собой интегрирование по простран-



Л. Д. Ландау.

ственному и временному интервалам, большим по сравнению с соответствующими атомными интервалами и малым по сравнению с интервалами, на которых существенно изменяются макроскопические поля. В результате такого усреднения вместо двух векторов, характеризующих электромагнитное поле в вакууме, — электрического и магнитного полей, приходится вводить четыре вектора: два, характеризующих электрическое состояние (они называются электрическим полем и электрической индукцией), и два, характеризующих магнитное состояние (они называются магнитным полем и магнитной индукцией). Векторы, входящие в каждую пару, связаны между собой соотношениями, определяющимися атомно-молекулярной структурой вещества. Эти соотно-

шения можно найти с помощью микроскопического рассмотрения свойств среды, т. е., вообще говоря, с помощью квантовой механики. В макроскопической электродинамике при феноменологическом описании они считаются известными.

При таком подходе к известным основным уравнениям, которым удовлетворяют электромагнитные поля в среде (они называются макроскопическими уравнениями Максвелла), многие задачи макроскопической электродинамики являются фактически задачами математической физики. К ним относятся, например, задачи об определении электростатических и магнитостатических полей при сложных конфигурациях тел, часто решаемые с помощью теории функций комплексного переменного, о распространении волн в волноводах, о собственных колебаниях в эндовибраторах, об излучении электромагнитных волн антеннами.

Многие задачи макроскопической электродинамики носят более сложный физический характер. Остановимся на некоторых из них.

Огромное теоретическое и практическое значение имеет задача о так называемом черенковском излучении, т. е. излучении равномерно движущегося заряда, скорость которого превосходит фазовую скорость распространения электромагнитных волн в среде. Эта задача решена И. Е. Таммом и И. М. Франком. Она связана с общим вопросом об ионизационных потерях быстрых частиц в веществе, исследованным Ферми. Специального изучения требует поведение электромагнитного поля в ферромагнетиках. В этом случае общих макроскопических уравнений Максвелла недостаточно и следует найти уравнение движения для плотности магнитного момента ферромагнетика. Эта задача была решена Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем.

Теории распространения радиоволн в ионосфере посвящены исследования В. А. Фока, Я. Л. Альперта, В. Л. Гинзбурга, Е. Л. Фейнберга, Л. П. Питаевского и др., в области магнитной гидродинамики: теории тангенциальных разрывов — исследования С. И. Сыроватского, теории волн большой амплитуды — работы С. А. Каплана и К. П. Станюковича, теории простых волн и устойчивости магнитогидродинамических ударных волн — исследования А. И. Ахиезера, Г. Я. Любарского и Р. В. Половина.



А. И. Ахиезер.

Квантовая механика

Дальнейшее расширение математического аппарата теоретической физики связано с возникновением квантовой механики. Квантовая механика является динамикой атомов и молекул, самое существование которых невозможно объяснить в рамках классической механики Ньютона и релятивистской динамики Эйнштейна. Действительно, опыт показывает, что в состав атома входят заряженные частицы, совершающие быстрые движения. Но движущиеся заряды непрерывно излучают, согласно законам электродинамики, электромагнитные волны, которые уносят с собой энергию, вследствие чего уменьшается энергия атома. Поэтому атом не может быть устойчивым и за очень короткое время должен прекратить свое существование.

Но есть еще и другая сторона вопроса. Если бы устойчивые атомы допускались классической механикой (либо релятивистской динамикой), то динамические их переменные — скорости, импульсы, энергии, моменты — определялись бы начальными условиями так же, как определяется начальными условиями траектория движущейся пули. Это значит, что при одной и той же структуре было бы бесконечное множество различных атомов, бесконечно мало отличающихся друг от друга. Однако такая ситуация явно противоречит наблюдаемым свойствам материи.

Это обстоятельство объясняет требования, которые должны быть предъявлены к математическому аппарату динамики атома. Он должен давать значения энергии, момента и других динамических переменных атома, не зависящие от начальных условий, в отличие от классической механики, в которой эти значения целиком определяются начальными условиями. Этим требованиям удовлетворяет теория операторов в гильбертовом пространстве, собственные значения которых определяются только их свойствами и не зависят от каких бы то ни было начальных условий. Поэтому квантовая механика сопоставляет различным физическим величинам определенные эрмитовы операторы, собственные значения которых интерпретируются как возможные значения этих величин. Вид операторов, сопоставляемых различным физическим величинам (по крайней мере, если они имеют смысл в классической механике), устанавливается просто: считая оператором декартовой координаты частицы просто умножение на значение координаты, следует считать оператором соответствующего импульса дифференцирование по этой координате (с точностью до чисто мнимого постоянного множителя); далее следует заменить в классическом выражении для рассматриваемой величины, согласно этому правилу, все импульсы соответствующими им операторами. Хотя эта процедура сама по себе очень проста, физическая интерпретация квантовой механики в целом связана с большими сложностями. Действительно, для того чтобы начальные условия не влияли на значения энергии электрона в атоме, мы вынуждены от-

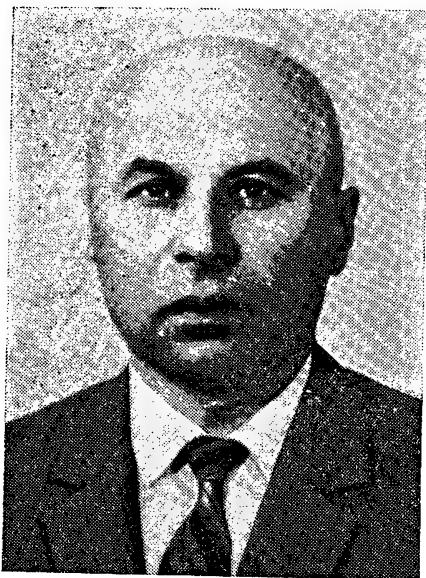
казаться от понятия траектории электрона в атоме, а это означает отказ от обычного представления о движении частиц в целом.

Глубокий анализ описанной ситуации (де Бройль, Бор, Гейзенберг, Шредингер и Дирак) показал, что классические представления о частице и поле, согласно которым понятия частицы и поля (волны) относятся к разным физическим объектам, должны быть пересмотрены; в действительности оба понятия должны относиться к одному и тому же объекту: каждая частица характеризуется волновыми свойствами, а поля или волны обладают свойствами частиц, или корпускулярными свойствами. Этот универсальный корпускулярно-волновой дуализм означает, что понятия частицы и поля сливаются в действительности в некое единое понятие.

Базируясь на корпускулярно-волновом дуализме материи, квантовая механика установила так называемые соотношения неопределенности (соотношения Гейзенберга), которые показывают, с какой степенью точности можно одновременно пользоваться классическими динамическими переменными, в частности при каких условиях справедливо понятие траектории частицы. Вообще же говоря, квантовая механика показала, что нет смысла характеризовать динамическое состояние какой-либо механической системы полным набором механических величин классической механики, ибо задание такого набора, как правило, противоречиво.

Наконец, наряду с собственными значениями эрмитовых операторов, сопоставляемых различным физическим величинам, квантовая механика установила физический смысл и собственных функций (или собственных векторов состояния) этих операторов, связав их с вероятностью обнаружения того или иного собственного значения оператора в процессе физического измерения. Эта наиболее тонкая часть принципиальных основ квантовой механики тесно связана с изменением формулировки принципа причинности, внесенным в микрофизику квантовой механикой.

Соотношениями неопределенности (соотношениями Гейзенберга) квантовая механика отрицает универсальный характер механического детерминизма, заключающегося, согласно Лапласу, в том, что компетентный математик, зная координаты и импульсы всех атомов в мире в определенный момент времени, может предсказать всю дальнейшую историю мира. Отказываясь от такой однозначной детерминированности, или, как говорит Бор, от «классического идеала детерминизма», квантовая механика не отрицает, а исходит из требования существования причинности, т. е. существования определенных динамических законов движения, отличающихся, разумеется, от законов движения классической механики. Анализируя акт измерения, квантовая механика устанавливает его материальный характер и показывает, что в силу принципиальной неконтролируемости воздействия измеряющего прибора на измеряемый объект результат измерения какой-либо величины, как правило, не однозначен. Однако он характеризуется некоторым распределением вероятностей. Амплитуды этих вероятностей определяются скалярными произведениями волновой функции, описывающей



А. С. Давыдов.

состояние системы, и соответственных функций оператора измеряемой физической величины.

Таким образом, в квантовую механику принципиально на микроскопическом уровне вводится концепция вероятности в отличие от классической физики, в которой механика полностью детерминирована и концепция вероятности вводится только в статистической физике и термодинамике, и то не по принципиальным соображениям, а скорее в силу практической необходимости, связанной с тем, что невозможно иным способом описать свойства систем, состоящих из огромного числа частиц. Правда, эта необходимость сама по себе становится принципиальной (данный случай является замечательным примером диалектического перехода количества в качество), но понятие вероятности

вводится здесь на ином уровне, чем в квантовой механике.

Советские ученые внесли существенный вклад в развитие квантовой механики. Укажем некоторые их работы. Заметим прежде всего, что не любые состояния системы могут быть описаны волновой функцией. Система, являющаяся частью большей системы, может не обладать своей волновой функцией. В этом случае говорят о смешанном состоянии в отличие от чистого состояния, относящегося к тому случаю, когда система характеризуется волновой функцией. Смешанные состояния описываются так называемой матрицей плотности, которая была впервые введена в квантовую механику Л. Д. Ландау и Ф. Блохом.

Для описания сложных систем, состоящих из многих частиц, используется метод, разработанный В. А. Фоком и Хартри (метод Хартри — Фока). Принципиальное значение имеет работа В. А. Фока об атоме водорода в p -представлении, раскрывающая смысл симметрии атома водорода.

В квантовой механике широко используется метод квазиклассического приближения. Общий способ вычисления матричных элементов в этом методе принадлежит Л. Д. Ландау. Ему принадлежит также решение весьма важной задачи о движении заряженной частицы в магнитном поле. Теории резонансного рассеяния заряженных частиц посвящены исследования Л. Д. Ландау и Я. А. Смородинского.



Д. И. Блохинцев.

Обратная задача квантовой механики — нахождение потенциальной энергии, входящей в уравнение Шредингера, по заданному энергетическому спектру и фазам на бесконечности (определяющим сечение упругого рассеяния) — была решена В. А. Марченко, М. Г. Крейном, И. М. Гельфандом, Б. М. Левитаном.

Широкое применение получила квантовая механика в исследовании проблем теории ядра. К этой области относятся основополагающие исследования Н. Н. Боголюбова по теории ядерной материи, а также исследования С. Т. Беляева и А. Б. Мигдала — по теории конечных Ферми-систем, А. С. Давыдова — по теории несферических ядер, Л. Д. Фаддеева и К. А. Тер-Мартirosяна — по теории малонуклонных систем, И. С. Шапиро и Я. А. Смородинского — по теории ядерных реакций и др.

В исследованиях А. С. Компанейца, М. В. Волькенштейна, М. А. Ельяшевича о структуре энергетических спектров атомов и молекул использована теория групп. Общие проблемы квантовой механики рассмотрены в монографиях Д. И. Блохинцева, А. С. Давыдова, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, Я. И. Френкеля и В. А. Фока, а также в лекциях Л. И. Мандельштама.

5

Статистическая механика

Необходимость усреднения уравнений микрополей для получения уравнений, описывающих макроскопические поля в материальных средах, связана с атомным строением вещества и практической невозможностью (да и нецелесообразностью) рассматривать во всех случаях флуктуации макроскопических полей, обусловленные полями отдельных атомов. Аналогичное усреднение по этим же причинам следует выполнять во всех случаях при исследовании макроскопических свойств любых больших систем, т. е. систем с огромным числом степеней свободы. Этой задачей занимается статистическая механика, которую можно условно разделить на две части — статистическую термодинамику и статистическую кинетику. Первая изучает свойства вещества при термодинамическом равновесии, а вторая — необратимые процессы. Усреднение, о котором шла речь выше, включает как квантово-механическое усреднение, связанное с квантово-механическими неопределенностями, так и статистическое усреднение, связанное с неопределенностью в начальных условиях.

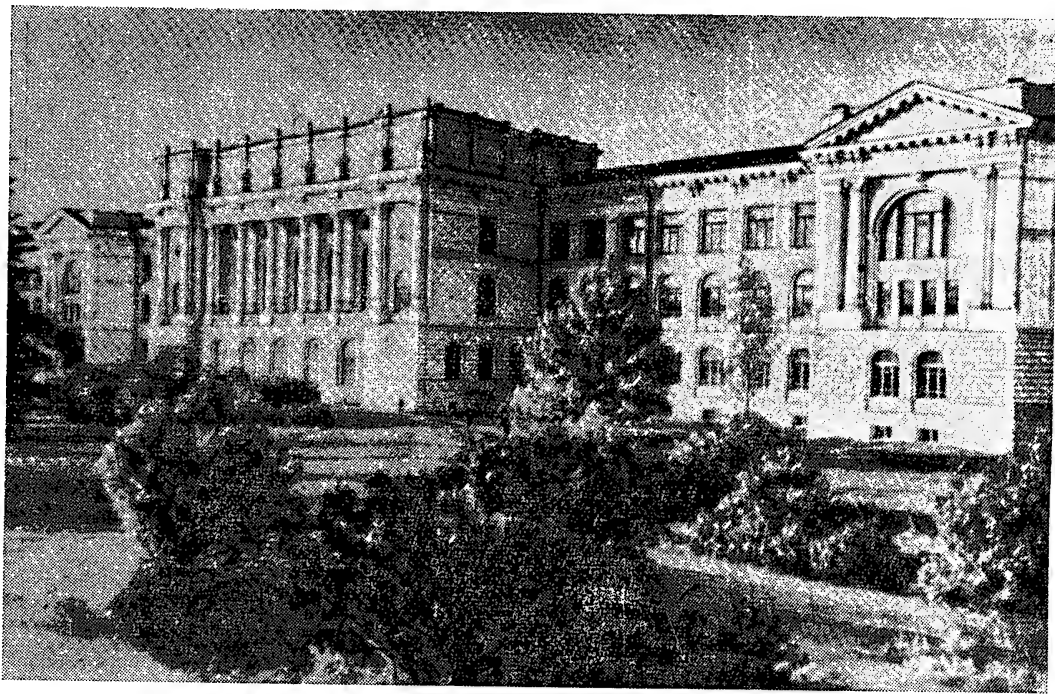
Хотя статистическая термодинамика и располагает общим методом исследования — методом Гиббса, решение конкретных задач нахождения макроскопических характеристик больших систем почти всегда связано с огромными трудностями, обусловленными необходимостью учета взаимодействия между частицами. Во многих случаях, однако, удастся рассматривать вместо взаимодействующих частиц эквивалентные

невзаимодействующие квазичастицы, т. е. свести задачу к исследованию свойств идеального газа квазичастиц.

Классическими примерами квазичастиц являются фононы, связанные с распространением звуковых волн в твердом теле, и магноны, связанные с распространением спиновых волн в ферромагнетиках. Эти квазичастицы являются бозонами и подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна. Примером квазичастиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака, могут служить электроны в металлах и полупроводниках.

Идея о квазичастице — экситоне впервые была высказана Я. И. Френкелем при изучении поглощения света в кристаллах. Последовательная теория фононов в рамках аппарата вторичного квантования принадлежит И. Е. Тамму. По статистической термодинамике в СССР выполнено большое количество исследований. Л. Д. Ландау — автор замечательной работы по теории жидкого гелия II, в которой разъясняется явление сверхтекучести жидкого гелия II, открытое П. Л. Капицей. Фундаментальным вкладом в статистическую термодинамику является работа Н. Н. Боголюбова по теории «конденсации» неидеального Бозе-газа, в которой впервые построена микроскопическая теория сверхтекучести. Это исследование было положено затем Н. Н. Боголюбовым в основу нового метода в теории сверхпроводимости, представляющего собой одно из фундаментальных достижений теоретической физики последних лет.

Разработке ряда важных вопросов теории сверхпроводимости (феноменологическое уравнение, теория сверхпроводящих сплавов и свойств сверхпроводников в сильных магнитных полях) посвящены иссле-



Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина.

дования Л. Д. Ландау и В. Л. Гинзбурга, А. А. Абрикосова и Л. П. Горькова.

Объяснение явления ферромагнетизма было дано (независимо друг от друга) Гейзенбергом, Я. И. Френкелем и Я. Г. Дорфманом. Теория экситонов в кристаллах развита А. С. Давыдовым. И. М. Лифшицем исследованы свойства заряженных Ферми-квазичастиц в металлах при постоянном и переменном электромагнитных полях. Исследованию структуры энергетического спектра элементарных возбуждений в конденсированных системах, не обладающих пространственной периодичностью, посвящены работы И. М. Лифшица, В. Л. Бонч-Бруевича, В. Л. Покровского. Особые квазичастицы — поляроны, возникающие в ионных кристаллах, открыты и исследованы С. И. Пекаром. Квазичастицы в ферромагнетиках — магноны исследованы А. И. Ахиезером, В. Г. Барьяхтаром и С. В. Пелетминским.



Я. И. Френкель.

Важным вкладом в статистическую термодинамику является теория фазовых переходов второго рода Л. Д. Ландау, в которой устанавливается связь между этими переходами и свойствами симметрии тел, претерпевших переход. К статистической термодинамике следует отнести и теорию флуктуаций. В работах советских ученых исследовались как сами флуктуации в различных системах, так и связанные с ними процессы рассеяния частиц и волн. Первые работы в этой области принадлежат М. А. Леонтовичу и С. М. Рытову.

В СССР интенсивно развиваются исследования по применению методов квантовой теории поля (см. § 6) к статистической термодинамике. Первыми были исследования В. М. Галицкого, А. Б. Мигдала и С. Т. Беляева.

Развитию метода функций Грина (температурных и временных) посвящены работы Н. Н. Боголюбова и С. В. Тябликова, А. А. Абрикосова, Л. П. Горькова и И. Е. Дзялошинского, Е. С. Фрадкина, А. Н. Ларкина, О. В. Константинова и В. И. Переля.

Переходя к кинетике, следует прежде всего заметить, что положение здесь еще сложнее, чем в статистической термодинамике; ибо необратимые процессы характеризуются так называемыми кинетическими коэффициентами, которые могут быть найдены только путем решения сложных кинетических уравнений для функций распределения частиц, например известного кинетического уравнения Больцмана. Не говоря уже о том, что решение кинетического уравнения само по себе сопряжено с огромными математическими трудностями, так как это уравнение является интегро-дифференциальным, мы должны каждый раз еще и выводить само кинетическое уравнение, ибо нет единого кинетического уравнения для всех случаев, тогда как в статистической



И. М. Лифшиц.



А. Б. Мигдал.

термодинамике существует единая формула — распределение Гиббса, справедливая для всех микроскопических систем.

Первый последовательный вывод кинетического уравнения в классическом случае принадлежит Н. Н. Боголюбову. В дальнейшем этот вывод был обобщен Н. Н. Боголюбовым и К. П. Гуровым на случай квантово-механических систем. Н. Н. Боголюбов исходит из уравнения Лиувилля для функции распределения всех частиц системы и, усредняя это уравнение по переменным всех частиц, кроме некоторых, получает систему связанных, «зацепляющихся» уравнений для частичных функций распределения. Исследуя эту систему, он показывает, как можно получить кинетическое уравнение Больцмана, и выясняет пределы его применимости.

Фундаментальное значение в исследовании свойств плазмы имеют два кинетических уравнения — уравнение Власова и уравнение Ландау. Уравнение Власова учитывает действие самосогласованного поля, т. е. поля, порождаемого самими частицами плазмы, и не учитывает эффект парных столкновений. Поэтому оно пригодно для исследования высокочастотных коллективных процессов, протекающих в плазме. Применяв уравнение Власова, Л. Д. Ландау показал, что электромагнитные волны в плазме затухают, даже если пренебречь эффектом парных столкновений частиц. Возникающее затухание (затухание Ландау) играет очень важную роль в самых различных процессах, протекающих в плазме.

Уравнение Ландау определяет интеграл столкновений в случае кулоновского взаимодействия при малых передачах импульса. Вместе с уравнением Власова оно

дает возможность исследовать весьма широкий круг вопросов, относящихся к кинетике плазмы. Область применимости уравнения Ландау была выяснена также с помощью схемы Н. Н. Боголюбова. Оно принадлежит к уравнениям типа Фоккера — Планка. А. Н. Колмогоровым разработана теория так называемых цепей Маркова, позволившая ему получить уравнение Фоккера — Планка в самом общем виде.

Квантовая электродинамика

Идеи и требования квантовой механики и специальной теории относительности являются основополагающими в современной теоретической физике, базирующейся на предположении о возможности пространственно-временного описания всех физических явлений. Однако синтез этих идей осуществлен пока, строго говоря, только в квантовой электродинамике, занимающей поэтому особое место в теоретической физике.

Квантовая электродинамика изучает только один из четырех известных в настоящее время типов фундаментальных взаимодействий — электромагнитный (три других — сильное, слабое и гравитационное взаимодействия). Более точно, она изучает электромагнитное взаимодействие электронов, мюонов и фотонов — частиц, не подверженных сильному взаимодействию (сильное взаимодействие, интенсивность которого в сотни раз превосходит интенсивность электромагнитного взаимодействия, обуславливает, между прочим, образование атомных ядер). В этом случае можно построить точные уравнения, в основе которых лежат классические уравнения электромагнитного поля Максвелла и квантово-механические уравнения релятивистского электрона Дирака.

Уравнения Дирака, как и уравнения Максвелла, носят полевой характер и отражают вместе с последними волновую природу материи. Дирак предсказал возможность существования частицы, отличающейся от электрона только знаком заряда, — позитрона. Это предсказание привело к важному выводу о том, что уравнения Дирака описывают не только электроны, но и позитроны. Поэтому, проводя аналогию между уравнениями Дирака и Максвелла, можно сказать, что уравнения Максвелла описывают электромагнитное поле, а уравнения Дирака — электронно-позитронное.

Понятия полей — электромагнитного, электронно-позитронного и мюонного — основные в квантовой электродинамике. Эти понятия должны отражать, однако, не только волновые свойства материи, что обеспечивается тем, что рассматриваемые как функции координат и времени электромагнитное и электронно-позитронное поля удовлетворяют определенным волновым уравнениям, но и корпускулярные ее свойства. Поэтому математически они должны описываться операторами (в пространстве чисел частиц), удовлетворяющими определенным перестановочным соотношениям.

Таким образом, мы приходим к понятиям квантованных полей, удовлетворяющих, как функции координат и времени, системе связанных дифференциальных уравнений Максвелла и Дирака и подчиняющихся, как операторы, определенным перестановочным соотношениям. Нахождение этих операторов, или, что эквивалентно, так называемой матрицы рассеяния, определяющей изменение состояний полей в результате их взаимодействия, и является задачей квантовой электродинамики

Решение этой задачи известно в настоящее время только в рамках теории возмущений, которая представляет количественные результаты квантовой электродинамики в виде бесконечных рядов по степеням малого параметра — постоянной тонкой структуры, характеризующей интенсивность электромагнитного взаимодействия. Однако высшие приближения теории возмущений содержат расходящиеся выражения, смысл которых был понят не сразу. Поэтому на начальной стадии развития квантовой электродинамики различные электромагнитные процессы исследовались только в первом исчезающем приближении теории возмущений, которое не приводит к появлению расходимостей.

Новый этап в развитии квантовой электродинамики, который с полным правом можно назвать вторым ее рождением, начался с появления работ Томонага, Швингера, Фейнмана, Дайсона, в которых были вскрыты физические причины расходимостей в квантовой электродинамике и разработаны рецептурные методы их устранения, связанные с применением теории обобщенных функций. Было выяснено, что все расходимости, встречающиеся в квантовой электродинамике, сводятся к двум, из которых одна связана с изменением заряда электрона, обусловленным электронно-позитронной «шубой», покрывающей электрон, а другая — с изменением массы электрона, обусловленным взаимодействием электрона с нулевыми колебаниями электромагнитного поля. Оба эти изменения — заряда и массы электрона — бесконечны в современной теории, но существенно, что все расходимости сводятся именно к этим двум бесконечностям. Если поэтому считать, что наблюдаемые значения заряда и массы электрона отличаются от значений заряда и массы гипотетического «голого» электрона, не взаимодействующего с нулевыми колебаниями электромагнитного и электронно-позитронного полей, и включают в себя изменения массы и заряда, обусловленные взаимодействием электрона с этими колебаниями, то, закрывая пока глаза на тот факт, что эти изменения бесконечны, можно выразить все величины, характеризующие различные процессы взаимодействия электромагнитного и электронно-позитронного полей, в терминах наблюдаемых массы и заряда электрона.

Эта идея перенормировки физических констант позволила объяснить и предсказать ряд тончайших физических эффектов: радиационное смещение уровней атомов (Лэмб), аномальный магнитный момент электрона (Швингер) и т.д. Так как квантовая электродинамика является, по существу, теорией взаимодействия многих тел, то естественно, что ее методы описания взаимодействия частиц стали с успехом применяться в других областях физики, изучающих многочастичные системы.

Чрезвычайно важно, что многие фундаментальные результаты, полученные в квантовой электродинамике, выходят за ее пределы и имеют общее значение. Один из таких общих результатов заключается в том, что с волновым полем следует связывать не одну, а целую совокупность частиц. Именно поэтому, описывая волновые поля с помощью функций координат и времени, следует одновременно считать их операторами в пространстве чисел частиц. Связь между частицами и полями

позволяет классифицировать частицы по свойствам трансформации связанных с ними полей при преобразованиях Лоренца, иными словами по представлениям группы Лоренца. В частности, электроны и позитроны следует описывать биспинорами, фотоны — 4-векторами, а пионы — псевдоскалярами.

Требования релятивистской инвариантности дают возможность не только классифицировать поля по представлениям группы Лоренца, но и установить замечательную теорему Паули о связи между спином и статистикой: частицы с целым спином должны подчиняться статистике Бозе — Эйнштейна (в каждом индивидуальном состоянии — произвольное число частиц), а частицы с полуцелым спином — статистике Ферми — Дирака (в каждом индивидуальном состоянии — не более одной частицы). Частицам с целым спином соответствуют тензорные представления, а частицам с полуцелым спином — спинорные представления. Наконец, заметим, что требования релятивистской инвариантности вместе с требованиями квантовой механики позволяют предсказать существование античастиц и сформулировать так называемую СРТ-теорему, т. е. теорему об инвариантности физической теории при трех одновременно совершаемых преобразованиях: зеркальном преобразовании пространства, обращении времени и замене частиц античастицами.

В отличие от нерелятивистской квантовой механики, в которой число частиц всегда остается постоянным, квантовая электродинамика исследует процессы, в которых число частиц может изменяться. Например, в процессе излучения возникает фотон, а в процессе фотообразования электронно-позитронной пары фотон исчезает и появляется электрон и позитрон. Поэтому возникает основной вопрос: как описывать квантово-электродинамические системы, имеющие неопределенное число частиц. Важный вклад в решение этого вопроса внес В. А. Фок. Он развил методы описания с неопределенным числом частиц, известные в настоящее время как метод пространства Фока и метод функционалов Фока. В первом используется представление полевых операторов в конфигурационном пространстве и уравнения движения сводятся к бесконечной системе зацепляющихся уравнений типа уравнения Шредингера для волновых функций одной, двух и т. д. частиц. Во втором используются производящие функционалы, сопоставляемые бесконечной последовательности волновых функций систем с определенными числами частиц. После создания инвариантной теории возмущений и развития идеи перенормировки физических констант методу функционалов Фока была придана ковариантная форма, не



В. А. Фок.



М. А. Марков.

содержащая расходимостей. Идеи Фока об использовании функциональных методов для формулировки квантовой теории полей получили дальнейшее развитие в работах Швингера и др.

При становлении квантовой электродинамики помимо проблемы описания систем с неопределенным числом частиц возникла не менее важная проблема — сделать теорию релятивистски инвариантной. Трудность заключается в том, что частицы имеют разные координаты, время же для них общее. Эту трудность устранили В. А. Фок, Дирак и Подольский, развившие многовременной формализм, в котором каждой частице приписывается свое время и, кроме того, электромагнитному полю приписывается отдельное время. Они обобщили уравнения Максвелла на случай, когда времена электронов не

совпадают со временем электромагнитного поля, и построили релятивистски инвариантную форму квантовой электродинамики. Позднее М. А. Марков показал, что метод Фока, Дирака и Подольского можно применить и в классической электродинамике. Многовременной формализм явился предтечей используемого в настоящее время (через 25 лет после выхода работы Фока, Дирака и Подольского) в квантовой электродинамике формализма Томонага и Швингера, в котором каждой точке пространства сопоставляется свое время.

После появления теории Дирака естественно возник вопрос, как должны формулироваться соотношения неопределенности в релятивистской теории. Исследованию этого вопроса посвящена работа Л. Д. Ландау и Пайерлса, в которой показано, что локализация фотона в области пространства, по порядку величины меньшей, чем длина волны, невозможна, т. е. понятие плотности вероятности локализации фотона в обычном пространстве не имеет смысла. Важное значение имеет также утверждение Л. Д. Ландау и Пайерлса о том, что благодаря существованию состояний с отрицательной энергией аналогичная ситуация должна иметь место и для электрона.

Как отмечалось выше, наличие расходимостей в различных квантово-электродинамических выражениях и отсутствие методов их устранения сковывали развитие квантовой электродинамики. Новым мощным толчком развития квантовой электродинамики явилась идея о перенормировке заряда и массы электрона.

Для анализа трудностей квантовой электродинамики, связанных с наличием расходимостей, и возможностей их устранения большое значение имеют исследования Н. Н. Боголюбова. В этих исследованиях в духе известных идей Гейзенберга теория формулируется только в терминах матрицы рассеяния, матрица же рассеяния строится не на основе

гамильтонова формализма, а исходя из общих физических принципов — релятивистской инвариантности, причинности и унитарности. При проведении этой программы выяснилось, что для описания математических величин, фигурирующих в квантовой электродинамике, обычного аппарата математического анализа недостаточно. Как показал Н. Н. Боголюбов, здесь приходится иметь дело с так называемыми обобщенными функциями. Н. Н. Боголюбов и О. С. Парасюк разработали правила обращения с такими функциями (в первую очередь, операцию умножения) и показали, что при надлежащем определении хронологически упорядоченных произведений операторов полей можно построить матрицу рассеяния, не содержащую расходимостей. Тем самым был выяснен математический смысл техники перенормировки, предписания которой воспринимались скорее как формальный рецепт, чем как процедура, которая может быть обоснована математически.



А. А. Логунов.

Дальнейший анализ процедуры перенормировки привел Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова к выводу о существовании мультипликативной группы конечных перенормировок — так называемой ренормализации одной группы. Используя дифференциальные уравнения этой группы и дополняя их некоторыми динамическими результатами теории возмущений, можно, как показали Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков, эффективно улучшать формулы теории возмущений (в частности, находить асимптотику электродинамических функций Грина при больших импульсах, а также инфракрасную асимптотику функции Грина электрона). А. А. Логунов вывел уравнения ренормализационной группы для спектральных (лемановских) плотностей функций Грина, а также фотона и электрона.

Основной задачей квантовой электродинамики является нахождение матрицы рассеяния, решение которой сводится к нахождению нескольких определенным образом усредненных произведений операторов полей — так называемых электродинамических функций Грина. Обычный метод их нахождения основан на применении теории возмущений, позволяющей определять только отдельные члены разложений функций Грина в ряды по степеням постоянной тонкой структуры. Между тем первостепенное значение имеет выяснение общих свойств функций Грина, которые, как оказывается, удовлетворяют не простым дифференциальным уравнениям, а уравнениям в вариационных производных. Общее решение этих уравнений (так называемых уравнений Швингера) в виде функциональных интегралов найдено Н. Н. Боголюбовым, И. М. Гельфандом и Р. А. Минлосом и Е. С. Фрадким.



Я. Б. Зельдович.

ведливыми в области очень больших импульсов, т. е. очень малых расстояний, так как при этом возникает такая сильная поляризация вакуума, что заряд электрона (если он точечный) оказывается полностью заэкранированным на любом конечном расстоянии. Это значит, что уравнения квантовой электродинамики формально не образуют замкнутой теории. Однако расстояния, о которых идет речь, очень малы. В действительности явления, которые не учитываются в исходных уравнениях, должны начать проявляться на гораздо больших расстояниях. Поэтому проблема незамкнутости формальной схемы квантовой электродинамики не существенна для самой квантовой электродинамики, но приобретает важное значение при построении по ее образцу теории сильного взаимодействия. Этот вопрос наиболее полно исследован в работе Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова по теории мультипликативной группы перенормировок.

После создания релятивистской механики электрона началось интенсивное изучение различных конкретных эффектов взаимодействия электронов и фотонов. Советскими теоретиками выполнен ряд важных исследований в этом направлении. В частности, И. Е. Тамм развил теорию эффекта Комптона, т. е. рассеяния фотона электроном, В. Б. Берестецкий показал, что внутренняя четность позитрона противоположна внутренней четности электрона.

Одним из первых приложений теории Дирака было объяснение тонкой структуры уровней водородоподобных атомов. Однако решение уравнений Дирака теряет смысл при слишком больших порядковых номерах ядра. И. Я. Померанчук и Я. А. Смородинский показали, что связанные состояния электрона существуют всегда, если учитываются размеры ядра.

Особый интерес представляет выяснение асимптотического поведения электродинамических функций Грина в области больших импульсов, которым соответствуют в обычном пространстве малые расстояния. Эта проблема решена Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосовым и И. М. Халатниковым. Ими получены интегральные уравнения для функций Грина при больших импульсах и установлена связь между истинными зарядом и массой электрона и «затравочными» значениями этих величин, входящими в исходные уравнения квантовой электродинамики.

Выяснив асимптотическое поведение функций Грина, можно поставить вопрос о границах применимости квантовой электродинамики. Этот вопрос исследовали Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчук. Они показали, что уравнения квантовой электродинамики не могут быть спра-

Большой интерес представляют явления с участием мюонов. А. Д. Сахаров и Я. Б. Зельдович предсказали мюонный катализ реакции слияния протона и дейтона. И. М. Шмушкевич исследовал вопрос об изменении поляризации мюона при его последовательных переходах в мюезоатомах.

Для утверждения квантовой механики в целом большое значение имело экспериментальное доказательство существования комбинационного рассеяния света. Такое рассеяние было открыто Л. И. Мандельштамом и Г. С. Ландсбергом в твердых телах и Ч. Раманом и К. Кришнаном в жидкостях. Теория этого фундаментального явления для кристаллов построена И. Е. Таммом.

Одно из самых замечательных квантово-электродинамических явлений в средах — каскадные ливни. Как было показано Баба, Гейтлером, Карлсоном и Оппенгеймером, механизм их образования заключается в том, что быстрый электрон, проходя через вещество, излучает фотоны, фотоны же превращаются в электронно-позитронные пары. Математическая теория каскадных ливней развита Л. Д. Ландау и Ю. Б. Румером. Ими найдены зависимость числа частиц в ливне от глубины проникновения, энергетическое и угловое распределения частиц и ширина ливня. И. Е. Тамм и С. З. Беленький обобщили эту теорию, при этом они учли роль комптон-эффекта и ионизационных потерь.

7

Теория сильного взаимодействия

Несмотря на успехи, достигнутые в квантовой электродинамике, объяснение огромного круга экспериментальных фактов и получение ряда общих теорем, относящихся к произвольным полям и частицам, — по ее образцу не удалось построить теории других фундаментальных взаимодействий, и прежде всего теорию сильного взаимодействия. Это связано с тем, что в теории, базирующейся на определенных гамильтонианах взаимодействия, так же как и в квантовой электродинамике, возникает необходимость в перенормировке, а следовательно, и во введении граничного импульса. Однако этот импульс по сравнению с квантовой электродинамикой оказывается малым (порядка Mc , где M — масса мезона или нуклона), так как константа связи для сильных взаимодействий значительно больше константы связи электромагнитных взаимодействий. Малая величина граничного импульса означает, что у теории сильных взаимодействий, базирующейся на представлении о квантованных полях и гамильтониане взаимодействия, фактически нет области применимости.

Таким образом, теорию сильного взаимодействия нельзя строить по образцу квантовой электродинамики. Возможно, это означает, что надо отказаться от таких понятий, как квантованное поле и гамильтониан взаимодействия. Можно предполагать, что теорию следует формулировать в терминах величин, допускающих непосредственную физическую

интерпретацию. Такими величинами являются элементы матрицы рассеяния. Поэтому вопрос сводится к построению матрицы рассеяния без использования понятий операторов поля.

При таком построении следует исходить из инвариантности и унитарности матрицы рассеяния и принципа причинности. О релятивистской инвариантности говорилось выше, остановимся подробнее на унитарности и принципе причинности.

Унитарность матрицы рассеяния является следствием вероятностной интерпретации квантовой теории. Математически она выражается в виде бесконечного числа соотношений, связывающих мнимые части элементов матрицы рассеяния, или, что то же самое, амплитуд рассеяния, с различными билинейными комбинациями этих амплитуд. Соотношения унитарности являются основным динамическим принципом теории.

Если бы была возможность восстановить по мнимым частям амплитуд рассеяния сами амплитуды, то система уравнений унитарности стала бы замкнутой, т. е. в принципе можно было бы определить амплитуды различных процессов рассеяния и взаимного превращения частиц. Такую возможность дают дисперсионные соотношения, связывающие вещественные и мнимые части амплитуд рассеяния и выражающие математически принцип причинности в новой формулировке физической теории.

Выше мы уже касались вопроса о формулировках принципа причинности в классической и квантовой (нерелятивистской) механике. Несмотря на коренное различие между классическим и квантово-механическим описанием, формулировка принципа причинности в классической и нерелятивистской квантовой механике в действительности одна и та же. В самом деле, и в классической, и в квантовой (нерелятивистской) механике мы пользуемся пространственно-временным описанием физических процессов, т. е. предполагаем, что принципиально можно проследить за протеканием любого процесса во времени.

Различие между классической и квантовой механикой заключается в различном содержании понятия динамического состояния систем. Но как в одной, так и в другой теории считается, что можно во всех деталях проследить за изменением состояния системы во времени. Поэтому если сказать, что состояние физической системы в некоторый момент времени определяется ее состоянием во все предыдущие моменты времени и не может зависеть от состояния в последующие моменты времени, то это будет формулировка принципа причинности, общая для классической и квантовой механики.

В теории сильного взаимодействия мы сталкиваемся с совершенно новой ситуацией. Здесь, как отмечалось выше, теория, базирующаяся на гамильтоновом формализме и представлении о квантованных операторах полей, не имеет области применимости. Поэтому мы должны отказаться от такого формализма, а это в каком-то смысле равносильно отказу от детального пространственно-временного описания физических процессов. Такой отказ, разумеется, не означает, что время и пространство теряют свою объективную реальность.

Возникает вопрос, как сформулировать в новой ситуации принцип причинности.

Один из подходов к решению этого вопроса заключается в выяснении тех наиболее общих черт, содержащихся в старых формулировках принципа причинности, которые могут быть настолько обобщены, что станут пригодными и в новой ситуации, возникшей в физике сильных взаимодействий. Прежде всего оказывается, что принцип причинности, сформулированный выше в общем виде для классической и нерелятивистской квантовой механики, математически приводит к определенным интегральным соотношениям между мнимыми и вещественными частями различных физических величин. Классическим образцом такого рода соотношений являются дисперсионные соотношения Крамерса — Кронига для диэлектрической проницаемости. Поэтому все соотношения подобного рода называются дисперсионными. Можно показать, что дисперсионные соотношения полностью эквивалентны приведенной выше формулировке принципа причинности в классической и квантовой механике.

Дисперсионные соотношения сами по себе не содержат ничего, что свидетельствовало бы о пространственно-временном описании. Поэтому естественно желание видеть в дисперсионных соотношениях обобщенную математическую формулировку принципа причинности, применимую не только при обычном пространственно-временном описании различных физических процессов, но и при отказе от такого описания. В случае сильных взаимодействий дисперсионные соотношения были сформулированы Гелл-Манном и Гольдбергером, а первое их строгое доказательство принадлежит Н. Н. Боголюбову.

Итак, возникает вопрос, можно ли, используя только унитарность матрицы рассеяния и свойства аналитичности ее элементов, построить теорию сильного взаимодействия, минуя гамильтонов формализм. Что касается квантовой электродинамики, то, постулируя свойства электрона и фотона, на основе принципов инвариантности, унитарности и аналитичности, и не используя при этом аппарат квантовой теории поля, можно построить теорию возмущений, эквивалентную квантово-электродинамической теории возмущений. Существенно, что при этом не появляются расходимости, устраняемые в квантовой электродинамике процедурой перенормировок.

Однако программа построения теории сильного взаимодействия на базе принципов унитарности и аналитичности матрицы рассеяния пока не осуществлена. Это связано прежде всего с огромными математическими трудностями, возникшими при ее реализации. Но, строго говоря, до сих пор не ясно, можно ли реализовать эту программу. Получены, однако, важные соотношения, связанные только с общими аналитическими свойствами амплитуд рассеяния. К ним относятся известная теорема Померанчука об асимптотическом равенстве сечений рассеяния частиц и античастиц (на одной и той же мишени) в области больших энергий, а также примыкающие к ней результаты по асимптотике амплитуд рассеяния (А. А. Логунов, Нгуен Ван Хьеу).



И. Е. Тамм.

Поведение аналитических функций определяется, как известно, их особенностями. Общий метод нахождения особенностей в интегралах, сопоставляемых сколь угодно сложным диаграммам Фейнмана, был развит Л. Д. Ландау.

Исследование аналитических свойств амплитуд рассеяния приводит также к важным заключениям о характеристике спектра сильно взаимодействующих частиц — адронов.

Можно показать, что полюсам амплитуд рассеяния соответствуют связанные состояния частиц, участвующих в процессе рассеяния, а точкам ветвления — открытие различных каналов реакций. Связанные состояния можно трактовать как некоторые частицы, а процесс рассеяния — как обмен этими частицами (или состояниями). Иными словами, силы, действующие между двумя частицами, можно считать обусловленными

обменом некоторой третьей частицей. Классическим примером такого обмена является кулоновское взаимодействие между двумя электронами, которое можно рассматривать как процесс испускания виртуального фотона одним из электронов и последующего поглощения этого фотона другим электроном.

Идея о том, что ядерные силы можно также трактовать как обменные силы, была впервые высказана И. Е. Таммом (β -силы). Эта идея послужила отправной точкой для Юкавы в его предсказании новой частицы — мезона (обнаруженной впоследствии в космических лучах) и развитии мезонной теории ядерных сил.

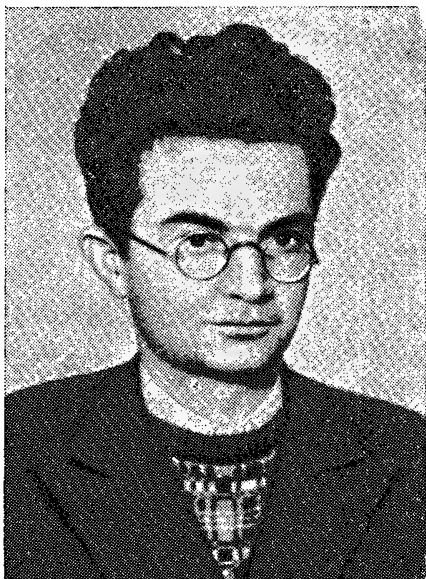
Виртуальные частицы, связанные с полюсами амплитуд рассеяния, называются реджионами. Масса и спин реджиона зависят от энергии и импульса сталкивающихся частиц и связаны между собой некоторой функциональной зависимостью. Функциональные зависимости (траектории Редже) играют важную роль, так как определяют не только вероятности различных процессов рассеяния, но и спектр элементарных частиц и резонансов. Как известно, спин частиц может быть только целым или полуцелым. Поэтому массы частиц — это те значения масс реджионов, которым соответствуют целые или полуцелые значения спина. Однако функциональные зависимости спина от массы реджионов при целых и полуцелых значениях спина не обязательно должны приводить к вещественным значениям массы. Эти значения могут быть и комплексными. Если значение массы реджиона, соответствующее целому или полуцелому значению его спина, вещественно, то оно представляет собой массу частиц. Если же значение массы комплексно, то мы имеем дело с резонансом. В этом случае вещественная часть комплексной массы определяет истинную массу резонанса, а мнимая часть —

время жизни резонанса. Таким образом, достигается единое описание как частиц, так и резонансов. Резонансы представляют собой недолго «живущие» частицы, неустойчивые по отношению к сильному взаимодействию. Иными словами, распад этих частиц обусловливается тем же взаимодействием, которое их порождает.

В развитие концепции полюсов Редже существенный вклад внесен В. Н. Грибовым и И. Я. Померанчуком.

Наряду с теорией функций комплексного переменного (одного и нескольких) фундаментальную роль в теории сильного взаимодействия играет теория групп, так как сильному взаимодействию свойственна некоторая внутренняя симметрия. Чтобы разъяснить это обстоятельство, напомним предварительно, что такие понятия, как энергия, импульс и момент импульса, тесно связаны с определенными свойствами симметрии, а именно симметрии пространства — времени. Так, закон сохранения импульса является следствием однородности пространства, закон сохранения момента — следствием изотропии пространства и закон сохранения энергии — следствием однородности времени. Но существуют еще внутренние симметрии взаимодействий, которые также связаны с некоторыми законами сохранения, а законы сохранения — с определенными квантовыми числами, характеризующими различные состояния материи, подверженной этим взаимодействиям. Например, в простейшем случае атома водорода происходит взаимодействие электрона с протоном, которое обладает шаровой симметрией. Иными словами, это взаимодействие, а следовательно и уравнение Шредингера для атома водорода, инвариантно по отношению к группе пространственных вращений. Отсюда и вытекает закон сохранения момента, а также возможность классификации состояний водорода с помощью квантовых чисел l и m , характеризующих представления группы вращений.

Количественной теории «элементарных» частиц в настоящее время нет (исключение составляют квантовая электродинамика — теория электромагнитного взаимодействия электронов и фотонов). Мы не знаем уравнений типа Шредингера или других уравнений, которые описывали бы адроны, т. е. сильно взаимодействующие частицы. Но огромный экспериментальный материал, особенно относящийся к существованию странных частиц и свойству зарядовой независимости ядерных сил, позволяет сделать важное заключение о свойствах симметрии сильного взаимодействия. А именно: подобно тому как для обычной ядерной материи, состоящей из протонов и нейтронов, характерна изотопическая инвариантность, т. е. симметрия по отношению к двум сущностям (протону и нейтрону), для субъядерной материи, к которой помимо протонов, нейтронов и других адронов, не обладающих странностью, относятся также странные частицы, должна быть характерна симметрия по отношению не к двум, а к трем сущностям. Выражаясь более точно, можно сказать, что эта симметрия (она называется унитарной) должна быть свойственна сильному взаимодействию. Математически существование унитарной симметрии означает инвариантность сильного взаимодействия относительно определенной группы, а именно группы вращений в трехмерном комплексном



И. Я. Померанчук.

пространстве (эта группа называется группой $SU(3)$).

В случае обычной ядерной материи и характерной для нее изотопической инвариантности точно известны те две сущности, по отношению к которым симметрично ядерное взаимодействие, — это нейтрон и протон. Три сущности, по отношению к которым симметрично сильное взаимодействие, фактически не известны, т. е. неизвестно, существуют ли в природе три частицы, которые можно было бы отождествить с этими сущностями. Но желание иметь эти частицы (и соответствующие им античастицы) очень естественно, поэтому и была выдвинута (Цвейг, Гелл-Манн) гипотеза кварков, как названы эти три сущности.

Согласно гипотезе кварков, все адроны построены из кварков и антикварков, так что кварки и антикварки выступают как истинно элементарные частицы. Один из кварков (λ) ответствен за странность, так что, «примешивая» его, мы делаем адрон странным, два же других кварка (n , p) не несут странности, и, комбинируя их (вместе с соответствующими антикварками), можно получить все нестранные адроны.

Все барионы должны строиться из трех кварков, а мезоны — из одного кварка и одного антикварка. Например, протон можно представить состоящим из двух кварков p и одного кварка n , а нейтрон — из двух кварков n и одного кварка p . При этом кварки должны обладать дробным электрическим зарядом: $\frac{2}{3}e$, $-\frac{1}{3}e$, $-\frac{1}{3}e$, где e — заряд электронов.

Составные модели элементарных частиц интенсивно исследовались советскими теоретиками — Н. Н. Боголюбовым, П. Н. Боголюбовым, Л. Б. Окунем, Б. В. Струминским и А. Н. Тавхелидзе, Е. М. Левиным и Л. Л. Франкфуртом, М. П. Рекало, В. А. Матвеевым и В. П. Шелестом.

Гипотеза об $SU(3)$ -симметрии и гипотеза кварков не одно и то же. Можно отвергать гипотезу кварков и признавать гипотезу $SU(3)$, причем, находясь на такой позиции и не связывая себя столь сильными предположениями, какие содержит гипотеза кварков, можно тем не менее сделать очень важные и подтверждающиеся на опыте выводы.

Прежде всего, предположение об $SU(3)$ -симметрии равноценно, как отмечалось выше, признанию существования некоторой группы. Но группе соответствуют определенные представления, которые характеризуются определенными квантовыми числами, аналогичными квантовым числам l и m . В случае группы $SU(3)$ таких квантовых чисел не два, а три. Эти числа можно интерпретировать как изотопический спин,

его проекцию и гиперзаряд — как величину, непосредственно описывающую странные частицы. Введение этих квантовых чисел позволяет классифицировать сильно взаимодействующие частицы, объединяя их в определенные совокупности — унитарные мультиплеты, нечто подобное периодической системе Менделеева для «элементарных» частиц (Гелл-Манн, Нееман). Это первое достижение учения об унитарной симметрии. Но главное его достижение заключается в выводе формул, базирующихся на $SU(3)$ -симметрии, для масс отдельных компонент унитарных мультиплетов, т. е. для отдельных барионов и мезонов.

Различие в массах отдельных компонент унитарного мультиплета обусловлено, очевидно, неоднородностью сильного взаимодействия. Существуют очень сильное и умеренно сильное взаимодействия. $SU(3)$ -симметрия свойственна только очень сильному взаимодействию, умеренно сильное взаимодействие не инвариантно по отношению к группе $SU(3)$. Если бы не существовало умеренно сильного взаимодействия, то массы всех адронов, относящихся к определенному унитарному мультиpletу, были бы одинаковы. Различие в массах вызывается именно умеренно сильным взаимодействием, снимающим вырождение, характерное для $SU(3)$ -симметрии.

Исходя из предположения об определенных свойствах симметрии умеренно сильного взаимодействия (по отношению к группе $SU(3)$), можно получить формулы для масс различных адронов (Гелл-Манн, Окубо), которые удивительно хорошо согласуются с экспериментом. Более того, исходя из этих формул была предсказана масса Ω^- -гиперона, что, несомненно, является триумфом учения об $SU(3)$ -симметрии.

Если бы кварки реально существовали, то они и представляли бы собой подлинно элементарные частицы. Если же их нет, то по существу следует говорить о неэлементарности «элементарных» частиц. В самом деле, почему мы, например, можем говорить, что атом водорода состоит из протона и электрона. Ведь протон может быть окружен электронно-позитронной шубой, и мы можем сказать, что в состав атома водорода входит протон, электрон и электронно-позитронная пара или несколько таких пар. В действительности, однако, эффект наличия электронно-позитронной шубы очень маловероятен, поэтому можно утверждать, что главный, основной состав атома водорода — это протон и электрон.

В случае адронов ситуация в корне изменяется, ибо эффект наличия шубы, на сей раз не электронно-позитронной, а пионной, не маловероятен, и мы не можем говорить о главном составе. Для адронов характерно, что каждый из них можно считать состоящим из других адронов. Это значит, что «элементарность» адронов не имеет, вообще говоря, смысла. Но если бы существовали кварки, то тогда мы могли бы говорить о подлинно элементарных кирпичах адронов — кварков. Пока же из огромного числа «элементарных» частиц элементарными мы должны считать только фотон и электрон.

$SU(3)$ -симметрия не учитывает спина частиц. Учет спина приводит к обобщению $SU(3)$ -симметрии, так называемой $SU(6)$ -симметрии. Основываясь на этой симметрии, Пайс показал, что отношение магнит-

ных моментов нейтрона и протона должно равняться $\frac{2}{3}$, что блестяще согласуется с экспериментом.

Советскими теоретиками выполнено большое количество исследований и получено много интересных результатов по теории внутренних симметрий элементарных частиц. Это работы Д. В. Волкова о коллинеарных группах $SU(3) \times SU(3)$ и $SU(6)_w$ и их применении к сильному и электромагнитному взаимодействиям, В. И. Огиевского и И. В. Полубаринова о сохраняющихся тензорных токах и релятивистской структуре группы $SU(6)$, Б. Л. Иоффе и И. Я. Кобзарева о слабых взаимодействиях и высших симметриях, Л. Д. Соловьева об электромагнитном взаимодействии и унитарной симметрии, А. И. Ахиезера и М. П. Рекало о правиле эквивалентности для различных электромагнитных величин для так называемых U -мультиплетов и о соотношениях между амплитудами фотообразования нейтральных векторных мезонов на нуклонах, А. М. Балдина о мезонном поле кварков и электромагнитном взаимодействии. Некоторые вопросы $SU(3)$ -симметрии освещены в оригинальных обзорах В. Б. Берестецкого и Я. А. Смородинского.

Несмотря на все успехи, достигнутые на базе предположений о существовании $SU(3)$ - и $SU(6)$ -симметрий, у нас еще нет последовательной теории ядерной и субъядерной материи. Количественной теорией в физике элементарных частиц остается пока только квантовая электродинамика.

Квантовая теория поля

Последние 15 лет в нашей стране интенсивно развивались научные исследования в области квантовой теории поля. Новейший прогресс в этой области был связан сначала с открытием так называемого метода перенормировок в теории возмущений, а затем с развитием аксиоматического метода и теории дисперсионных соотношений.

Ряд фундаментальных результатов получен в работах Н. Н. Боголюбова и его школы. Эти работы имеют непосредственное отношение к математике, так как в них нашли приложение новейшие методы функционального анализа, в частности методы теории обобщенных функций и теории функций многих комплексных переменных. Основные результаты в этой области подытожены в монографиях Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова («Введение в квантовую теорию поля», 1957 г.) и Н. Н. Боголюбова, Б. В. Медведева, М. К. Поливанова («Вопросы теории дисперсионных соотношений», 1958 г.). Обе монографии сыграли определяющую роль в развитии квантовой теории поля как в нашей стране, так и за рубежом.

Основным итогом исследований Н. Н. Боголюбова является построение новой теории матрицы рассеяния, базирующейся на отказе от гамильтонова формализма, и разрешение проблемы устранения рас-

ходимостей из матрицы рассеяния (проблема регуляризации S -матрицы), исследование проблемы логической замкнутости квантовой теории поля и создание основ так называемой теории дисперсионных соотношений.

Как в теории S -матрицы, так и в теории дисперсионных соотношений основную роль играет условие причинности, формулировка которого в терминах S -матрицы и тонкое применение его в теории дисперсионных соотношений являются большой заслугой Н. Н. Боголюбова. Создание теории дисперсионных соотношений потребовало точной формулировки тех основных положений квантовой теории поля, из которых они выводятся, а само доказательство — привлечения тонких теорем, находящихся на грани теории функций многих комплексных переменных и теории обобщенных функций. Открытие этих теорем принадлежит Н. Н. Боголюбову.

Явное выделение основных постулатов, на которых зиждется современная квантовая теория поля, привело к новому направлению исследований, так называемой аксиоматической теории поля, способствовавшему углубленному пониманию математической структуры современной квантовой теории поля.

Детальный анализ и характеристику всех аспектов, вытекающую из результатов, подытоженных в упомянутых монографиях, невозможно дать в небольшом очерке. Поэтому мы рассмотрим некоторые основные результаты.

1

Проблема устранения расходимостей в квантовой электродинамике

В конце 20-х годов XX в. были получены уравнения квантовой электродинамики, и сразу же обнаружились серьезные трудности, связанные с их решением. Наличие в этих уравнениях малого параметра (так называемой постоянной тонкой структуры), равного в безразмерных единицах квадрату электрического заряда $\alpha = e^2 = \frac{1}{137}$ и выступающего в этих уравнениях в качестве постоянной связи между величинами, соответствующими электрону и электромагнитному полю, наводило на мысль о возможности применения разложений теории возмущений. Однако вскоре было обнаружено, что последовательное применение разложений теории возмущений связано с серьезными трудностями. Дело в том, что если искать разложения искомых величин в виде степенных рядов по α

$$f = f_0 + \alpha f_1 + \alpha^2 f_2 + \dots +, \quad (1)$$

то только члены первого порядка по α дают разумные результаты, следующие же члены по α , соответствующие так называемым радиационным поправкам, оказываются бесконечными и их невозможно вычислить. Соот-

ответственно своей структуре эти члены представляются в виде интегралов по импульсам и энергиям промежуточных состояний, расходящихся при больших значениях энергий и импульсов, что соответствует так называемой ультрафиолетовой области. В связи с этим указанные расходимости стали называть ультрафиолетовыми. В силу того что первое приближение приводило к правильным результатам, можно было полагать, что основные уравнения теории правильны и главная трудность состоит в неумении вычислить радиационные поправки.

Прошло более 20 лет, прежде чем удалось сдвинуться в решении вопроса с мертвой точки. Ситуация выяснилась после того, как в 1947 г. с помощью радиоспектроскопических методов было точно измерено смещение уровней тонкой структуры энергетического спектра атома водорода (так называемый лембовский сдвиг), а американский физик Бете объяснил это смещение путем правильного вычисления радиационной поправки, основанного на выдвинутой им идее «перенормировки бесконечностей».

Метод перенормировки Бете состоит в том, что, используя зависимость расходящихся выражений типа (1) от массы m и заряда e , удается «сосредоточить» все ультрафиолетовые расходимости в m и e путем перестройки расходящейся суммы $\bar{f}$ в виде

$$\bar{f}(e, m) \sim f(\bar{e}, \bar{m}), \quad (2)$$

где $\bar{f}$ — конечная функция своих аргументов, а $\bar{e}$, $\bar{m}$ — новые масса и заряд, которые выражаются через исходные m и e с помощью разложений по степеням α

$$\bar{e} = e(1 + \alpha a_1 + \alpha^2 a_2 + \dots +), \quad \bar{m} = m(1 + \alpha b_1 + \alpha^2 b_2 + \dots +)$$

с расходящимися коэффициентами. Величины $\bar{e}$, $\bar{m}$ предлагалось отождествлять с наблюдаемыми значениями e_0 , m_0 — заряда и массы, а затравочные m и e , которые входят в исходные уравнения, определять из условий $\bar{m} = m_0$, $\bar{e} = e_0$.

Совершенно очевидно, что такая процедура имеет только формальный смысл ввиду наличия бесконечностей в коэффициентах. Физическое же толкование состояло в том, что масса и заряд электрона должны изменяться под влиянием взаимодействия с электромагнитным полем. Практически все сводилось к вычитанию из выражений для массы m и заряда e расходящихся выражений, и поэтому процедура была названа вычитательной.

После работы Бете появились крупные мемуары Фейнмана, Швингера, Дайсона, в которых идея вычитания бесконечностей и перенормировки была исследована с достаточной полнотой. В частности, было выяснено, что все ультрафиолетовые расходимости квантовой электродинамики связаны с перенормировкой e и m . Оказалось, что радиационные поправки, вычисленные таким способом, хорошо согласуются с экспериментом. Тем не менее вопрос нельзя было считать исчерпанным, так как указанные построения носили сугубо рецептурный характер и им не хватало внутренней стройности и математической обосно-

ванности. Дело в том, что, например, Дайсон, в статьях которого вопрос рассмотрен наиболее полно, работал в рамках гамильтонова формализма и его вычитательная процедура носила характер формальных предписаний, привнесенных в теорию со стороны и органически не связанных с нею.

В 50-х годах указанной проблемой заинтересовался Н. Н. Боголюбов. Ему удалось построить общую теорию матрицы рассеяния, основанную на отказе от гамильтонова формализма; в рамках этой теории получила удовлетворительное решение также проблема устранения расходимостей в квантовой теории поля. Остановимся вкратце на изложении основных идей теории матрицы рассеяния.

Как отмечалось выше, в теории Н. Н. Боголюбова основную роль играет S -матрица (матрица рассеяния), которая должна описывать взаимодействие полей, т. е. сопоставляющих этим полям частиц. Допустим, что мы изучаем процесс рассеяния, в начале и в конце которого имеются лишь далеко друг от друга отстоящие частицы; последние можно считать свободными. Рассмотрим ситуацию, когда взаимодействие адиабатически включается в бесконечно далеком прошлом и адиабатически выключается в бесконечно удаленном будущем. Тогда S -матрица определяется как оператор, переводящий амплитуду начального состояния $\Phi(-\infty)$ в амплитуду конечного состояния

$$\Phi(+\infty) = S\Phi(-\infty). \quad (3)$$

С точки зрения современного состояния теории S -матрица дает максимальную информацию о возможных процессах рассеяния и взаимного превращения частиц. Она определяется с помощью лагранжиана взаимодействия $\mathcal{L}(x)$ (x — четырехвектор-точка пространства Минковского).

Для математического описания «включения» и «выключения» взаимодействия вводится сначала функция $g(x)$, равная нулю в областях, где взаимодействие отсутствует, и единице в областях, где оно включено полностью. Заменяя лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}(x)$ выражением $g(x)\mathcal{L}(x)$, получаем ситуацию, когда взаимодействие включено с интенсивностью $g(x)$. Ясно, что если $g(x)$ отлично от нуля лишь в некоторой конечной пространственно-временной области, то поля в достаточно удаленном прошлом и будущем будут свободными. Зафиксировав начальную амплитуду состояния, можем рассматривать конечную амплитуду как функционал от $g(x)$: $\Phi(g) = S(g)\Phi$.

Случай, когда взаимодействие включено во всем пространстве, описывается матрицей $S(1)$. Чтобы теперь определить оператор $S(g)$, примем, что при бесконечно малом $g(x)$

$$S(g) = 1 + i \int \mathcal{L}(x) g(x) dx.$$

Определяя $S(g)$ в общем случае, Н. Н. Боголюбов исходит из трех основных требований: 1) релятивистской инвариантности; 2) сохранения нормы амплитуды состояния (унитарности); 3) причинности.

Первое требование означает следующее. Пусть $x \rightarrow Lx$ — преобразование из расширенной группы Лоренца, функция $g(x)$ удовлетворяет условию $g(x) \rightarrow Lg = g(Lx)$. Пусть при этом амплитуда состояний

Φ преобразуется с помощью оператора V . Условие лоренцинвариантности означает равенство

$$S(Lg) = V_L S(g) V_L^*.$$

Второе требование подчиняет оператор $S(g)$ условию унитарности

$$S^*(g) S(g) = 1.$$

Третье требование (условие причинности) в форме Боголюбова имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \left(\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} S^*(g) \right) = 0$$

при $x \leq y$, где δ — символ вариационной производной, а $x \leq y$ означает, что $x - y$ пространственно-подобно.

Задача определения оператора $S(g)$, удовлетворяющего всем сформулированным требованиям, очень сложная и поддается решению только в случае «малой константы связи», когда можно искать решение в виде ряда по степеням этой константы. Такой благоприятный случай имеет место в квантовой электродинамике, которая описывает взаимодействие электромагнитного поля с электронно-позитронным полем.

В работах Н. Н. Боголюбова показано, что если можно найти $S(g)$ в виде формального разложения

$$S(g) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) g(x_1) g(x_2) \dots g(x_n) \times \\ \times dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (4)$$

то для $S_n(x_1, x_2, x_n)$ получаются выражения

$$S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = i^n T(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2) \dots \mathcal{L}(x_n)). \quad (5)$$

Здесь символ T означает хронологическое произведение операторов, т. е. произведение, определяемое равенством

$$T(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2) \dots \mathcal{L}(x_n)) = \mathcal{L}(x_{j_1}) \mathcal{L}(x_{j_2}) \dots \mathcal{L}(x_{j_n}),$$

где последовательность $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}$ упорядочивается по убыванию временных компонент $x_{j_1}^0 > x_{j_2}^0 > \dots > x_{j_n}^0$.

Выражение (5) содержит трудности с расходимостями, о которых шла речь выше. Дело в том, что явный вид любого матричного элемента от этого выражения приводит к произведениям вида

$$\prod_l D_l^c(x_i - x_j), \quad (6)$$

где $D_l^c(x)$ — специальные функции, введенные в квантовую теорию поля Фейнманом. Они определяются формально формулой вида

$$D_l^c(x) = \mathcal{P}_l \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \int \frac{e^{ipx}}{p^2 - m^2 + ir} dp, \quad (7)$$

где $\mathcal{P}_l\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — некоторый полином, а интеграл берется по всему четырехмерному пространству импульсных переменных

$$px = p^0x^0 - p^1x^1 - p^2x^2 - p^3x^3, \quad dp = dp^0dp^1dp^2dp^3.$$

Функции $D_l^c(x)$ являются обобщенными. Теория таких функций, созданная С. Л. Соболевым и Шварцем, находит все более широкое применение. Для приложений важно знать, что обобщенные функции определяются заданием правил их интегрирования с достаточно гладкими функциями, т. е. они задаются как непрерывные функционалы на пространствах хороших функций.

Аппарат обобщенных функций особенно удобен в физических приложениях, так как эти функции всегда в определенном смысле бесконечно дифференцируемы и, что очень важно, для таких функций всегда существует преобразование Фурье. С другой стороны, большим недостатком такого аппарата являются трудности во введении нелинейных операций. Например, даже в случае элементарной обобщенной функции Дирака $\delta(x)$, определяемой известным «правилом интегрирования»

$$\int \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \quad (8)$$

неясно, как определить $\delta^2(x) = \delta(x)\delta(x)$. Но именно раскрытие выражения (5) приводит к необходимости определения произведения (6) обобщенных функций $D_l^c(x_i - x_j)$. Находя формальное преобразование Фурье для выражения (6), мы получаем расходящиеся интегралы в области больших импульсов, через которые выражаются различные радиационные поправки.

В квантовой теории поля, как отмечалось выше, разработан специальный вычислительный формализм, с помощью которого удалось устранить расходимость из каждого члена разложения S -матрицы. В частности, в работах Дайсона и Салама этому приему придана весьма общая форма, однако ее характер оставался чисто рецептурным, так как в рассуждениях нужно было оперировать бессмысленными выражениями.

Точка зрения теории обобщенных функций, с одной стороны, и отказ от гамильтонова формализма, с другой стороны, позволили удовлетворительно решить эту трудную и важную проблему устранения расходимостей, что было сделано Н. Н. Боголюбовым и его учениками.

Проблема устранения расходимостей в излагаемом подходе сводится к правильному определению произведения (6) сингулярных функций. Чтобы придать смысл таким произведениям, были введены в развитие идей Паули — Вилларса последовательности регулярных функций $D_M^c(x)$, которые в несобственном смысле стремятся к $D^c(x)$ при $M \rightarrow \infty$. Далее было замечено, что, несмотря на то что произведения $\prod_l D_{lM}^c(x_i - x_j)$ не имеют, вообще говоря, даже несобственного предела, все же этот предел существует в некотором более ограниченном смысле. А именно если определить более узкое понятие предела в пространстве

точек $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с исключением возможности совпадения любой пары аргументов, то такой предел будет существовать. Другими словами, этот предел будет существовать на пространстве основных функций, которые вместе со своими частными производными обращаются в нуль при совпадающих аргументах.

Таким образом, чтобы решить проблему определения произведения (6), необходимо расширить линейный непрерывный функционал, заданный на подпространстве, на пространство всех основных функций. Эту задачу необходимо решить так, чтобы матрица, определяемая формулами (4) и (5), удовлетворяла трем сформулированным выше требованиям: ковариантности, унитарности и причинности. Чтобы найти форму этого продолжения, достаточно заметить, что выражение

$$S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = i^n T(\mathcal{L}(x_1) \mathcal{L}(x_2) \dots \mathcal{L}(x_n))$$

не является самым общим выражением, удовлетворяющим трем сформулированным выше требованиям. Можно показать, что $S_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с учетом этих требований выражается через $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ однозначно с точностью до некоторого антиэрмитового оператора $i\Omega_n$, обладающего той же операторной структурой, что и выражение (5), но отличного от нуля только при полном совпадении аргументов. Такие операторы были названы квазилокальными. Таким образом, в определение $S_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ входит цепочка квазилокальных операторов $\Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_n$, которые, оказываясь, можно подобрать так, чтобы коэффициентные функции в операторном выражении S_n были непрерывными функционалами на всем пространстве гладких функций. Для конкретного произведения это позволяет явно определить операцию продолжения для функционала (6), которая может быть интерпретирована как вычитательная операция. Доказательство всех этих фактов представляет, разумеется, серьезные комбинаторные и аналитические трудности, которые были успешно преодолены (1957—1960 гг.) Н. Н. Боголюбовым и О. С. Парасюком. Дальнейшее развитие эти идеи получили в фундаментальной работе (1966 г.) швейцарского ученого К. Хеппа.

Итак, проблема устранения расходимостей из отдельных членов ряда теории возмущений была удовлетворительно решена. Вопрос же о сходимости ряда в целом остается в общем случае нерешенным.

2

Теория ренормализационной группы и перестройка рядов теории возмущений

Исследование проблемы перенормировок в квантовой электродинамике и мезонных теориях привело к открытию так называемой ренормализационной группы. Под этим термином подразумевают группу мультипликативных ренормировочных преобразований, которым подвергаются функции Грина и заряды любой ренормируемой теории поля. Функции Грина квантовой теории играют очень важную роль: они описывают движение элементарных частиц с учетом радиа-

ционных поправок (так называемые полные функции распространения — пропагаторы). Существование ренормализационной группы связано с неоднозначным характером вычитания бесконечностей. Как известно, эта неоднозначность сводится к двум постоянным — массе m и заряду e . Фиксируем m и изменяем e . Анализ показывает, что конечное изменение затравочного заряда e может быть скомпенсировано конечной мультипликативной ренормировкой функции Грина фотона D , электронной функции Грина G и вершиной части Γ . Это означает, что одновременное преобразование

$$e^2 \rightarrow Z^{-1}_3 e^2 = e'^2, \quad D \rightarrow Z_3 D = D', \quad G \rightarrow ZG = G', \quad \Gamma \rightarrow Z^{-1}\Gamma = \Gamma, \quad (9)$$

где Z_3, Z — константы, не приводит ни к каким изменениям в формулах для наблюдаемых величин.

Преобразования (9), обладающие, как легко видеть, групповым свойством, названы ренормализационной группой. Важность этого понятия состоит в том, что, как показано в упомянутой монографии Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова, с его помощью можно получить дополнительную информацию о поведении различных величин квантовой теории поля. Например, разложения обычной теории возмущений для матрицы и функций Грина не инвариантны относительно ренормализационной группы, и перестройка этих разложений к инвариантному виду дает возможность улучшить их аппроксимационные свойства. В так называемой ультрафиолетовой области $k^2 \gg m^2$ эффективным параметром разложения оказывается не $e^2 = \alpha$ (малая величина), а $e^2 \ln \left| \frac{k^2}{m^2} \right|$, величина, которая может оказаться большой (по сравнению с единицей). Аналогичная ситуация имеет место в так называемой инфракрасной области $k^2 \sim m^2$.

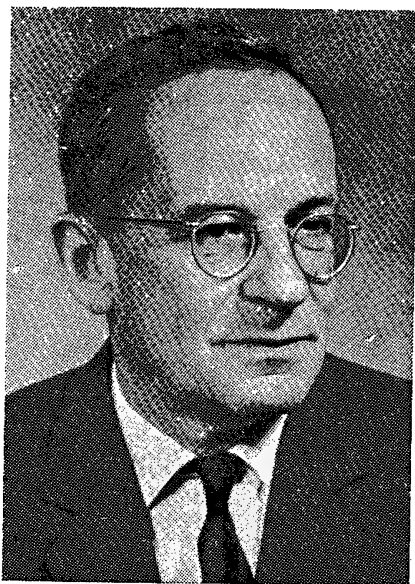
Если в выражения для функций Грина (в импульсном представлении) фотона и электрона ввести скалярные функции $d, s = s_1, s_2$,

$$\left. \begin{aligned} D_{mn}(k) &= -\frac{1}{k^2} \left(g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2} \right) d(k^2), \\ G_{\alpha\beta}(k) &= \frac{s_1(k^2) \hat{k}_{\alpha\beta} + s_2(k^2) m I_{\alpha\beta}}{m^2 - k^2}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

то, исходя из ренормализационной группы, можно получить для функций s и d следующие функциональные уравнения (выведены Н. Н. Боголюбовым и Д. В. Ширковым):

$$\left. \begin{aligned} e^2 d(x, y, e^2) &= e^2 d(t, y, e^2) d\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, e^2 d(t, y, e^2)\right), \\ \frac{s(x, y, e^2)}{s(t, y, e^2)} &= \frac{s\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, e^2 d(t, y, e^2)\right)}{s\left(1, \frac{y}{t}, e^2 d(t, y, e^2)\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Уравнения (11) дали возможность получить асимптотические формулы для функций Грина в ультрафиолетовой и инфракрасной областях,



В. И. Векслер.

а также выяснить пределы применимости этих формул. Поставив требование, чтобы решения уравнений (11) переходили в формулы обычной теории возмущений при малых e^2 , Боголюбов и Ширков получили следующую асимптотику для функции d в области больших k^2 :

$$e^2 d(x, e^2) = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln x + \frac{3e^2}{4\pi} \ln \left(1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln x\right)},$$

$$x = \frac{k^2}{m^2}. \quad (12)$$

Ограничиваясь главным членом, получаем выражение типа

$$\frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln x} \quad (13)$$

с логарифмическим полюсом, которое приводит к верхней импульсной границе $\ln x < \frac{3\pi}{e^2}$ применимости разложений теории возмущений.

Л. Д. Ландау и И. Я. Померанчук сделали отсюда поспешный вывод о несостоятельности квантовой электродинамики. Однако из рассуждений Боголюбова и Ширкова вытекает, что наличие логарифмического полюса нельзя доказать в рамках улучшения формул теории возмущений с привлечением лишь конечного числа членов.

Как видно из изложенного, метод ренормализационной группы позволил подойти к исследованию чрезвычайно трудного вопроса о состоятельности и внутренней замкнутости квантовой электродинамики и ренормируемых теорий вообще. На основе проведенных исследований был сделан вывод, что метод теории возмущений (метод слабой связи) в современной квантовой электродинамике является логически незамкнутым. Вопрос о том, является ли незамкнутой сама квантовая электродинамика, остается открытым.

3

Математические проблемы, возникшие в теории дисперсионных соотношений

Как видно из предыдущего параграфа, основой успеха в определении матрицы рассеяния была возможность применения разложений теории возмущений, т. е. разложений по степеням малого параметра. Такая благоприятная ситуация имеет место в кван-

товой электродинамике и теории слабых взаимодействий. В области же сильных взаимодействий параметр, характеризующий интенсивность взаимодействий, намного больше единицы. Например, в нуклон-мезонных взаимодействиях он равен примерно 15. В этих случаях ряд теории возмущений не может нести необходимой количественной информации. Вообще метод теории возмущений имеет некоторые недостатки. Как отмечалось выше, вопрос о сходимости рядов теории возмущений остается открытым, кроме того, высказано много соображений в пользу только асимптотической сходимости этих рядов. Поэтому некоторые важные свойства разлагаемых величин не поддаются исследованию, особенно в области больших энергий и импульсов. Эти трудности привели к возникновению нового направления исследований¹, основанного на следующих соображениях. Если математические трудности не позволяют подойти к полному решению задачи, т. е. построить матрицу рассеяния, то, может быть, можно, исходя из общих физических соображений, установить хотя бы некоторые свойства S -матрицы. Напомним, что старый подход основан на трех основных допущениях: гамильтоновом формализме, применении теории возмущений в концепции адиабатического включения и выключения взаимодействия.

Достоинством гамильтонова формализма является автоматический учет требования причинности. Однако анализ Хаага показал, что с этим формализмом связан ряд трудностей, вызванных неоднозначностью представимости с помощью эрмитовых операторов канонических коммутационных соотношений. Что касается концепции адиабатичности, то следует отметить, что за кажущейся простотой соотношений между действительными и свободными полями скрывается необходимость различать фиктивные и реальные свободные частицы, что ведет к перенормировочной идеологии.

Новый подход, предложенный Н. Н. Боголюбовым, был фактически продолжением программы Гейзенберга, который в своей концепции S -матрицы полностью отбрасывал гамильтоновский формализм. Боголюбову удалось точно выделить те основные положения квантовой теории поля, из которых следуют так называемые дисперсионные соотношения. Среди этих положений наиболее важную роль играют условия причинности и спектральности. Мы не имеем возможности детально проанализировать все положения этой глубокой теории и ограничимся лишь кратким очерком ее математических аспектов.

Дисперсионные соотношения представляют собой точные интегральные соотношения между действительной и мнимой частями элементов матрицы рассеяния. Они получаются путем применения теории Коши, для чего необходимо иметь информацию о свойствах аналитичности матричных элементов в комплексной области. Но матричные элементы являются, вообще говоря, обобщенными функциями, и поэтому возникает трудная проблема аналитического продолжения обобщенных функций многих переменных.

Приведем простой пример. Допустим, что заданы две обобщенные

¹ См. названную выше монографию Н. Н. Боголюбова, Б. В. Медведева и М. К. Поливанова.

функции $f_r(t)$ и $f_a(t)$ одного переменного t , причем $f_r(t) = 0$ при $t < 0$ (запаздывающая функция), $f_a(t) = 0$ при $t > 0$ (опережающая функция). Ясно, что их преобразования Фурье $\tilde{f}_r(E)$ и $\tilde{f}_a(E)$ допускают аналитическое продолжение соответственно в верхнюю и нижнюю полуплоскости. Если теперь принять, что $\tilde{f}_r(E) = \tilde{f}_a(E)$ при $|E| < \mu$ (простейший вариант условия спектральности), то ясно, что будет существовать единая аналитическая функция, голоморфная во всей плоскости комплексного переменного, за исключением линий разреза

$$-\alpha < \operatorname{Re} z \leq \mu, \quad \mu \leq \operatorname{Re} z < \infty, \quad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(E + i\Gamma) = 0.$$

Понимая с самого начала, что $f_j(t)$ — это обобщенные функции медленного роста, легко доказываем полиномиальную ограниченность $\tilde{f}(z)$ в области $|\operatorname{Im} z| \geq \delta > 0$ и поэтому легко получаем соотношения типа

$$\operatorname{Re} \tilde{f}(E) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \tilde{f}(E')}{E' - E} dE',$$

названные в физике дисперсионными.

В конкретных случаях квантовой теории поля ситуация гораздо более сложная. Например, если рассмотреть две функции $F_r(x)$ и $F_a(x)$, зависящие от четырехвектора $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ и обращающиеся в нуль соответственно вне опережающего ($x \leq 0$) и запаздывающего ($x \geq 0$) световых конусов, то возникает следующая трудность. Для того чтобы можно было применить приведенную выше схему, нужно установить свойства аналитичности в комплексной плоскости энергетической переменной E функций

$$\tilde{F}_j(E, e) = \int e^{i(Ex^0 - \sqrt{E^2 - \mu^2} ex)} F_j(x) dx \\ (j = r, a; \quad |e| = 1; \quad dx = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3).$$

Однако, как видно из приведенных формул, эти функции могут быть аналитически продолжены в соответствующие полуплоскости только при условии $\mu^2 < 0$. Сами же выражения определены только на двух отрезках действительной оси $-\infty < E < -\mu$, $\mu < E < \infty$. В связи с этим аналитическое продолжение можно осуществить только путем изощренных приемов, открытых Н. Н. Боголюбовым в 1956 г. Здесь существенную роль играет спектральное условие, согласно которому функции $F_j(p)$ совпадают в некоторой области импульсных переменных. Применив этот подход, Н. Н. Боголюбов открыл новые теоремы, стоящие на грани теории функций многих комплексных переменных и теории обобщенных функций. Впоследствии они были обобщены им совместно с В. С. Владимировым; английские физики назвали их «теоремами об острии клина» («Edge of the wedge theorem»).

В качестве примера приведем наиболее простую теорему этого типа. Рассмотрим обобщенные функции $F_r(x)$ и $F_a(x)$ четырех векторов x , из которых одна запаздывающая, а другая опережающая. Пусть Фурье-образ $\tilde{f}(p)$ их разности $f(x) = F_r(x) - F_a(x)$ обращается в нуль

$\tilde{f}(p) = 0$) для $|p_0| < m$. Тогда существует аналитическая функция $\tilde{f}(k)$ комплексного переменного четырехвектора k , регулярная в области

$$|\operatorname{Im} k| < |\operatorname{Im} \sqrt{k_0^2 - m^2}|$$

и такая, что для вещественных $k = p$ из этой области

$$\tilde{F}(p) = \tilde{F}_r(p) = \tilde{F}_a(p).$$

Оказалось, что теоремы такого типа тесно связаны с проблемой отыскания так называемых оболочек голоморфности — одной из центральных проблем теории функций многих комплексных переменных². Понятие оболочки голоморфности диктуется специфическими свойствами, отличающими функции одного комплексного переменного от теории функций многих переменных, которые были установлены еще в начале XX в., когда никто даже не подозревал, что эти свойства будут играть столь важную роль в аналитических методах квантовой теории поля. Сущность этих свойств состоит в следующем. Как хорошо известно из курса теории функций одного комплексного переменного, какая бы ни была область в комплексной плоскости, всегда найдется такая аналитическая функция, для которой заданная область является областью натуральной (т. е. максимальной) аналитичности. В теории функций многих комплексных переменных ситуация совершенно иная: не всякая произвольно взятая область может быть областью натуральной аналитичности. Поэтому для произвольно взятой области G всегда существует некоторая, вообще говоря, более широкая область $H_G \supset G$, которая уже является областью натуральной аналитичности и носит название оболочки голоморфности для области G . Легко видеть, что в теории Н. Н. Боголюбова, сформулированной выше, область

$$|\operatorname{Im} k| < |\operatorname{Im} \sqrt{k_0^2 - m^2}|$$

можно рассматривать как оболочку голоморфности областей, состоящих из комплексной окрестности области $|p_0| < m$ и двух областей, в которых аналитически продолжимы преобразования Фурье $F_r(p)$, $F_a(p)$ запаздывающих и опережающих функций.

Как видно из предыдущего рассмотрения, для вывода дисперсионных соотношений необходимо было, с одной стороны, точно выделить те общие основные положения квантовой теории поля, из которых следуют необходимые аналитические свойства матричных элементов, а с другой — установить ряд тонких теорем в теории аналитического продолжения обобщенных функций. В доказательстве самих дисперсионных соотношений Боголюбов, кроме того, ввел чрезвычайно оригинальный прием. Он состоит в следующем. В дисперсионные соотношения вводится вспомогательный параметр, не имеющий непосредственного физического содержания (мнимая масса), а затем, после установления

² См. В. С. В л а д и м и р о в. Методы теории функций многих комплексных переменных. «Наука», М., 1964.

аналитических свойств соответствующих функций, осуществляется аналитическое продолжение по этому параметру до его физического значения. Первоначальные построения Боголюбова были, таким образом, весьма сложными, хотя общая идея была весьма прозрачной. В настоящее время она занимает прочное место в арсенале аналитических методов квантовой теории поля.

Исследования Н. Н. Боголюбова явились началом целой серии работ, выполненных в нашей стране и за рубежом. Математическая сторона вопроса получила наиболее полное развитие в работах В. С. Владимирова (см. упомянутую выше монографию). Первоначальные результаты Боголюбова изложены в двух его монографиях (см. выше).

С математической точки зрения исследования Н. Н. Боголюбова и его учеников открыли новую эру в математической физике, связанную с широким применением аппарата теории функций многих комплексных переменных. Это направление получило весьма широкое развитие, в частности в работах зарубежных физиков-теоретиков Челена, Вайтмана, Дайсона, Мандельстама.

С физической точки зрения значение этих исследований состоит в том, что они положили начало так называемой аксиоматической квантовой теории поля, в которой, исходя из общих физических постулатов, путем строгих рассуждений стремятся получить информацию об аналитических свойствах амплитуд и т. д. Это направление развивали А. А. Логунов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов. В последнее время интересные результаты в аксиоматической квантовой теории поля получил В. П. Гачок. Особенно важными оказались приложения к исследованию различных конкретных процессов и разработанные на этой основе методы приближенного построения амплитуд.

4

Аналитические проблемы теории возмущений

При исследовании аналитических свойств амплитуды рассеяния (или величин, являющихся линейными комбинациями амплитуды) оказалось, что доказать дисперсионные соотношения для некоторых процессов, например нуклон-нуклонного рассеяния, по-видимому, невозможно без привлечения новых аксиом. Это положение и натолкнуло на идею исследования аналитических свойств членов ряда теории возмущений. Несмотря на то что ничего не было известно о сумме такого ряда, так как он при физических значениях константы связи ($g^2 > 1$) расходится, члены этого ряда все же представляли интерес, поскольку удовлетворяли всем аксиомам, принятым в настоящее время в теории поля (лоренц-инвариантности, причинности и спектральности). Кроме того, каждый член ряда теории возмущений удовлетворяет условию унитарности и обладает некоторыми свойствами симметрии. Поэтому естественно было ожидать, что при изучении аналитических свойств членов этого ряда получится более обширная информация, чем при аксиоматиче-

ском подходе. Такой подход к ряду теории возмущений послужил толчком для построения двойного спектрального представления Мандельштама. Именно это представление было «подсмотрено» в теории возмущений на простейших диаграммах. Справедливость его для любой диаграммы Фейнмана, описывающей процесс рассеяния, до сих пор не доказана. Это обстоятельство и побудило ученых интенсивно исследовать аналитические свойства вкладов произвольных диаграмм в амплитуду рассеяния.

В настоящее время исследование аналитических свойств всех диаграмм рассматриваемого процесса с целью получения дисперсионных соотношений по одной переменной успешно завершено. Важный вклад в решение этой проблемы внесла группа дубненских ученых (А. А. Логунов, А. Н. Тавхелидзе, И. Т. Тодоров, Н. А. Черников и др.), развивших предложенный Намбу и Симанзиком интересный и цельный метод мажорирования диаграмм. Исходным пунктом в их исследованиях является запись вклада произвольной диаграммы Фейнмана в амплитуду рассеяния в виде параметрического интеграла³.

Метод мажорирования позволяет сравнивать области аналитичности различных диаграмм при евклидовых внешних импульсах и сводит изучение всех сильно связанных диаграмм данного процесса к изучению нескольких диаграмм (иногда даже одной). При этом квадраты внешних импульсов рассматриваются как независимые переменные, не фиксированные на поверхности масс. Именно это обстоятельство позволяет доказать аналитичность амплитуды рассеяния в некоторой достаточно широкой области изменения инвариантных переменных. Полученная область аналитичности оказывается достаточной для установления справедливости однократных дисперсионных соотношений для упругого рассеяния π -мезонов на нуклонах как по энергии, так и по переданному импульсу. Из этих результатов следует, что парциальные волны обладают такими же аналитическими свойствами по энергии, как и те, что вытекают из представления Мандельштама. К сожалению, полученная область аналитичности недостаточна для установления справедливости самого представления Мандельштама.

То обстоятельство, что квадраты внешних импульсов не фиксируются на массовой поверхности, вместе с требованием о сохранении барионных линий и других правил отбора приводит к необходимости нетривиального топологического рассмотрения графов. Применение



А. Н. Тавхелидзе

³ См. А. А. Логунов, Лю И-чень, И. Т. Тодоров, Н. А. Черников. Дисперсионные соотношения и аналитические свойства парциальных амплитуд в теории возмущений. — Укр. мат. журн., 1963, т. 15, № 3, стр. 250—277.

топологических методов при сравнении областей аналитичности двух диаграмм в процессе мажорирования позволяет учесть любые типы сильных взаимодействий (внутренние линии диаграмм могут соответствовать как π -мезонам и нуклонам, так и странным частицам).

Доказательство аналитичности амплитуды в некоторой комплексной области $\bar{G}$ изменения инвариантных переменных, основанное на результатах мажорирования диаграмм, проводится в три этапа. Пользуясь результатами мажорирования, непосредственно можно определить область аналитичности в пространстве евклидовых внешних импульсов. Разлагая затем вещественные импульсы на евклидову и антиевклидову части, можно найти вещественную область аналитичности $G > G_E$. Наконец, из линейности квадратичной формы $Q(\alpha, \beta)$ относительно скалярных произведений импульсов выводится аналитичность амплитуды в определенной комплексной окрестности $\bar{G}$ области G . Полученная таким путем область G оказывается во всех случаях областью голоморфности и, следовательно, не допускает дальнейшего расширения с помощью только методов теории функций многих комплексных переменных без привлечения дополнительной информации о рассматриваемом классе интегралов Фейнмана. Дополнительная информация заключена в уравнениях Ландау (9) для определения положения вещественных особых точек произвольной диаграммы. Однако до сих пор не выяснено, какие комплексные точки, удовлетворяющие уравнениям Ландау, действительно являются особыми точками на физическом листе римановой поверхности амплитуды рассеяния.

Аппарат, который используется для мажорирования диаграмм и с помощью которого записывается вклад в амплитуду рассеяния, связан с матрицей инцидентности. Его можно использовать также при описании собственных особенностей данной диаграммы. Под собственными особенностями понимают особенности данного графа, когда ни один из параметров Фейнмана не равен нулю. С помощью указанного аппарата найдены параметрические уравнения поверхности собственных особенностей диаграмм (9). Эти уравнения позволяют выразить все импульсы на особой поверхности через минимальное число независимых векторов.

Важные результаты в области исследования аналитических свойств вкладов диаграмм Фейнмана получил (1964 г.) Д. Я. Петрина.

Некоторые математические методы в статистической физике

Послевоенное двадцатилетие для статистической физики было периодом интенсивного прогресса. Внимание исследователей в эти годы было привлечено к явлениям в конденсированных телах. Для того чтобы построить последовательную микроскопическую теорию этих явлений, необходимо научиться решать задачу о поведении большого числа взаимодействующих частиц. Огромные математические

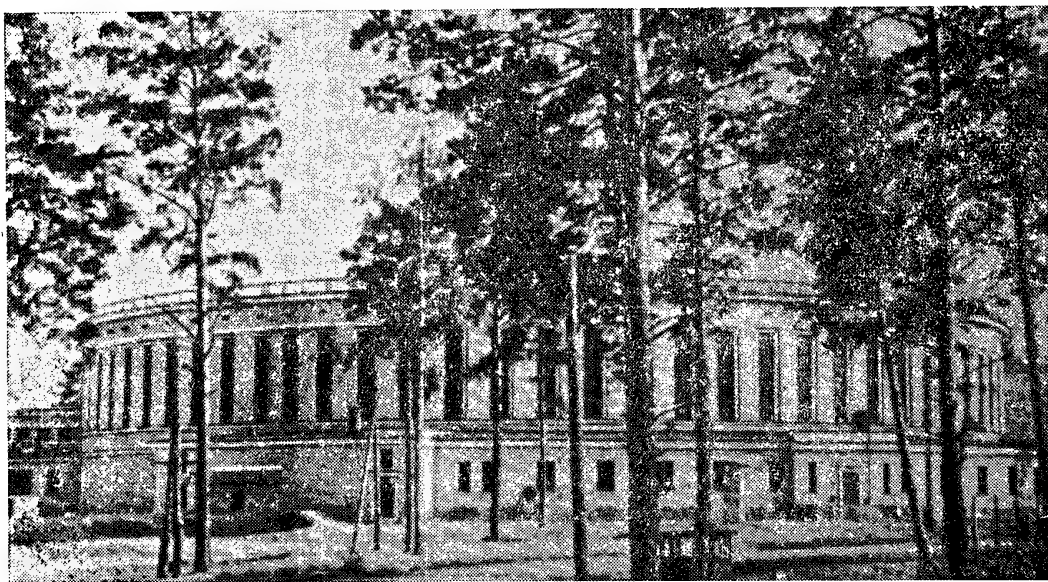
трудности, возникающие здесь, очевидны. Даже если предположить, что взаимодействие слабое, задача оказывается часто все еще весьма нетривиальной из-за неприменимости аппарата обычной теории возмущений, что физически связано с возможностью коренного изменения свойств системы при наличии сколь угодно слабого взаимодействия. Новейший прогресс в статистической физике связан с разработкой ряда новых эффективных методов, позволяющих преодолеть во многих случаях эти трудности. Важнейший вклад в создание новых методов и решение с их помощью ряда крупных проблем статистической физики принадлежит Н. Н. Боголюбову, чьи классические исследования по проблемам динамической теории в статистической физике, теории сверхтекучести, теории сверхпроводимости открыли широкие перспективы для дальнейшего развития этих областей физики.

В 1946 г. была опубликована монография Н. Н. Боголюбова «Проблемы динамической теории в статистической физике». Главной целью этого исследования была разработка нового метода, позволяющего получать кинетические уравнения на основе классической динамики системы частиц. Однако в монографии развиты также оригинальные методы и получены важные результаты, относящиеся к теории равновесных состояний.

Боголюбов вводит в рассмотрение цепочку функций распределения $F_s(q_1, \dots, q_s)$ для комплексов из s частиц, выделенных в системе частиц. Эти функции, обычно называемые корреляционными, имеют простой вероятностный смысл. А именно: выражение

$$\frac{1}{V^s} F_s(q_1, \dots, q_s) dq_1 \dots dq_s,$$

где V — объем всей системы, есть вероятность того, что частицы рассматриваемого комплекса находятся в бесконечно малых объемах



Объединенный институт ядерных исследований.

$dq_1 \dots dq_s$ вблизи точек $q_1 \dots q_s$ при произвольных положениях остальных частиц системы. Задание всей совокупности корреляционных функций эквивалентно заданию полной информации о статистических свойствах системы. Однако для практических целей достаточно знать только несколько первых функций, из которых наиболее важна вторая, поскольку через нее можно выразить уравнение состояния, среднюю энергию, флуктуацию плотности и некоторые другие термодинамические характеристики системы.

Для отыскания корреляционных функций Н. Н. Боголюбов получил систему зацепляющихся интегро-дифференциальных уравнений. Хотя в общем случае решить эту систему не легче, чем вычислить статистический интеграл, ее построение открывает путь к различного рода аппроксимациям, эффективность которых зависит от наличия в задаче того или иного малого параметра. В конкретных случаях, когда такой параметр имеется, для решения системы могут быть применены различные варианты теории возмущений. В монографии рассмотрен таким способом пример классического неидеального разреженного газа. С помощью разложения по степеням плотности чрезвычайно просто и вместе с тем вполне строго получены результаты, которые Урселл и Майер получили с помощью громоздкой и сложной комбинаторной техники.

Несколько иной вариант разложения по малому параметру применен Боголюбовым в задаче о системе частиц, взаимодействующих по закону Кулона, какой, в частности, является задача о растворе сильных электролитов. Здесь малым параметром является концентрация и в первом порядке метод приводит к известным формулам теории Дебая. Дальнейшее продвижение в этой задаче было осуществлено на основе метода Боголюбова С. В. Тябликовым и В. В. Толмачевым (1958 г.). Ими разработана последовательная классическая теория сильных электролитов, включающая как учет конечности радиусов ионов, так и поправки Бьеррума, возникающие из-за ассоциации ионов с разными знаками заряда.

Метод корреляционных функций может быть применен также к микроскопической теории жидкостей. Существенным препятствием, возникающим здесь при попытке построения последовательной статистической теории, является отсутствие в задаче малого параметра. Однако для получения качественных выводов можно использовать суперпозиционное приближение Кирквуда, состоящее в аппроксимации тернарной корреляционной функции произведением бинарных функций. Н. Н. Боголюбов получил нелинейное интегральное уравнение для определения бинарной функции. Дальнейшее развитие его идеи получили в работах И. З. Фишера, в частности в его монографии «Статистическая теория жидкостей» (1961 г.), и других физиков, что позволило выяснить качественную картину жидкого состояния. Заметим, что независимо от каких-либо аппроксимаций типа суперпозиционного приближения метод корреляционных функций позволяет, как отмечалось выше, вывести уравнение состояния, выразив его через бинарную корреляционную функцию. Последняя может быть найдена для жидкости непосред-

ственно из эксперимента, например рентгенографическими методами, и может считаться известной.

В заключение отметим, что метод корреляционных функций развивали также Кирквуд, Борн, Грин и Ивон, и в настоящее время он известен в литературе под названием метода Боголюбова — Борна — Грина — Ивона.

Рассмотрим теперь проблему получения кинетических уравнений, которой главным образом и посвящена указанная выше монография Н. Н. Боголюбова.

Как известно, в обычной схеме Больцмана кинетическое уравнение получают как уравнение баланса частиц в элементе фазового объема. При этом изменение числа частиц в фазовом объеме аддитивно складывается из конвекционного члена, возникающего за счет движения невзаимодействующих частиц во внешнем поле, и члена бинарных соударений. Для расчета члена соударений вводится гипотеза молекулярного хаоса, на основании которой полностью пренебрегают корреляциями между динамическими состояниями молекул. Н. Н. Боголюбов подверг критике эту схему как внутренне непоследовательную, поскольку, с одной стороны, движение молекул трактуется как некоторый случайный процесс, а с другой — для расчета эффективного сечения случайного процесса привлекаются уравнения классической механики. Он поставил поэтому проблему последовательного получения кинетических уравнений непосредственно из уравнения Лиувилля, являющегося прямым следствием уравнений динамики. С этой целью он прежде всего обобщил на случай неравновесных распределений метод корреляционных функций и построил цепочку уравнений для них на основе уравнения Лиувилля.

Применение разложений теории возмущений по степеням плотности для изучения релаксационных свойств функции распределения одной частицы связано здесь с характерными трудностями, вызванными появлением в таких разложениях вековых членов. Это обстоятельство ограничивает пригодность формул обычной теории возмущений значениями времени

$$t \ll \frac{v}{r_0^3} \cdot \frac{r_0}{u_{\text{ср}}},$$

где $\frac{1}{v}$ — плотность, r_0 — эффективный радиус молекул, $u_{\text{ср}}$ — средняя скорость молекулярного движения. Однако более детальный анализ, проведенный Н. Н. Боголюбовым, показывает, что в задаче возникает еще одно характерное значение времени, а именно время взаимодействия $\tau \sim \frac{r_0}{u_{\text{ср}}}$, причем $\tau \ll t$. За время порядка τ в системе успевает произойти гораздо более быстрый процесс, чем релаксационный, который Боголюбов называет процессом синхронизации корреляционных функций. Этот процесс приводит к тому, что высшие корреляционные функции в смысле их временной зависимости становятся функционалами низшей функции, а последняя удовлетворяет замкнутому уравнению

типа кинетического

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = A(x|F_1), \quad x = (p, q).$$

Подчеркиваем, что в этом анализе, а также в дальнейшем исследовании существенную роль играет явное использование принципа ослабления корреляции. Этот постулат, заменяющий в схеме Боголюбова гипотезу молекулярного хаоса, носит статистический характер и обеспечивает необратимость релаксационного процесса. С формальной точки зрения принцип ослабления корреляции выступает как граничное условие, налагаемое при отыскании решений системы уравнений.

Далее в монографии строится модифицированная теория возмущений, в которой синхронизация уже учтена. Решение системы уравнений для цепочки корреляционных функций имеет вид

$$\begin{aligned} F_s(x_1, \dots, x_s, t) &= F_s(x_1, \dots, x_s|F_1) = \\ &= F_s^0(x_1, \dots, x_s|F_1) + \frac{1}{v} F_s^1(x_1, \dots, x_s|F_1) + \dots, \\ \frac{\partial F_1}{\partial t} &= A_0(x_1|F_1) + \frac{1}{v} A_1(x_1|F_1) + \frac{1}{v^2} A_2(x_1|F_1) + \dots \end{aligned}$$

На этом пути и получается кинетическое уравнение первого порядка по плотности. Оказывается, что построенное таким образом уравнение отличается от обычного больцмановского уравнения наличием добавочного члена, учитывающего интерференцию конвекции и соударений. Физический смысл этой поправки выясняется при переходе к уравнениям гидродинамики. Если обычное уравнение Больцмана приводит к уравнениям гидродинамики, соответствующим среде с уравнением состояния идеального газа, то полученное Боголюбовым уточненное кинетическое уравнение приводит к поправкам коэффициентов вязкости и теплопроводности в уравнении состояния.

Таким образом, фундаментальным результатом исследования Боголюбова является не только обоснование уравнения Больцмана на основе динамической теории, но и его существенное уточнение. Метод Боголюбова позволяет также в принципе учесть поправки, возникающие от членов высшего порядка по плотности, что полностью выходит за рамки возможностей обычного метода. К. П. Гурэв распространил этот метод на квантово-механический случай.

В монографии Н. Н. Боголюбова рассмотрены также другие возможные формы разложений теории возмущений, а именно по степеням малости взаимодействия. При этом получены кинетические уравнения Ландау и Власова.

Таково в самых общих чертах содержание этой небольшой по объему, но чрезвычайно богатой по идеям и результатам монографии Н. Н. Боголюбова. Аналогом функции распределения для комплекса из s частиц в квантово-механическом случае являются статистические операторы комплексов, получающиеся из статистического оператора всей системы взятием следа по переменным остальных $N-s$ частиц. Н. Н. Бо-

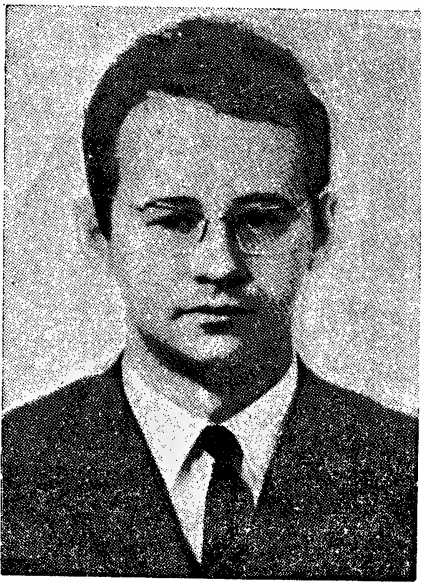
голюбов установил глубокую связь метода статистических операторов комплексов частиц с методом вторичного квантования⁴. Метод построения кинетических уравнений также допускает прямое обобщение на случай квантовых систем, поскольку он сформулирован в терминах скобок Пуассона и касательных преобразований, а эти понятия имеют свои аналоги в квантовой механике.

Кинетические уравнения для квантовых систем построены в работе (1947 г.) Н. Н. Боголюбова и К. П. Гурова на основе специального варианта теории возмущений по малости взаимодействия. При этом (для случая системы из Бозе-частиц в отсутствие вырождения) получено кинетическое уравнение в виде, уточненном по сравнению с больцмановским. Эффекты, учитываемые точным уравнением и не включаемые схемой парных соударений, состоят в появлении зависимости вероятности перехода и энергии от чисел заполнения. В работе отмечается, что уточненное кинетическое уравнение можно интерпретировать и в рамках больцмановской схемы, если относить столкновения не к частицам, а к квазичастицам. Кинетическое уравнение для квазичастиц в вырожденной слабонеидеальной Бозе-системе получено Н. Н. Боголюбовым в 1948 г. Его работы по кинетическому уравнению послужили отправным пунктом для дальнейших исследований этой проблемы. Новейшее развитие вопроса и библиографию можно найти в книге Пригожина «Неравновесная статистическая механика» (1964 г.).

Рассмотрим теперь одно из наиболее замечательных научных достижений Н. Н. Боголюбова — микроскопическую теорию сверхтекучести, изложенную вначале в его работе «К теории сверхтекучести» (1947 г.), а затем подробнее в монографии «Лекции по квантовой статистике». Напомним вкратце, в каком состоянии находилась эта область исследований перед появлением работы Н. Н. Боголюбова.

Первые успехи в понимании свойств жидкого гелия были достигнуты уже на основе феноменологических теорий. В 1938 г. Тисса предложил двухжидкостную модель. В 1941 г. ее существенно улучшил Л. Д. Ландау. Ему удалось получить уравнения двухжидкостной гидродинамики, следствия из которых хорошо согласовывались с экспериментом. Важным достижением полуфеноменологического подхода Ландау было выяснение связи между свойством сверхтекучести и структурой энергетического спектра слабовозбужденных состояний жидкого гелия, которые он представлял как совокупность квазичастиц с определенным законом дисперсии $\varepsilon(p)$. Система обладает свойством сверхтекучести, если закон дисперсии удовлетворяет условию $\min_p \frac{\varepsilon(p)}{p} > 0$. Однако в рамках такого подхода не мог быть выяснен следующий фундаментальной важности вопрос: каков тот микроскопический механизм, который может привести к энергетическому спектру постулированного типа? Эта проблема, равно как и проблема обоснования уравнений гидродинамики, могла быть решена только на основе последовательной

⁴ М. М. Б о г о л ю б о в. Лекції з квантової статистики. «Радянська школа», К., 1949.



В. П. Шелест.

тематического метода. Действительно, хотя в отличие от идеального Бозе-газа в неидеальной системе при нулевой температуре не все частицы находятся в конденсате, разумно предположить, что при не слишком сильном взаимодействии в нем будет находиться их основная часть. Это позволяет в пределе бесконечного объема заменить операторы рождения и уничтожения конденсатных частиц обычными числами и выделить из гамильтониана в качестве главной его части квадратичную форму по операторам рождения и уничтожения частиц. Для диагонализации этой формы используется ставшее теперь классическим каноническое преобразование, введенное впервые Боголюбовым. Метод канонического преобразования состоит в переходе от оператора частиц a_p, a_p^+ к операторам квазичастиц α_p, α_p^+ с помощью соотношений

$$a_p = u_p \alpha_p + v_p \alpha_{-p}^+,$$

где коэффициенты u_p и v_p , являющиеся четными функциями p , удовлетворяют условию

$$u_p^2 - v_p^2 = 1,$$

выражающему неизменность бозевских коммутационных соотношений при переходе к новым операторам. Эти величины выбираются в дальнейшем из условия диагональности главной части гамильтониана в операторах квазичастиц. В результате эта часть гамильтониана принимает вид

$$E_0 + \sum_p \epsilon_p n_p,$$

где E_0 — постоянная, определяющая энергию основного состояния, n_p — оператор числа квазичастиц с импульсом p , $\epsilon(p)$ — энергия

микроскопической теории. Разумеется, непосредственно рассчитать свойства реального жидкого гелия нельзя было из-за отсутствия в задаче малого параметра. Поэтому в качестве объекта исследования разумно было выбрать модель слабо-неидеального Бозе-газа. Эта модель и рассмотрена Н. Н. Боголюбовым.

Следует подчеркнуть, что даже если предположить, что взаимодействие слабое, задача остается весьма трудной, поскольку обычные методы теории возмущений оказываются здесь неприменимыми. Физическая причина этих трудностей кроется в явлении бозе-эйнштейновской конденсации, т. е. в макроскопическом заполнении наинизшего энергетического состояния индивидуальной частицы. Именно этот физический факт и положен в основу разработанного Н. Н. Боголюбовым ма-

квазичастицы. Для этой величины Боголюбов получил результат

$$\varepsilon(p) = \sqrt{v(p) \frac{N_0}{V} \cdot \frac{p^2}{2m} + \frac{p^4}{4m^2}},$$

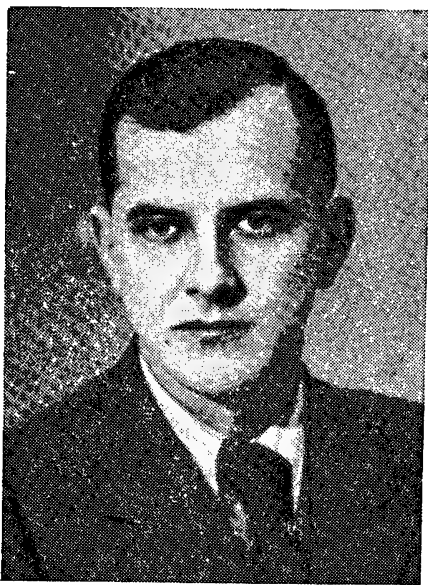
где $\frac{N_0}{V}$ — плотность частиц в конденсате, m — масса частицы, $v(p)$ — Фурье-образ потенциала парного взаимодействия между частицами, который на основании соображений термодинамической устойчивости должен удовлетворять неравенству $v(0) > 0$, что выражает условие преобладания сил отталкивания. Тройные и четверные члены в гамильтониане взаимодействия могут быть отброшены на основании малости числа надконденсатных частиц. Влияние этих членов исследовалось Боголюбовым в работе «Кинетические уравнения в теории сверхтекучести» (1948 г.).

Итак, Н. Н. Боголюбов доказал, что слабозвозбужденные состояния неидеального Бозе-газа можно рассматривать как состояния идеального Бозе-газа квазичастиц, а закон дисперсии квазичастиц, имеющих при малых импульсах линейный ход, удовлетворяет критерию сверхтекучести. Результаты этих исследований были воспроизведены в совместной более поздней работе (1955 г.) Н. Н. Боголюбова и Д. Н. Зубарева с помощью метода коллективных переменных. При этом также были найдены приближенно волновые функции основного и слабозвозбужденных состояний системы Бозе-частиц.

Н. Н. Боголюбов не только заложил фундамент современной микроскопической теории сверхтекучести, но и оказал, благодаря новизне и эффективности разработанных им математических методов, существенное влияние на развитие других областей теоретической физики. Метод канонических преобразований с успехом используется с тех пор при решении многих задач статистической физики и даже проник в теорию поля. Особенно важную роль — в надлежащем обобщении — он сыграл в построении микроскопической теории сверхпроводимости.

Математические приемы, использованные Боголюбовым при разработке микроскопической теории сверхтекучести, были затем развиты им же совместно с С. В. Тябликовым в общий метод приближенного вторичного квантования, примененный, например, при разработке теории полярной модели металла, теории ферромагнетизма и других проблем. Полученные в теории сверхтекучести результаты с 1947 г., со времени опубликования работы Н. Н. Боголюбова, развивались и обобщались широким кругом исследователей. Дальнейший прогресс в этой области связан с работами Ли и Янга, Хуанга, Бракнера и Савады, Беляева, Гугенгольца и Пайнса, Фейнмана и многих других. Обзор современного состояния вопроса и библиография даны в книге Пайнса «Проблема многих тел» (1963 г.). Мы остановимся на тех новых результатах, которые получил в этой области Н. Н. Боголюбов.

Рассмотрим работы Н. Н. Боголюбова по теории сверхпроводимости. Напомним историю создания микроскопической теории сверхпроводимости. Явление сверхпроводимости, открытое в 1911 г., долгое время оставалось загадкой. Хотя по мере накопления экспериментального



Д. Н. Зубарев.

впоследствии выяснилось, оказалось правильным. Ключом к построению теории явилась небольшая заметка Л. Купера, в которой хотя и не вполне последовательно, указывается на неустойчивость Ферми-сферы, т. е. основного состояния идеальных Ферми-частиц, по отношению к сколь угодно слабому притяжению между частицами. В результате этого притяжения электроны вблизи Ферми-сферы с противоположными импульсами и спинами образуют связанные пары. Эта идея была использована Бардином, Купером и Шриффером (краткая заметка появилась в апреле, подробная — в декабре 1957 г.). Ими рассмотрен модельный гамильтониан (так называемый редуцированный гамильтониан БКШ), учитывающий взаимодействие электронов только с противоположными импульсами и спинами, и для такого гамильтониана на основе вариационного принципа минимума энергии найдена энергия основного и возбужденных состояний, причем показано, что основное состояние отделено от возбужденных энергетической щелью. Во второй работе на основе этой же модели развиты термодинамика и электродинамика сверхпроводников и рассчитан ряд эффектов, в качественном отношении хорошо согласующихся с экспериментом.

Несмотря на успех модели БКШ, вследствие сделанных весьма грубых упрощений она довольно далека от действительности. В самом деле, запаздывающее взаимодействие между фононами заменено здесь прямым взаимодействием между электронами, носящим резонансный характер вблизи границы поверхности Ферми. Далее, ввиду сложного характера взаимодействия Бардин, Купер и Шриффер описывающую его функцию заменяют просто константой в тонком слое вблизи Ферми-сферы, а вне этого слоя взаимодействие полагают равным нулю. Наконец, из полученного гамильтониана выбрасывается подавляющая часть

материала развивались и совершенствовались феноменологические теории, все же до 1950 г. не было сколько-нибудь существенных сдвигов в понимании микроскопического механизма явления. В 1950 г. Фрелих высказал важную идею о том, что явление сверхпроводимости определяется главным образом взаимодействием электронов с фононами решетки. Хотя Фрелиху и не удалось развить на этой основе последовательной теории, он смог предсказать изотопический эффект, открытый в этом же году экспериментально независимо от теоретического предсказания. С 1954 г. Шафрот, Батлер и Блатт развивали представление о существенной роли парных корреляций электронов в явлении сверхпроводимости. Хотя им не удалось построить сколько-нибудь убедительную теорию, это представление, как

членов и оставляются только те, для которых суммарный импульс и спин пары электронов равны нулю. В связи с тем, что сделанные предположения не были достаточно аргументированы, естественно возникли сомнения в убедительности разработанной теории. Необходимо было поэтому развить регулярный метод построения теории на основе более реалистической модели, описываемой гамильтонианом Фрелиха. Эта программа и была выполнена Н. Н. Боголюбовым, еще до появления второй работы Бардина, Купера и Шриффера, с помощью нового математического метода, представляющего собой надлежащее обобщение на случай Ферми-систем метода, использованного при построении теории сверхтекучести. Работа Боголюбова «О новом методе в теории сверхпроводимости» вышла из печати в 1958 г. В этой работе выполняется каноническое преобразование к операторам квазичастиц α_{p0} , α_{p1} , перепутывающее Ферми-операторы с противоположными импульсами и спинами. Преобразование имеет вид



С. Т. Беляев.

$$a_{p\sigma} = u_p \alpha_{p\sigma} + v_p^\dagger \alpha_{-p, -\sigma},$$

причем u_p и v_p — действительные четные функции p , удовлетворяющие условию каноничности

$$u_p^2 + v_p^2 = 1.$$

Переходя к операторам квазичастиц в гамильтониане Фрелиха, Боголюбов выделяет гамильтониан нулевого приближения, диагональный по операторам квазичастиц и фононов, а остальную часть трактует как возмущение. Основное состояние невозмущенной системы есть вакуум по квазичастицам и фононам. Применение теории возмущений в обычной форме здесь снова невозможно из-за появления приводящих к расходимости «опасных знаменателей» в членах ряда, относящихся к процессам виртуального порождения из вакуума пары квазичастиц с противоположными импульсами и спинами. Поскольку эти процессы появляются в двух различных членах, их можно взаимно компенсировать за счет выбора параметров канонического преобразования u_p и v_p . Уравнение компенсации после преобразований сводится к интегральному уравнению, определяющему щель в спектре элементарных возбуждений. В результате решения этого уравнения находится энергия основного и возбужденного состояний сверхпроводника, причем последние снова можно трактовать как набор квазичастиц с законом дисперсии

$$\varepsilon(p) = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2(p)},$$



В. Г. Соловьев.

в котором ϵ_F — энергия электрона, отсчитанная от Ферми-сферы, $\Delta(p)$ — функция, определяющая энергетическую щель.

Отметим, что последовательный расчет, проведенный Боголюбовым, подтвердил в первом приближении результаты, полученные Бардином, Купером и Шриффером в их теории с модельным гамильтонианом. Теория Боголюбова отличается, однако, не только значительно более последовательным подходом как с математической, так и с физической точки зрения, но и тем, что содержит более ясную физическую картину сверхпроводящего состояния благодаря выдвиганию на передний план квазичастичной трактовки явления.

Термодинамика сверхпроводников была рассчитана Н. Н. Боголюбовым совместно с Д. Н. Зубаревым и Ю. А. Церковниковым на основе модельного га-

мильтониана в работе «К теории фазового перехода» (1957 г.). Здесь же впервые доказан (с помощью теории возмущений) тот факт, что задача с редуцированным гамильтонианом может быть решена асимптотически точно для бесконечно большого объема. Эти результаты, а также результаты дальнейшего подробного исследования модели Фрелиха, проведенные Боголюбовым и его сотрудниками, изложены в книге Н. Н. Боголюбова, В. В. Толмачева и Д. В. Ширкова «Новый метод в теории сверхпроводимости» (1958 г.). Кроме рассмотренных выше вопросов в ней с помощью метода приближенного вторичного квантования выполнен расчет спектра коллективных бозонных возбуждений в модели Фрелиха, учтено кулоновское взаимодействие, что привело при простейших аппроксимациях к логарифмическому критерию сверхпроводимости, менее жесткому в смысле появления эффекта сверхпроводимости, чем первоначальный критерий БКШ.

Н. Н. Боголюбов высказал важную идею о том, что в системах Ферми-частиц с преобладанием сил притяжения возможно явление сверхтекучести. В работе 1958 г. он указал также на сходство свойств ядерной материи с электронной структурой металлов, что позволило ввести представление о сверхтекучей модели ядра. Эта модель впоследствии подробно изучалась В. Г. Соловьевым и С. Т. Беляевым. При рассмотрении пространственно неоднородных систем Боголюбов ввел обобщенное каноническое преобразование (общее линейное преобразование операторов, перепутывающее операторы со всеми значениями импульса и проекции спина). Используя обобщенное преобразование, он предложил (1958 г.) вариационный принцип, обобщающий известный метод Хартри — Фока.

Приведем формулировку вариационного принципа Боголюбова для общего случая температур $\theta \geq 0$. Гамильтониан системы, равный

сумме кинетической энергии и энергии взаимодействия $H = T + V$, разбивается на два слагаемых, вообще говоря, другим способом: $H = H_0 + H_1$. При этом H_0 выбирается так, чтобы для него задача решалась точно. Практически H_0 — квадратичная форма по операторам рождения и уничтожения, содержащая произвольные параметры. Диагонализация H_0 проводится с помощью обобщенного канонического преобразования. Далее, для термодинамического потенциала системы

$$\Omega = -\theta \ln \text{Sp} e^{-\frac{H}{\theta}}$$

устанавливается оценка сверху:

$$\Omega \leq \Omega_0 + \langle H_1 \rangle,$$

где Ω_0 — термодинамический потенциал, соответствующий гамильтониану H_0 , а скобки $\langle \dots \rangle$ означают термодинамическое усреднение по ансамблю Гиббса с гамильтонианом H_0 . Наилучшая оценка для термодинамического потенциала получается при минимизации правой части неравенства по введенным параметрам. В конкретном случае теории сверхпроводимости необходимое условие минимума представляет собой уравнение для щели, а достаточное условие позволяет отобрать то решение, которое действительно реализуется (например, исключить тривиальное решение ниже критической температуры).

Гамильтониан H_1 обычно представляет собой четверную форму по операторам частиц, а при вычислении среднего H_1 усредняется по ансамблю с квадратичным гамильтонианом. В такой ситуации можно воспользоваться теоремой Вика и раскрыть средние произведений четырех операторов через парные средние. При этом наряду с нормальными средними, удовлетворяющими правилам отбора по числу частиц, возникают, вообще, и аномальные средние, этим правилам отбора не удовлетворяющие. При специальном выборе параметров аномальные средние отсутствуют. В этом частном случае получается приближение Хартри — Фока. В общем случае мы приходим к обобщению этого приближения. Подчеркиваем, что эффект сверхпроводимости принципиально не может быть получен в приближении Хартри — Фока, так как, полагая аномальные средние равными нулю, мы тем самым ограничиваемся тривиальным решением уравнения для щели. Для модели с редуцированным гамильтонианом вариационный принцип Боголюбова позволяет получить асимптотически точное решение в пределе бесконечно большого объема.

В 1959 г. Н. Н. Боголюбов исследовал проблему градиентно инвариантного объяснения эффекта Мейсснера и отыскания коллективных возбуждений в сверхпроводниках. Как известно, первоначальное рассмотрение эффекта Мейсснера, проведенное Бардином, Купером и Шриффером, было градиентно неинвариантным, что лишало его убедительности. Возникшая трудность обсуждалась в ряде работ, однако убедительные результаты получили лишь Андерсон, Боголюбов, Рикайзен и некоторые другие ученые. В подходе, развитом Н. Н. Боголюбовым, существенную роль играет обобщенное каноническое преобразование,



С. В. Тябликов.

что физически объяснимо, так как при наличии поля пары начинают двигаться как целое и поэтому необходимо рассматривать пары с любым суммарным импульсом. Боголюбов нашел коллективные возбуждения и установил связь между спектром коллективных возбуждений, выполнением правила сумм и условием градиентной инвариантности теории.

Н. Н. Боголюбов и С. В. Тябликов в совместном исследовании (1959 г.) разработали один из вариантов теоретико-полевой техники в статистической физике, а именно техники температурных двухвременных (запаздывающих и опережающих) функций Грина. На глубокие математические и физические аналогии между задачами квантовой теории поля и статистической физики Н. Н. Боголюбов указывал еще в апреле 1954 г. в докладе,

сделанном на Ломоносовских чтениях в МГУ. Использование этих аналогий привело к разработке нового математического формализма, основанного на применении методов квантовой теории для решения задач статистической физики.

Метод, предложенный Н. Н. Боголюбовым и С. В. Тябликовым, очень удобен благодаря простоте аналитических свойств Фурье-образов запаздывающей и опережающей функций Грина в комплексной плоскости энергетической переменной. Для этих функций получается бесконечная система зацепляющихся уравнений, приближенное решение которой может быть найдено с помощью метода «расщепления» системы, что достигается, например, путем приближенного представления высших функций Грина через низшие. Подчеркиваем, что развитый метод позволяет единым образом рассматривать как равновесные состояния, так и слабонеравновесные процессы. Предложенная техника проиллюстрирована на примерах гейзенберговской модели ферромагнетика и фрелиховской модели электрон-фононного взаимодействия. Более подробно эти проблемы исследованы в работах (1960—1963 гг.) С. В. Тябликова и Д. Н. Зубарева. Важным новым результатом, полученным С. В. Тябликовым, было уточнение низкотемпературного разложения для намагниченности ферромагнетиков. Метод двухвременных функций Грина и его разнообразные приложения в статистической механике изложены в монографии В. Л. Бонч-Бруевича и С. В. Тябликова «Метод функций Грина в статистической механике» (1961 г.).

Бесконечная система уравнений для двухвременных функций Грина, составленная на основе редуцированного гамильтониана теории сверхпроводимости, рассмотрена в совместной работе Н. Н. Боголюбова, Д. Н. Зубарева и Ю. А. Церковникова «Асимптотически точное решение для модельного гамильтониана теории сверхпроводимости» (1960 г.).

Не применяя теорию возмущений, авторы показали, что модель с редуцированным гамильтонианом допускает асимптотически точное решение в термодинамическом пределе, а сам этот гамильтониан асимптотически аппроксимируется квадратичным гамильтонианом по операторам рождения и уничтожения частиц. Поскольку аппроксимация понимается в смысле равенства средних по ансамблю Гиббса с тем и другим гамильтонианом, аппроксимирующий гамильтониан оказывается зависимым от температуры. Тем самым полностью разъясняется математическое содержание несколько необычного понятия энергетического спектра квазичастиц, зависящего от температуры. В указанной работе теорема об аппроксимирующем гамильтониане доказана при вполне общих предположениях о «потенциале» эффективного притяжения, в частности также для случая спариваний с ненулевыми (четными) орбитальными моментами. Стимулом для этого исследования модели с редуцированным гамильтонианом послужила отчасти работа Прейнджа, который, основываясь на методе выборочного суммирования диаграмм, пришел к выводу об отсутствии в модели БКШ решений со щелью в спектре элементарных возбуждений. Таким образом, одним из результатов работы было снятие парадокса Прейнджа.

Поскольку доказательство, проведенное в указанной работе, не было строгим с математической точки зрения, Н. Н. Боголюбов предпринял (1960 г.) изучение модели с редуцированным гамильтонианом на основе совершенно другого, математически безупречного метода. Он рассмотрел случай нулевой температуры и факторизующегося «потенциала» эффективного притяжения и распространил это исследование на случай ненулевой температуры.

В статистической физике известно крайне мало точно решаемых моделей, поэтому строгое рассмотрение модели с редуцированным гамильтонианом само по себе весьма интересно. В последние годы появились исследования (Годэна, Маттиса и Либа, Кляйна, Мюльшлегеля, Лэнджера, Такахаша и Умэдзавы и др.), посвященные асимптотически точному решению модели БКШ другими методами. Однако, пожалуй, во всех этих работах, претендующих на математически строгое рассмотрение, делаются в явной или неявной форме такие предположения, справедливость которых никоим образом не очевидна. Поэтому единственным вполне строгим и безусловно наиболее глубоким пока остается исследование Н. Н. Боголюбова.

Главным мотивом детального исследования модели БКШ для Боголюбова было не столько желание добиться полной математической строгости, сколько стремление до конца понять причину появления в теории сверхпроводимости «аномальных» средних. В самом деле, гамильтониан БКШ коммутирует с оператором полного числа частиц, следовательно, средние произведений операторов рождения и уничтожения с неравным числом тех и других (аномальные средние) должны равняться нулю в силу правил отбора. С другой стороны, метод канонического преобразования, применявшийся уже в первых работах по теории сверхпроводимости, приводит к тому, что эти средние оказываются отличными от нуля. Следовательно, нужно было выяснить, в каком смысле в

действительности здесь понимается усреднение. В связи с этим Боголюбов исследует более общую ситуацию, когда к гамильтониану БКШ добавлены пропорциональные параметру ν источники пар частиц с противоположными импульсами и спинами. Для такого гамильтониана H_ν аномальные средние, вообще говоря, отличны от нуля, поскольку гамильтониан H_ν не коммутирует с оператором полного числа частиц. Далее, с помощью виртуозной техники оценок доказываем, что в пределе, когда объем V стремится к бесконечности, все средние по основному состоянию гамильтониана H_ν аппроксимируются средними по основному состоянию квадратичного гамильтониана $H_0(\Delta)$, где комплексный параметр Δ удовлетворяет трансцендентному уравнению. Из этого уравнения при $\nu \neq 0$ определяется как модуль Δ , играющий роль энергетической щели, так и фазовый множитель, который совпадает с соответствующим фазовым множителем в источниках пар. Равным образом фиксируется фаза всех аномальных средних; из выражения для нормальных средних фаза выпадает. Если теперь во всех результатах перейти к пределу $\nu \rightarrow 0$, то аномальные средние останутся отличными от нуля. Таким образом, здесь мы сталкиваемся с непрерывностью предельных переходов: $V \rightarrow \infty$ и $\nu \rightarrow 0$. Выполняя сначала предельный переход $V \rightarrow \infty$, а затем $\nu \rightarrow 0$, получаем величины, которые Боголюбов называет квазисредними. Именно они и фигурировали в ранних приближенных методах теории сверхпроводимости.

Разумеется, можно было бы и не вводить источников пар, т. е. с самого начала положить $\nu = 0$. В этом случае только нормальные средние отличны от нуля и они аппроксимируются соответствующими средними по квадратичному гамильтониану $H_0(\Delta)$. Однако теперь соответствующим уравнением определяется только модуль Δ , фаза же остается произвольной. Следовательно, получается континуальное множество аппроксимирующих гамильтонианов $H_0(\Delta)$, причем аномальные средние, вычисленные по основному состоянию $H_0(\Delta)$, отличны от нуля, содержат произвольный фазовый множитель и не аппроксимируют, очевидно, равных нулю соответствующих средних по основному состоянию исходного гамильтониана — для этого нужно усреднить их по фазе. Возникшую здесь своеобразную ситуацию Боголюбов называет — по понятной аналогии — вырождением состояния статистического равновесия.

В следующей работе (1961 г.) Боголюбов указывает, что с явлением вырождения состояний статистического равновесия приходится сталкиваться весьма часто. Типичными примерами являются теории ферромагнетизма, кристаллизации, сверхтекучести, сверхпроводимости. Во всех таких задачах естественно возникает понятие квазисредних. Так, для определения спонтанной намагниченности в теории ферромагнетизма следует ввести в гамильтониан член взаимодействия с магнитным полем $\mathcal{H}$, а после выполнения всех расчетов и предельного перехода $V \rightarrow \infty$ перейти в выражении для производной от свободной энергии по магнитному полю к пределу $\mathcal{H} \rightarrow 0$. Вырождение состояния статистического равновесия здесь связано с инвариантностью гамильтониана в отсутствие магнитного поля по отношению к группе враще-

ний. Ясно, что по этой причине мы должны определить спонтанную намагниченность именно как квазисреднее, в противном случае для этой величины получится нуль даже ниже точки Кюри. Таким образом, квазисредние, а не обычные средние являются адекватным понятием в теории фазовых переходов. Появление ниже некоторой критической температуры не исчезающих квазисредних свидетельствует о появлении в системе определенного рода упорядоченности, связанной с фазовым переходом.

Понятие квазисредних, как показал Н. Н. Боголюбов, оказывается весьма существенным при формулировке принципа ослабления корреляции. Если термодинамическое среднее имеет вид $\langle A(x) B(y) \rangle$, где A и B — некоторые операторы, то при $(x - y) \rightarrow \infty$ эта величина стремится к произведению $\langle A(x) \rangle \langle B(y) \rangle$. Для того чтобы эта формулировка принципа ослабления корреляции была верной, нужно величины $\langle A(x) \rangle$ и $\langle B(y) \rangle$ определить, вообще говоря, как квазисредние, а не как обычные средние.

Сформулированный Н. Н. Боголюбовым в самом общем виде принцип ослабления корреляции пока не доказан, его приходится постулировать. Разумеется, в тех случаях, когда модель допускает точное решение, можно убедиться в его справедливости прямой проверкой. Для модели БКШ это сделано Боголюбовым в 1960 г. Можно провести подобную проверку также в двумерной модели Изинга. В тех случаях, когда точное решение найти невозможно, использование принципа ослабления корреляции позволяет иногда сделать выбор аппроксимации.

В 1961 г. Н. Н. Боголюбов кроме общей концепции квазисредних рассмотрел ряд конкретных проблем. Назовем здесь весьма общие и глубокие теоремы «об особенностях типа $\frac{1}{q^2}$ », доказанные для Бозе- и Ферми-систем при наличии в них конденсата. Эти теоремы следуют из свойства градиентной инвариантности теории и поэтому не связаны с теми или иными модельными предположениями. Для случая Бозе-систем одна из теорем гласит, что Фурье-образ по времени двухвременной функции Грина, взятый в нуле, $\ll a_q; a_q^+ \gg_{\omega=0}$, удовлетворяет неравенству

$$|\ll a_q; a_q^+ \gg_{\omega=0}| \geq \text{const} \frac{\rho_0}{\rho_1} \cdot \frac{1}{q^2}.$$

Здесь $\frac{\rho_0}{\rho}$ — отношение плотности частиц в конденсате к полной плотности, q — переменная импульса. Одним из следствий теоремы является вывод о том, что энергетический спектр Бозе-системы при наличии конденсата в области малых импульсов носит акустический характер. Этот результат был получен ранее Гугенгольцем и Пайнсом с помощью теории возмущений. Таким образом, независимо от модели, мы приходим к заключению, что Бозе-система с конденсатом обладает свойством сверхтекучести.

В 1963 г. Н. Н. Боголюбов вновь обратился к проблеме жидкого

гелия и дал последовательный вывод уравнений двухжидкостной гидродинамики на основе микроскопической теории. Уравнения, которые он получил для случая безвихревого движения, совпали с уравнениями, установленными Л. Д. Ландау с помощью феноменологических соображений. Случай вихревого движения на основе метода Боголюбова рассмотрен С. В. Иорданским в 1963 г.

В последние десятилетия усилия ряда исследователей (Ван-Хов, 1949 г.; Ли и Янг, 1952 г.; Рюэлль, 1963 г., и др.) были направлены на получение математически точных результатов в статистической физике типа теорем существования свободной энергии на единицу объема и решения цепочки уравнений для корреляционных функций в пределе бесконечно большого объема. В этом направлении один из первых результатов принадлежит Н. Н. Боголюбову, доказавшему (в совместной работе с Б. И. Хацетом, 1949 г.) теорему о существовании решения цепочки уравнений для корреляционных функций в пределе $V \rightarrow \infty$ при определенных условиях, налагаемых на потенциал парного взаимодействия. Лишь спустя 14 лет Рюэлль также получил эти результаты при более слабых ограничениях на потенциал.

Итак, центральное место в статистической физике последних десятилетий занимала проблема неидеальных систем. Благодаря фундаментальным исследованиям Н. Н. Боголюбова в этой области теоретической физики удалось продвинуться весьма далеко вперед.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ

Введение

Применение математических методов в исследованиях по механике — одна из самых старых, традиционных областей прикладной математики. В настоящее время механика — наука весьма разветвленная; в нее входят дисциплины в значительной мере самостоятельные, со своей тематикой, условностями и методами, дающие начало новым направлениям. В то же время заметно и обратное дифференциальному процессу стремление искать новые решения на стыке разных научных направлений и разных наук с помощью различных математических методов. Широко распространены заимствование и перенос методов из одних областей в другие и развитие на их основе новых направлений, иногда возвращающих математике свой долг сторицей, ибо новые проблемы часто оказываются неразрешимыми при использовании старых методов и стимулируют таким образом разработку новых математических идей и направлений.

В настоящей главе сделана попытка осветить использование математических методов в различных областях механики. При исследовании совершенно разнородных областей механики часто пользуются аналогичными математическими методами: создается своеобразная математическая модель, которая и служит образцом при решении задач теории упругости, гидроаэромеханики, теории механизмов.

В самом начале нашего века замечательный русский механик и педагог В. Л. Кирпичев в лекциях, положенных в основу его «Бесед о механике», посвятил целый раздел таким математическим моделям решения задач механики. Уже вскоре стало ясно, что подобного рода информация имеет не только педагогический, но и научный интерес. Поэтому редакция «Истории отечественной математики» решила, что изложению применения математических методов к отдельным направлениям и разделам механики следует предпослать общий очерк математических методов, в котором была бы показана их взаимосвязь и выявлены основные тенденции их развития. Такой очерк и был написан для настоящего издания А. Ю. Ишлинским.

В отличие от обычных работ по истории науки, в этом очерке нет имен и дат. Но в нем показано, как применяются математические методы

к задачам механики, их взаимосвязь и постоянная зависимость от практики.

Математические методы в механике, методика их применения непрерывно развиваются, совершенствуются, иногда «стареют» и заменяются другими, более современными, более соответствующими условиям поставленной задачи. Однако, и в этом заключается внутренняя диалектика развития науки, не всегда устаревшие методы оказываются устаревшими всерьез и безнадежно. Очень часто они оказываются недостаточными лишь для определенного уровня развития науки: «устарели» они или потому, что их предложили слишком рано, или же потому, что наука «поспешила» оторваться от своего предыдущего уровня и, уйдя вперед, не обеспечила себе тыла. И в том и в другом случае обязанностью историка науки является не только «сохранение памяти о деяниях отцов и предков наших», но и активное вмешательство в развитие самой науки путем извлечения из склада старого аппарата и доказательства того факта, что он кое для чего еще пригоден. Поэтому сводка, подобная той, которую составил В. Л. Кирпичев или, для настоящего издания, А. Ю. Ишлинский, также является незаменимым оружием: для того чтобы овладеть будущим, нужно хорошо знать прошлое и еще лучше знать настоящее, которое в более или менее близком «завтра» само станет прошлым. Этим и объясняется структура настоящей главы.

Математика и методы механики

1

Механика в наши дни

Остановимся сначала на некоторых общих вопросах, относящихся к механике и ее взаимоотношениям с математикой. Каковы особенности механики как науки? Не превратилась ли наиболее абстрактная часть механики в главу математики, как об этом думал два века назад Лагранж, а прикладные разделы — в инженерную науку, о чем иногда можно услышать и сейчас в кругу ученых — математиков и даже физиков? Как связана механика с другими науками и техникой? Какие новые проблемы стоят перед механикой, и не настало ли время передать все ее задачи для быстрого и точного разрешения математическим машинам?

Содержание любой науки отнюдь не исчерпывается совокупностью ее законов, подобно тому как давно установленные правила стихосложения не перевели поэзию в разряд общедоступного мастерства, а строгие законы полифонии не устранили в музыке свободы творчества композитора. Естественно, и механика, основные законы которой, казалось бы, были открыты Ньютоном уже около трех веков назад, а многие частные закономерности были известны еще в древнем мире Архимеду и позднее Галилею, ни в коей мере не свелась к совокупности раз и на-

всегда установленных правил и схем решения ее конкретных задач. К тому же основных законов механики, законов Ньютона — Галилея, оказывается недостаточно для изучения ряда коренных проблем движения и равновесия изменяемых твердых тел, а также тел жидких и газообразных, т. е. для построения так называемой механики сплошной среды. Действительно, сопротивление материалов, теория упругости и теория пластичности, гидравлика и гидродинамика, аэро- и газодинамика — все эти механические дисциплины используют помимо исходных законов механики также законы физики о поведении макрочастиц среды при изменении их формы.

К сожалению, пока далеко не для всех сред такие законы известны. Поэтому не завершена, например, теория возникновения и развития турбулентного (завихренного, самоперемешивающегося) потока жидкости, имеющая большое значение и для науки и для техники. Нет полной ясности в механизме пластической деформации металлов, вследствие чего задерживается развитие теории прочности и теории разрушения твердых тел. Требуют уточнения законы гидротермохимии — науки о механических процессах в жидких и газообразных телах, вступающих в химические реакции (горение, синтез новых химических продуктов). Не выяснена природа многих сил, действующих в живом организме, в частности сил, производящих деление клеток. Очень сложна внутренняя механика полимеров. Законы изменения надмолекулярной структуры полимеров нуждаются в пристальном изучении. Они в значительной мере определяют многие свойства полимерных материалов при их практическом использовании.

Строгое разрешение многих проблем механики чаще всего оказывается крайне сложным. Поэтому при решении задач механики конкретной сплошной среды, например воды, асфальта, бетона, природного газа, капрона и т. п., приходится обычно делать упрощающие предположения о поведении такой среды при ее движении и деформации. Тем самым уравнения движения или равновесия фактически составляют для некоторой воображаемой среды, лишь приближенно отображающей существенные в данном процессе свойства реальной среды. Такая «подмена» реальной среды воображаемой называется построением модели сплошной среды. На модели можно математическими методами изучить важнейшие обстоятельства рассматриваемого движения или равновесия упругого и пластического тела, жидкости, газа, плазмы.

Математика играет исключительную роль в развитии механики, придавая ее заключениям большую общность. Благодаря математике результаты исследований по механике сохраняются в компактном виде на века и становятся известными широкому кругу образованных людей. Математика позволяет ученому предвычислить многие явления и проанализировать многочисленные частные случаи общей проблемы. Этому в значительной мере способствуют быстродействующие вычислительные математические машины, которые подняли ряд исследований по механике на качественно новый уровень, освободили ученого от необходимости отыскания подчас малосущественных приближенных приемов решения конкретных задач и от утомительных вычислений, тем бо-

лее что некоторые из таких вычислений раньше вообще нельзя было завершить в обозримые сроки. Именно вычисление на математических машинах траектории движения автоматической межпланетной станции, сфотографировавшей обратную (невидимую) сторону Луны, привело к важному для космогонии открытию — спутники планет, плоскости орбит которых перпендикулярны плоскости орбиты своей планеты в ее обращении вокруг Солнца, непременно должны упасть на планету в результате возмущающего притяжения нашего светила. Этим объясняется расположение плоскостей орбит всех спутников (за исключением спутников далекого Урана, где притяжение Солнца слишком мало) под небольшими углами к плоскостям орбит их планет.

И тем не менее существуют проблемы механики, уже сформулированные как задачи математики, которые пока еще невозможно решить на имеющихся вычислительных машинах. Это проблемы неустановившегося движения сплошной среды. В частности, к ним относится задача предсказания погоды на основании решения более точных уравнений математической метеорологии, чем те уравнения, которые применялись до сих пор.

Следует признать, что математическая сложность решения задач механики не является главным препятствием для ее развития. Затруднения часто возникают уже при постановке проблемы, т. е. при ее формулировке как задачи математики или экспериментального исследования. Нужно суметь выделить в изучаемом явлении действительно главное, правильно выбрав модель среды и дополнительные рабочие гипотезы. Особенно существенно составление уравнений в строжайшем соответствии с основными законами механики или их следствиями. Даже малая ошибка в постановке задачи механики зачастую приводит к неверному результату.

Важную, а иногда и определяющую роль в развитии естественных наук — механики, физики, химии, биологии — играет открытие новых явлений, или эффектов. Нередко новое при первом ознакомлении с ним представляется чуть ли не парадоксальным, противоречащим здравому смыслу, не согласующимся с основными законами науки или их прямыми следствиями. Исследование и объяснение нового эффекта неизменно обогащает науку и приводит к важным теоретическим и практическим выводам. Так, обнаружение Кеплером явления движения планет по эллипсам и некоторых особенностей этого движения привело к открытию Ньютоном законов всемирного тяготения и в дальнейшем к точному предсказанию небесных явлений (например, затмений Луны и Солнца), а также вычислению траекторий космических кораблей.

Новые эффекты механики обнаруживаются чаще всего в результате «незакономерного» поведения творений техники — сооружений и машин — иногда и с аварийным исходом, а также приборов, экспериментальных установок и разнообразных технологических процессов. Многочисленные неполадки из-за вибраций машин привели к созданию разветвленной теории резонансных явлений, имеющей большое практическое значение не только в механике, но также в электротехнике и электронике. Исследование Эйлером явления выпучивания в сторону сжа-



Участники III Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Москва, 1968 г. Слева направо: Л. И. Седов, М. А. Лаврентьев, И. И. Артоболевский, М. В. Келдыш, Н. И. Мухелишвили, А. Ю. Ишлинский, Н. Х. Арутюнян.

того в продольном направлении стержня привело к созданию теории устойчивости строительных конструкций. Интересен недавно открытый эффект образования гофра при обжатии трубы силами взрыва, а также появление нескольких полуволн продольного изгиба при внезапном сжатии стержня вдоль его оси. Гироскопический эффект, обнаруженный 100 лет назад Фуко, послужил основой идеи построения гироскопического компаса и других важных гироскопических приборов и устройств. Правильное понимание механических явлений при трении позволило советским ученым создать новые материалы с необычайно большим сроком службы — ретинакс для тормозов и аман для подшипников.

Исследование явлений природы имеет большое значение для развития механики. Реки в северном полушарии подмывают правые берега. Перемещение воздушных масс неизбежно приводит к зарождению циклонов. Причина обоих явлений — поворотная сила инерции при движении относительно вращающейся Земли — была открыта немногим более века тому назад Кориолисом. Без учета этой силы невозможно правильно рассчитывать, например, полеты ракет и поведение гироскопических приборов на подвижных объектах.

Большое познавательное значение имеет открытие акустической локации у летучих мышей и гироскопического эффекта вибрирующих жужелиц у двукрылых насекомых. Известно, как быстро плавает дельфин. Установлено, что сопротивление воды его движению в несколько раз меньше, чем его буксируемой деревянной модели. Разгадка этого явления открыла бы путь к коренному совершенствованию подводного плавания. К числу неразгаданных тайн природы относится явление



А. Ю. Ишлинский и Н. Н. Боголюбов.
1966 г.

шаровой молнии, в которой механические движения переплетены с химическими и электродинамическими процессами. Возможно, что решение проблемы шаровой молнии приведет к ряду новых открытий.

В некоторых случаях новые эффекты механики предсказываются в результате математического анализа свойств того или иного движения тел. Исследуя движение твердых тел в неограниченном объеме несжимаемой идеальной жидкости, Даламбер в результате математических выкладок пришел к парадоксальному выводу: при прямолинейном равномерном поступательном движении тело не должно встречать со стороны такой жидкости никакого со-

противления. В реальных жидкостях из-за возникновения вихрей этот вывод не оправдывается. Н. Е. Жуковский, смело взяв за модель воздуха идеальную несжимаемую жидкость и введя дополнительный («присоединенный») вихрь, вывел формулу для подъемной силы аэроплана.

Весьма полезна теория направленного взрыва, созданная М. А. Лаврентьевым совместно с группой его учеников. Считая грунт как бы несжимаемой жидкостью, они показали, что можно перебросить целый массив грунта без изменения его формы в заданном направлении, если в нужной пропорции обложить его со всех сторон взрывчаткой. Распределение толщины заряда должно быть таким, как и распределение давления в гидростатике, а именно, пропорциональным удалению от плоскости, перпендикулярной направлению желаемой скорости массива. Это совсем так, как в целиком наполненной графине возникает дополнительное давление его стенок на воду при внезапном придании графину движения в заданном направлении. Теоретическими и экспериментальными исследованиями по механике взрыва занимаются издавна, а эффект М. А. Лаврентьева обнаружен несколько лет назад. Это показывает, что даже к простому по форме научному результату зачастую ведет долгий творческий путь ученых.

Наконец, замечателен эффект, относящийся к механике тяготеющих друг к другу масс. Этот эффект открыт и исследован в космогонических целях Я. Б. Зельдовичем. Им доказано, что рой частиц, равномерно заполняющих в начальное мгновение времени эллипсоид, сохраняет вид эллипсоида, правда, уже переменной формы, если только начальное распределение скоростей частиц следовало некоторому простому закону, в частности если в начальное мгновение частицы вообще не

имели скоростей или они были у них такими, как у произвольно вращающегося твердого тела.

Механика является одним из краеугольных камней здания современной техники. В некотором смысле механика представляет собой и инженерную науку. Ученый в области механики может только гордиться, если инженеры признают его человеком своего славного племени. Блестящим инженером проявил себя великий механик древности Архимед при защите родных Сиракуз от римлян. Вместе с инженерами наши замечательные ученые Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин создали отечественную авиацию, преобразившую транспорт и оборону страны. Авиация была триумфом механики первой половины нашего столетия. Исключительна роль А. Н. Крылова в создании отечественного морского флота, Л. С. Лейбензона — в практике добычи нефти, В. Г. Шухова — в строительстве и энергетике. Триумфом механики второй половины XX в. является создание космических кораблей и грандиозных ракет, выводящих эти корабли на орбиты искусственных спутников Земли и еще дальше, в глубины Вселенной, к Луне и планетам нашей Солнечной системы. Уже теперь видны новые широкие горизонты науки в целом, открытые космическими ракетами. Неизмеримо воздействие искусственных спутников, особенно со славными космонавтами на борту, и на общественную жизнь всего человечества. А это только начало космической эры!

На повестке дня современной техники проблема проникновения в глубинные недра самой Земли, а в дальнейшем и других планет. Одна из первых задач — использование горячих вод подземных источников и создание энергетических установок неистощимой работоспособности. Механике предстоит разработать новые принципы действия машин для перемещения в глубь Земли и для транспортировки оттуда содержания ее недр. Велики и ответственны задачи ее в области энергетике, в освоении космоса и проникновении в толщу планеты. Вместе с электродинамикой и физикой атомного ядра она штурмует передовые позиции современной науки в микро- и макромире. Вместе с родственной ей теорией регулирования, электроникой и теорией информации она составляет научную основу прогресса автоматизации народного хозяйства страны. Она становится одной из основ гигантского расширения производства новых химических веществ, синтетических материалов и удобрений. Великое множество неисследованных проблем в механике — и принципиальных, требующих для своего решения тончайшего эксперимента и строгого математического аппарата, и прикладных, в которых научное предвидение ученого должно сочетаться с мастерством инженера.



Л. С. Лейбензон.

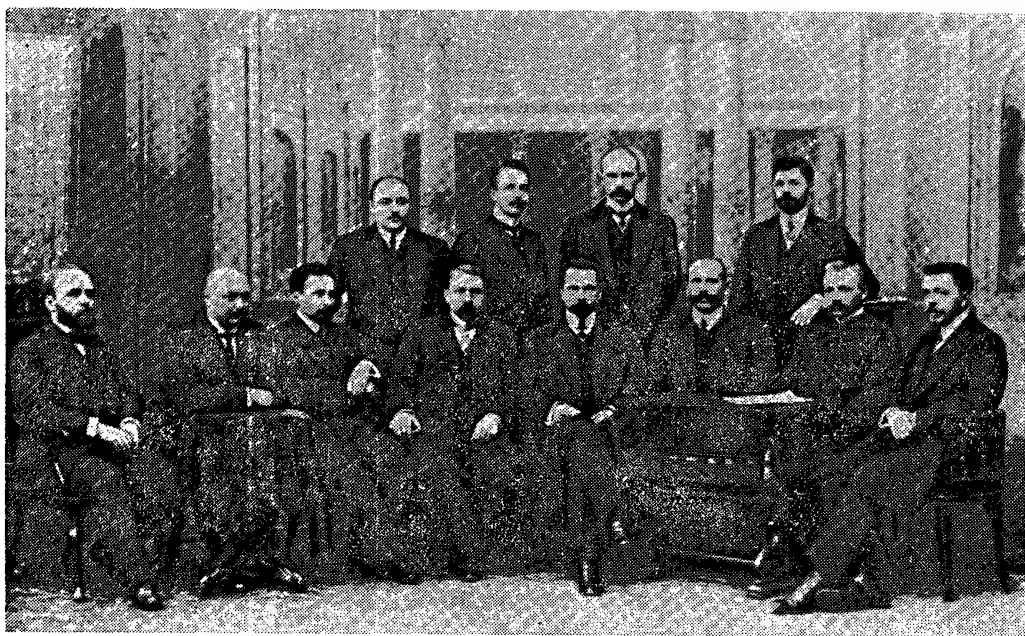
Качественная и количественная стороны в механике

В любой естественной науке следует различать ее качественную и количественную стороны. Соотношение этих сторон в разных науках неодинаково и изменяется по мере их развития. Качественная сторона науки связана с описанием существа явлений, изучаемых этой наукой, количественная же сторона содержит соотношения величин, характеризующих явление и процесс изменения их с течением времени. Качественные результаты науки достигались, как правило, наблюдениями, количественные — математическими методами. Эти правила имеют много исключений. Так, количественные соотношения нередко образуются в итоге экспериментальных измерений, а качественные предугадываются теоретическими исследованиями. Основной тенденцией развития наук следует считать усиление в них удельного веса количественной стороны и, как следствие, все большее привлечение к конкретным исследованиям математических методов. Последние сами непрерывно изменяются, совершенствуются и пополняются как в результате потребностей естественных наук, так и в силу внутренних законов самой математики. Нередко новые математические соотношения, теоремы, приемы и методы изобретались математиками как бы впрок и долгое время ждали своего применения к другим наукам. Примерно то же наблюдается и в естественных науках по отношению к практике. Далеко не все открытия в науках немедленно используются в практических делах.

На первый взгляд представляется, что в механике качественная сторона занимает мало места и основное отводится количественной стороне изучаемых механических явлений. Однако это верно лишь по отношению к изучению тех абстрактных схем и моделей сплошной среды, которые вводятся в механике для исследования реального движения и равновесия математическими методами. Таковы, например, проблемы небесной механики, теории движения абсолютно твердого тела, математической теории упругости, теории течения идеальной жидкости и совершенного газа. Здесь нередко почти стирается грань между математикой и механикой, что и послужило, по-видимому, основанием для известных категорических суждений Лагранжа и А. М. Ляпунова, касающихся соотношения этих дисциплин. Первое, принадлежащее Лагранжу, гласит: «... механика становится новой отраслью анализа...»¹. Во втором указывается, как, по мнению Ляпунова, следует поступать с конкретной задачей механики, поставленной математически совершенно точно: «...задача становится тогда проблемой чистого анализа и должна быть решена как таковая»². Однако действительность сразу же устанавливает недоста-

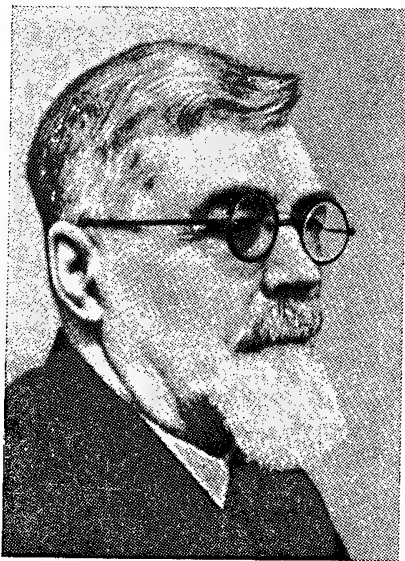
¹ Имеется в виду, конечно, анализ математический. См. Ж. Лагранж. Аналитическая механика. ГОНТИ, М.—Л., 1938, стр. 5.

² А. М. Ляпунов. Об одной задаче Чебышева.— В кн.: А. М. Ляпунов. Собр. соч. Т. 3. Изд-во АН СССР, М., 1959, стр. 209.



Коллектив авторов задачника по теоретической механике. В центре —
И. В. Мещерский.

точность одних только законов классической механики для математического решения конкретных задач движения или равновесия встречающихся в природе тел и необходимость привлечения законов физического характера. Последние относятся как к условиям деформирования тел, так и к соотношениям между параметрами механического движения и силами иной природы, например электрическими и магнитными. Далеко не все законы подобного рода точно установлены. Примером могут служить законы турбулентного движения жидкости и законы деформирования многих синтетических полимеров, а также бетона. Поэтому предмет механики никак нельзя сводить к одной математике и абсолютно точное решение ее задач, содержащих соотношения приближенно сформулированных законов природы, вряд ли представляет собой разумное расходование сил, если такое решение вообще оказывается возможным. Тем не менее решающая роль математики в изучении механических проблем чрезвычайно велика, и в ряде случаев чисто математическое исследование достаточно хорошо поставленных задач механики приводит к открытию новых явлений и новых возможностей применения механики к практике. Современные быстродействующие вычислительные машины не только облегчили численное решение многих громоздких задач механики, но и нередко позволили в рамках принятых допущений заменить собой дорогой и трудоемкий, многократно повторяемый эксперимент с постоянным изменением параметров, определяющих движение реальных тел. Кроме того, стали излишними поиски приближенных приемов математического решения задач механики, имевших целью сокращение вычислений старыми средствами. Вероятно, без таких



Е. Л. Николаев.

машин было бы невозможно обнаружить интересный факт неустойчивости движения искусственных спутников и падения их на Землю, если плоскость их орбиты перпендикулярна эклиптике. То же относится и к совершенно другой области — исследованию явления отхода ударной волны от поверхности затупленного тела при сверхзвуковом движении в воздухе.

Однако и после появления математических машин разработка новых и совершенствование уже известных методов общего решения задач механики нисколько не потеряли своего значения. Напротив, освобожденные от груза громоздких вычислений математические методы в приложении к механике придают исследованиям еще большую степень строгости и законченности и освобождают сами машины от работы впустую.

Математические методы, использующиеся в механике, весьма многообразны, однако все они в значительной мере связаны с проблемой интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Это совершенно естественно, так как именно дифференциальное соотношение лежит в основе простейшего уравнения движения материальной точки. В сравнительно кратком очерке невозможно сколько-нибудь полно изложить математические методы, нашедшие применение в механике. Поэтому представляется более целесообразным сделать попытку изложения существа некоторых из них на конкретных примерах, относящихся к задачам движения и равновесия механических систем, в частности сплошных сред.

Решение большинства задач механики в конечном счете сводится к рассмотрению совокупности обыкновенных дифференциальных уравнений. Это относится не только к динамике системы материальных точек и абсолютно твердых тел, но и к механике сплошной среды. Здесь такие дифференциальные уравнения возникают в связи с введением некоторых упрощающих предположений о характере движения или равновесия, либо в результате представления искомого решения в рядах (например, в случае так называемого разделения переменных в дифференциальных уравнениях в частных производных), либо, наконец, в силу специфических особенностей автомодельного движения и равновесия сплошной среды.

Пример 1. Было обнаружено, что гироскоп в кардановом подвесе, расположенный на неподвижном

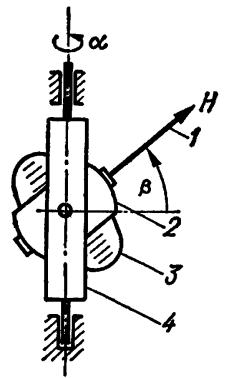


Рис. 1. Смещение среднего положения внешнего кольца гироскопа при нулевых:

1 — собственный кинетический момент, 2 — внутреннее кольцо (A_1, B_1, C_1), 3 — ротор (A, A', C), 4 — внешнее кольцо (A_2, B_2, C_2).

основании (рис. 1), при отсутствии трения в подшипниках его внешнего и внутреннего колец и ротора, а также при совершенной балансировке изменяет ориентацию среднего направления оси ротора, если посредством удара сообщить этой механической системе колебательное движение (нутации). После учета так называемого интеграла собственного вращения ротора ($H = \text{const}$) дифференциальные уравнения движения гироскопа приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} & [(A + A_1) \cos^2 \beta + C_1 \sin^2 \beta + A_2] \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + H \cos \beta \frac{d\beta}{dt} + \\ & + 2(C_1 - A_1 - A) \cos \beta \sin \beta \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt} = 0, \\ & (A + B_1) \frac{d^2 \beta}{dt^2} + (A_1 + A - C_1) \cos \beta \sin \beta \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \\ & - H \cos \beta \frac{d\alpha}{dt} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эти уравнения допускают еще два первых интеграла, соответствующих сохранению живой силы механической системы

$$[(A_1 + A) \cos^2 \beta + C_1 \sin^2 \beta + A_2] \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + (B_1 + A) \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 = h \quad (2)$$

и проекции ее кинетического момента на ось внешнего кольца

$$[(A_1 + A) \cos^2 \beta + C_1 \sin^2 \beta + A_2] \frac{d\alpha}{dt} + H \sin \beta = k. \quad (3)$$

В результате интегрирование совокупности (1) сводится к квадратурам, рассмотрение которых и приводит к заключению об уходе среднего положения плоскости внешнего кольца гироскопа от его начальной ориентации при угле β , не равном нулю.

Другой путь исследования этого вопроса — изучение малых колебаний гироскопа вблизи положения динамического равновесия, соответствующего постоянным значениям углов $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$, которыми определяется положение внешнего и внутреннего колец карданова подвеса. При этом в уравнениях сохраняются члены первого и второго порядков малости относительно разностей $\xi = \alpha - \alpha_0$ и $\eta = \beta - \beta_0$. Интегрировать получающиеся нелинейные дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} & [(A_1 + A) \cos^2 \beta_0 + C_1 \sin^2 \beta_0 + A_2] \frac{d^2 \xi}{dt^2} + H \cos \beta_0 \frac{d\eta}{dt} - 2(A_1 + \\ & + A - C_1) \sin \beta_0 \cos \beta_0 \left[\frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right] - H \sin \beta_0 \eta \frac{d\eta}{dt} = 0, \\ & (A + B_1) \frac{d^2 \eta}{dt^2} - H \cos \beta_0 \frac{d\xi}{dt} = - (A_1 + A - \\ & - C_1) \sin \beta_0 \cos \beta_0 \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 - H \sin \beta_0 \eta \frac{d\xi}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

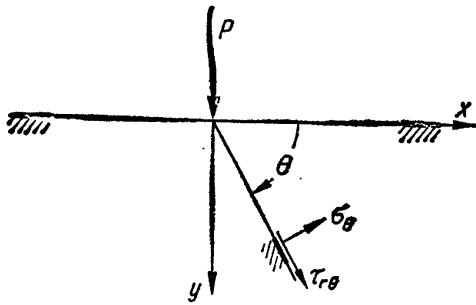


Рис. 2. Автомодельная задача о перемещениях упругой полуплоскости под действием сосредоточенной силы.

можно методами итераций, а также более строго методом Крылова — Боголюбова. В результате вновь обнаруживается эффект ухода внешнего кольца гироскопа. Аналогичные исследования поведения гироскопа в кардановом подвесе проводятся и в других, более сложных случаях, например, когда кольца и ротор гироскопа динамически не сбалансированы или когда основание качающееся.

Пример 2. При рассмотрении задачи об отыскании перемещений упругой полуплоскости под действием сосредоточенной силы, приложенной нормально к ее границе (рис. 2), следует сначала найти решение так называемого бигармонического уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \Phi(r, \theta) = 0, \quad (5)$$

удовлетворяющее на полупрямых $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ ($r > 0$) граничным условиям

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 \text{ и } \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (6)$$

В той задаче отсутствует какой-либо линейный размер, и она является, таким образом, автомодельной.

В силу теории размерностей функция напряжения Φ должна иметь структуру

$$\Phi = P \cdot r \cdot f(\theta). \quad (7)$$

Если подставить это выражение в бигармоническое уравнение (5), то для функции $f(\theta)$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4 f(\theta)}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} + f(\theta) = 0, \quad (8)$$

один из частных интегралов которого используется для построения функции $\Phi(r, \theta)$. Искомая функция имеет вид

$$\Phi = -\frac{Pr}{\pi} \theta \sin \theta. \quad (9)$$

Вопросы поведения механических и иных физических систем вблизи положения равновесия, условия установления их периодических движений и вопросы устойчивости таких движений изучаются обычно методами качественной теории дифференциальных уравнений, включающих соображения топологического характера.

Пример 3. Явление флаттера крыла самолета можно уяснить на примере движения модели крыла в потоке воздуха аэродинамической

трубы при наличии упругой связи и демпфера с сухим трением (рис. 3). Дифференциальное уравнение, которое можно предложить для описания движения такой модели, имеет следующий вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - b \frac{dx}{dt} + cx = -f \operatorname{sign} \frac{dx}{dt}. \quad (10)$$

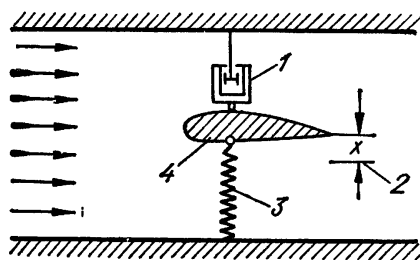


Рис. 3. Модель крыла, совершающего флаттерные колебания в воздушном потоке (в аэродинамической трубе):

1 — демпфер с сухим трением, 2 — положение модели крыла при ненапрянутой пружине, 3 — пружина жесткости c , 4 — модель крыла массы m .

Здесь член $-b \frac{dx}{dt}$ эквивалентен отрицательному сопротивлению, пропорциональному скорости движения модели, а $-f \operatorname{sign} \frac{dx}{dt}$ соответствует действию силы сухого трения. Если бы эти члены отсутствовали, то раз возникшие колебания крыла были бы незатухающими. Кулоново

трение при отсутствии потока воздуха вызывает уменьшение амплитуды колебаний на постоянную величину после каждого размаха. Поток воздуха, наоборот, раскачивает колебания, причем при отсутствии кулонова трения увеличение амплитуды происходит по закону геометрической прогрессии. Для решения вопроса о существовании периодического движения рассматриваются фазовые траектории уравнения (10) на плоскости с координатами x и $v = \frac{dx}{dt}$. Дифференциальное уравнение фазовых траекторий при переходе к безразмерным переменным (с сохранением их прежних обозначений) имеет вид

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v - \operatorname{sign} v - k^2 x}{v}, \quad k^2 = \frac{cm}{b^2}. \quad (11)$$

Оно интегрируется отдельно для случаев $v > 0$ и $v < 0$. Кривые, построенные в верхней и нижней полуплоскостях фазовой плоскости xv , припасовываются друг к другу, образуя так называемый фазовый портрет уравнения (10).

При больших значениях безразмерного параметра k^2 по сравнению с единицей фазовые траектории имеют вид спиралей, заполняющих всю плоскость. Спирали, расположенные снаружи по отношению к некоторой замкнутой кривой, называемой неустойчивым предельным циклом, как бы разматываются с нее в сторону беспредельного возрастания амплитуд колебаний. Спирали, расположенные внутри предельного цикла, достигают в конце концов положения покоя (рис. 4). Как правило, в последнем случае кривые не достигают начала координат и упираются в «зону застоя» — отрезок $\left(-\frac{1}{k^2} \leq x \leq \frac{1}{k^2}\right)$ оси абсцисс.

При малых значениях параметра k^2 фазовая картина существенно изменяется и колебания исчезают. Движение приобретает характер ухода от положения равновесия с непрерывным возрастанием скорости. При отсутствии сухого трения ($f = 0$) фазовый портрет движения в этом случае является неустойчивым узлом (рис. 5).

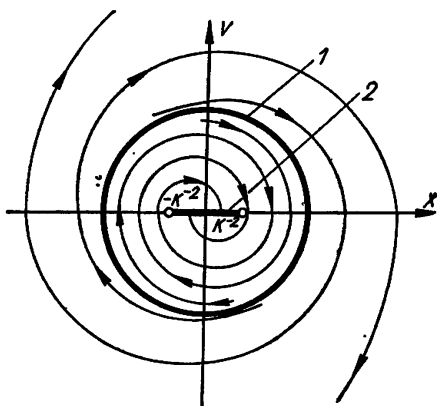


Рис. 4. Фазовый портрет неустойчивого цикла:

1 — предельный цикл, 2 — зона застоя.

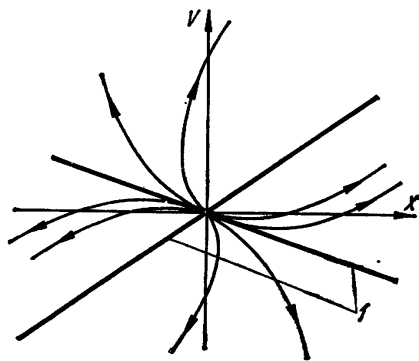


Рис. 5. Фазовый портрет неустойчивого узла:

1 — предельные фазовые траектории.

Пример 4. Другим примером использования методов качественной теории дифференциальных уравнений может служить задача об ударе вязко-пластического стержня о неподвижную преграду (рис. 6). Движение частиц стержня в той области, где происходит деформация, описывается в этом случае при подходящем выборе безразмерных переменных следующим дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (12)$$

с одним начальным условием $v(x, 0) = -v_0$ и тремя граничными

$$\left. \begin{aligned} v(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} v[\xi(t), t] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} v[\xi(t), t] &= \frac{\sigma_s}{\rho[l - \xi(t)]}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Здесь $\xi(t)$ — неизвестная переменная граница между частью стержня, где происходит деформация, и частью, ведущей себя как абсолютно твер-

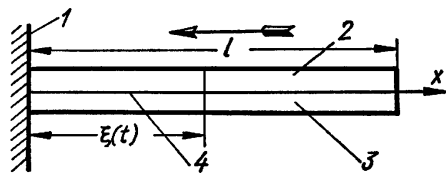


Рис. 6. Схема удара вязко-пластического стержня о неподвижную жесткую преграду:

1 — неподвижная преграда, 2 — стержень плотности ρ , вязкости μ с пределом текучести σ_s , 3 — жесткая часть стержня, 4 — переменная граница деформации стержня.

дое тело. Последняя примыкает к свободному концу стержня. В ней сжимаемое напряжение не превосходит предела текучести σ_s , характеризующего пластические свойства материала стержня. Применяя метод осреднения левой части уравнения (12) в предположении, что решение в первом приближении может быть представлено в виде

$$v(x, t) = -v_0 \left(\frac{2x}{\xi} - \frac{x^2}{\xi^2} \right) u(t), \quad \xi = \xi(t), \quad (14)$$

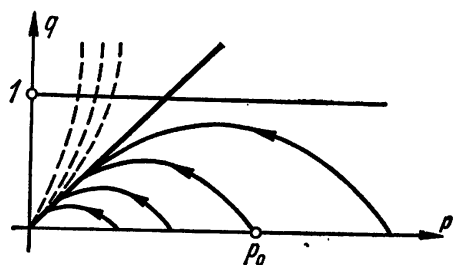


Рис. 7. Фазовый портрет уравнения (15).

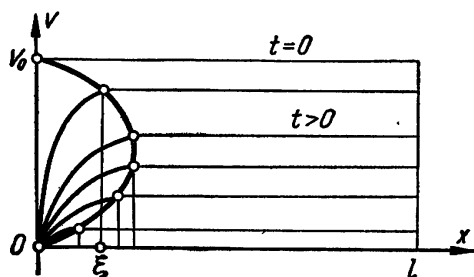


Рис. 8. Эпюра скоростей сечений стержня в различное время.

можно прийти к дифференциальному уравнению с особенностью при $p = 0$, связывающему две искомые безразмерные функции $p = \frac{1}{s} u(t)$ и $q = \frac{\xi^2(t)}{l^2}$, $s = \frac{\sigma_0 l}{\mu v_0}$, а именно

$$\frac{dq}{dp} = -12(1 - \sqrt{q}) + \frac{4q}{p}. \quad (15)$$

Упомянутая особенность соответствует седлу на фазовой плоскости с координатами p и q (рис. 7). Анализ решения показывает, что граница пластического деформирования в начальное мгновение времени находится в месте соударения пластического стержня с неподвижной преградой и далее перемещается с замедлением к его свободному концу. Не достигая свободного конца стержня, она меняет направление своего движения на обратное. Части стержня, оказывающиеся при этом позади движущейся границы, как бы отвердевают. Когда граница вновь достигает места соударения, скорость всего стержня обращается в нуль. На рис. 8 показано, как изменяется эпюра скоростей стержня по его длине по мере развития удара.

Задача об ударе вязко-пластического стержня о преграду может быть решена (разумеется, тоже приближенно) и методом конечных разностей. В этом случае масса стержня распределяется в материальных точках, разделенных между собой стерженьками, лишенными массы (рис. 9). Стерженьки начинают деформироваться, следуя закону

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \mu v_1 \frac{2n}{l} - \sigma_s, \\ \sigma_k &= \mu (v_k - v_{k-1}) \frac{n}{l} - \sigma_s, \\ k &= 2, 3, \dots, n-1, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

когда усилие σ в них по модулю достигает характерной константы σ_s и в дальнейшем превышает ее. Каждый из стерженьков вновь отвердевает, когда усилие становится меньшим этой константы.

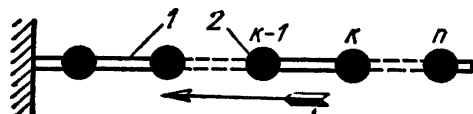


Рис. 9. Замена сплошного вязко-пластического стержня конечным числом сосредоточенных масс с вязко-пластическими связями между ними:

1 — вязко-пластический лишенный массы стержень с пределом текучести σ_s и вязкостью μ , 2 — сосредоточенные массы $\frac{m}{n}$ ($m = \rho l F$).

Таким образом, число дифференциальных уравнений, описывающих движение системы сосредоточенных масс, оказывается переменным. Вначале оно возрастает, а затем уменьшается до единицы. Совокупность дифференциальных уравнений для частного случая, когда в процессе деформации находятся в данное мгновение три стержня, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{n} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\mu F}{l} n (v_2 - 3v_1), \\ \frac{m}{n} \frac{dv_2}{dt} &= \frac{\mu F}{l} n (v_3 - 2v_2 + v_1), \\ (n-2) \frac{m}{n} \frac{dv_3}{dt} &= \frac{\mu F}{l} n (v_3 - v_2) + \sigma_s F. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

При решении описанной совокупности переменного числа дифференциальных уравнений на математической вычислительной машине были получены те же результаты, что и при упомянутом выше приближенном решении дифференциального уравнения параболического типа.

3

Критерии устойчивости линейных систем

Консервативные системы представляют собой узкий класс механических систем. Помимо демпфирующих сил в реальных системах есть силы сопротивления и силы, которые могут вносить энергию в систему и не быть вследствие этого консервативными. Выяснение условий устойчивости стационарного движения или равновесия таких систем представляет практический интерес даже при линеаризации описывающих их дифференциальных уравнений. Для систем не слишком большого числа степеней свободы условия устойчивости удобно получать методом Гурвица, предварительно составляя характеристическое уравнение системы.

Пример 5. Одноосный гироскопический стабилизатор (рис. 10) при наличии двигателя стабилизации, управляемого усилителем, не всегда устойчив, так как сила, развиваемая двигателем, не консервативна. Демпфирование этой механической системы при отсутствии сил трения в шарнирах подвеса рамы и кожуха гироскопа происходит за счет омического сопротивления R цепи якоря двигателя. Дифференциальные уравнения движения такой электро-механической системы имеют вид

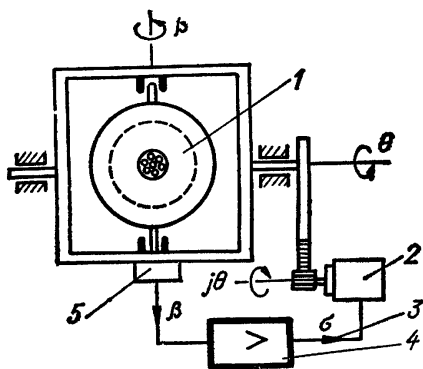


Рис. 10. Схема одноосного гироскопического стабилизатора: 1 — ротор гироскопа в кожухе, 2 — двигатель постоянного тока, 3 — ток в цепи якоря, 4 — усилитель, 5 — датчик угла β .

$$\left. \begin{aligned} \Theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + H \frac{d\beta}{dt} &= j \frac{C}{g} \sigma, \\ A \frac{d^2\beta}{dt^2} - H \frac{d\theta}{dt} &= 0, \\ R\sigma + jC \frac{d\theta}{dt} + L \frac{d\sigma}{dt} &= -\mu\beta. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Характеристический определитель совокупности этих уравнений

$$\begin{vmatrix} \Theta\lambda^2 & H\lambda & -j\frac{C}{g} \\ -H\lambda & A\lambda^2 & 0 \\ jC\lambda & \mu & R + L\lambda \end{vmatrix} = \lambda (a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4) \quad (19)$$

имеет один нулевой корень, соответствующий безразличию системы по отношению к координате θ , входящей в уравнения лишь своей производной. Неравенства Гурвица, т. е. совокупность условий отрицательности вещественных частей остальных корней, приводятся в данном случае к единственному неравенству

$$a_1a_2a_3 > a_1^2a_4 + a_0a_3^2. \quad (20)$$

После простейших упрощений оно принимает вид

$$\frac{jC}{\Theta} > \frac{\mu}{H}. \quad (21)$$

В этом условии устойчивости, против ожидания, не содержится ряд важных параметров системы, а именно, момент инерции A , коэффициент самоиндукции L и сопротивление цепи якоря R . Однако можно показать, что при выполнении условия устойчивости (21) эти параметры существенно влияют на характер затухания колебаний.

Несколько более сложной задачей является установление условий устойчивости двухосного гироскопического стабилизатора (рис.11), по-

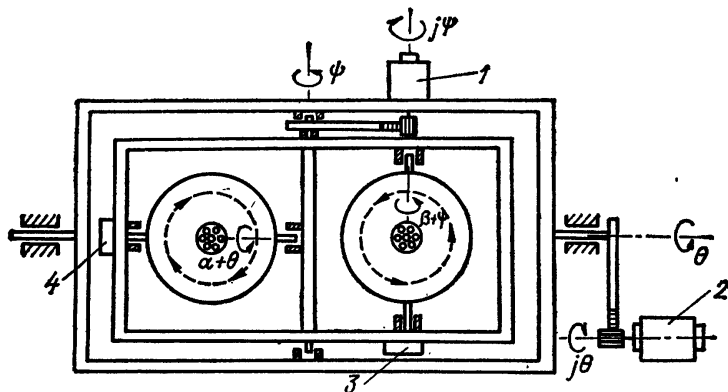


Рис. 11. Схема двухосного гироскопического стабилизатора (усилители стабилизации не показаны):

1, 2 — двигатели постоянного тока, 3 — датчик угла β , 4 — датчик угла α .

ведение которого при пренебрежении самоиндукцией в цепях якорей двигателей стабилизации описывается совокупностью дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \Theta \frac{d^2\theta}{dt^2} + H \left(\frac{d\beta}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \right) &= \frac{jC}{g'} \sigma, & \Psi \frac{d^2\psi}{dt^2} + H \left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \right) &= \frac{jC}{g} \tau, \\ A \left(\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{d^2\psi}{dt^2} \right) - H \frac{d\theta}{dt} &= 0, & A \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) - H \frac{d\psi}{dt} &= 0, \\ R\sigma + jC \frac{d\theta}{dt} &= -\mu\beta, & R\tau + jC \frac{d\psi}{dt} &= -\mu\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Однако при несущественном дополнительном условии $\Psi = \Theta$, касающемся моментов инерции элементов стабилизатора, характеристическое уравнение этой совокупности может быть представлено в виде

$$\lambda^2 [S^2(\lambda) + P^2(\lambda)] = 0. \quad (23)$$

Здесь полином $S(\lambda)$ имеет относительно λ третий порядок, а $P(\lambda)$ — одночлен, определяющийся формулой

$$P(\lambda) = \frac{\mu jC}{g} A \lambda^2. \quad (24)$$

Характеристическое уравнение (23) имеет два нулевых корня. Аналогично случаю одноосного стабилизатора их наличие обусловлено тем, что координаты θ и ψ входят в уравнения (22) лишь своими производными. Опуская множитель λ^2 , приходим к необходимости установления условий, при которых уравнения третьей степени с комплексными коэффициентами при первой степени

$$\left. \begin{aligned} \lambda^3 + a\lambda^2 + (b + ic)\lambda + d &= 0, \\ \lambda^3 + a\lambda^2 + (b - ic)\lambda + d &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

на которые распадается уравнение (23), имеют корни с отрицательными действительными частями. Так как a, b, c и d — положительные величины, то такое условие оказывается одним и тем же для обоих уравнений:

$$ab > d + c\sqrt{b}. \quad (26)$$

Если подставить в него выражение величин a, b, c и d через коэффициенты дифференциальных уравнений (22), то условие устойчивости получается в форме

$$\frac{jC}{\Theta} > \frac{\mu}{H} \left(1 + \sqrt{\frac{A}{\Theta}} \right). \quad (27)$$

Оно несколько более строгое по сравнению с условием устойчивости одноосного гироскопического стабилизатора с такими же параметрами.

Сингулярные интегральные уравнения

Интегральные уравнения с ядром, имеющим особенности, нередко встречаются в задачах механики сплошной среды. Это задачи, решение которых связано с определением того или иного потенциала, а также ряд задач теории наследственности при наличии особенности в ядре функционала Вольтерра..

Задача определения давления $p(\xi)$ на упругую полуплоскость под абсолютно жестким гладким штампом очертания $y = f(x)$ ($-a \leq x \leq a$) (рис. 12) сводится к отысканию функции, удовлетворяющей интегральному уравнению

$$-\frac{1}{\pi E} \int_{-a}^a p(\xi) \ln(x - \xi)^2 d\xi + B + \Omega x = f(x). \quad (28)$$

К этому уравнению нетрудно прийти, если учесть, что вертикальные перемещения $v(x)$ границы полуплоскости $y \geq 0$, вызванные сосредоточенной силой P , приложенной в точке $x = \xi$ нормально к границе, выражаются формулой

$$v(x) = -\frac{2P}{\pi E} \ln|x - \xi| + b + \omega x. \quad (29)$$

Если штамп плоский (рис. 13), то из уравнения (28) после дифференцирования по переменной x получаем новое сингулярное уравнение

$$-\frac{2}{\pi E} V p \int_{-a}^a \frac{p(\xi) d\xi}{x - \xi} + \Omega = 0, \quad (30)$$

в котором интеграл берется в смысле главного значения. После очевидной замены переменных уравнение (30) принимает вид

$$V p \int_0^\pi \frac{p(\theta) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \psi} = \frac{\pi E \Omega}{2}. \quad (31)$$

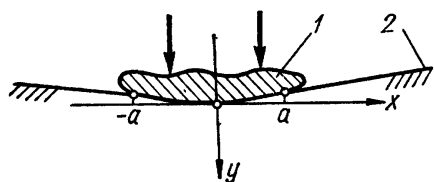


Рис. 12. Задача об отыскании давления под штампом, прижатом к упругому телу:
1—абсолютно жесткий и гладкий штамп,
2 — упругая полуплоскость.

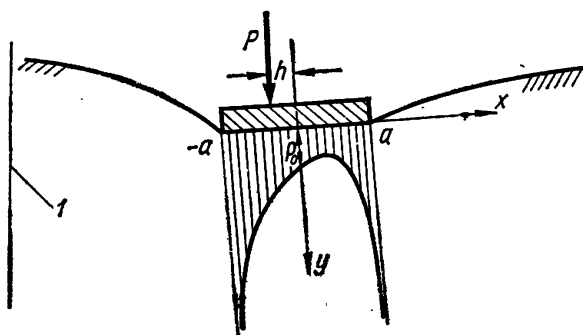


Рис. 13. Эпюра давления под плоским штампом при несимметричном нагружении:
1 — вертикальная линия.

Решение уравнения (31) представляется следующим образом:

$$p(\theta) = \frac{C}{\sin \theta} - \frac{E\Omega}{2} \operatorname{ctg} \theta. \quad (32)$$

После определения постоянных C и Ω из условий равновесия системы сил, действующих на штамп, и перехода к прежним переменным приходим к формуле для исходной функции

$$p(\xi) = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - \xi^2}} \left(1 - \frac{2h}{a^2} \xi \right). \quad (33)$$

Давление под штампом бесконечно велико в граничных точках штампа $\xi = \pm a$. Исключением является случай $h = \frac{a}{2}$, когда на правом конце давление обращается в нуль. Поэтому, если штамп не имеет сцепления с упругой полуплоскостью, при $h < \frac{a}{2}$ правый конец штампа поднимается и длина контактной зоны составляет $4h$ (рис. 14).

Решение более общего по сравнению с (30) интегрального уравнения

$$Vp \int_{-a}^a \frac{p(\xi) d\xi}{x - \xi} = q(x), \quad (34)$$

также следующего из уравнения (28), может быть представлено в виде

$$p(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{a^2 - x^2}} Vp \int_{-a}^a \frac{q(\xi) d\xi}{\xi - x}. \quad (35)$$

Это позволяет, например, найти закон распределения давления под штампом в форме тупого клина (рис. 15). Оно описывается формулой

$$p(x) = p_0 \ln \frac{x + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}, \quad p = \frac{\pi E \alpha}{2}. \quad (36)$$

Давление имеет логарифмическую особенность под острием штампа и обращается в нуль на краях зоны контакта.

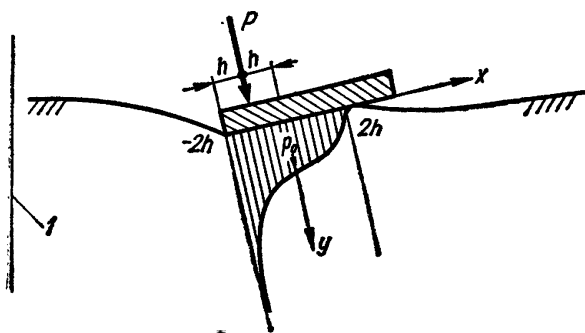


Рис. 14. Случай обращения в нуль давления на правом крае области контакта:
1 — вертикальная линия.

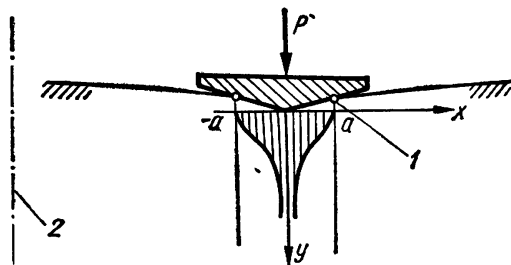


Рис. 15. Распределение давления под штампом в форме тупого клина:
1 — конечная точка области контакта, 2 — вертикальная линия, параллельная y , P .

5

Теория функций комплексного переменного

Посредством аппарата теории функций комплексного переменного решено большое количество разнообразных задач динамики сплошной среды, особенно имеющих отношение к механике идеальной несжимаемой жидкости, математической теории упругости, теории фильтрации и дифракции волн.

Пример 6. Известная задача о кумулятивном действии металлической «струи» на броню (рис. 16) моделируется задачей гидродинамики о встрече двух струй несжимаемых жидкостей разной ширины и в общем случае разных плотностей ρ_1 и ρ_2 . Для построения течения и подсчета скорости проникновения тонкой струи в широкую следует найти в случае $\rho_1 = \rho_2$ (случай $\rho_1 \neq \rho_2$ принципиальных усложнений не вносит) конформное отображение с надлежащим соответствием границ $w = f(z)$ верхней полуобласти комплексной плоскости z , занятой обеими жидкостями, на некоторую полосу с разрезом вдоль отрицательной оси абсцисс комплексной плоскости w (рис. 17). Для построения этого отображения вводится переменная ζ , определяемая выражением

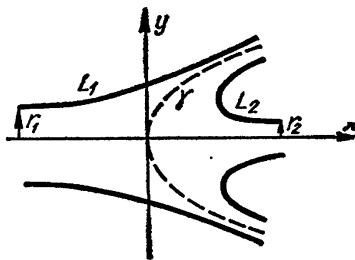


Рис. 16. Задача о встрече двух струй несжимаемых идеальных жидкостей.

$$\zeta = \ln f'(z) = F(w), \quad (37)$$

которое должно дать отображение полуполосы с разрезом в комплексной плоскости w на полуполосу шириной π в плоскости ζ . Это отображение определяется функцией

$$w = \frac{q_1}{\pi} \ln (\operatorname{ch} \zeta - 1) + \frac{q_2}{\pi} \ln (\operatorname{ch} \zeta + 1) - \frac{q_1 + q_2}{\pi} \ln \left(\operatorname{ch} \zeta - \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2} \right), \quad (38)$$

обратной по отношению к функции $\zeta = F(w)$. Для построения формулы (38) полуполоса в плоскости комплексной переменной ζ и полуполоса с разрезом в плоскости комплексной переменной w отображается с соответствием границ на одну и ту же вспомогательную верхнюю полуплоскость ω (рис. 18). Так как согласно соотношению (37)

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = e^{F(w)}, \quad (39)$$

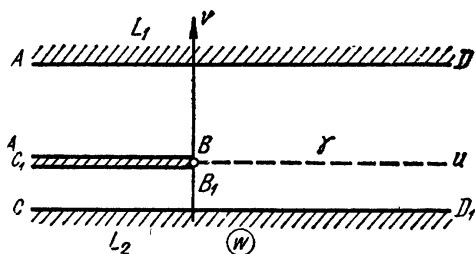
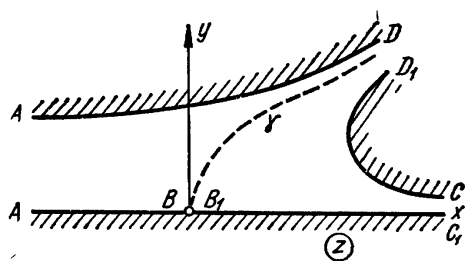


Рис. 17. Области в плоскостях течения и комплексного потенциала, которые должны быть конформно отображены друг на друга.

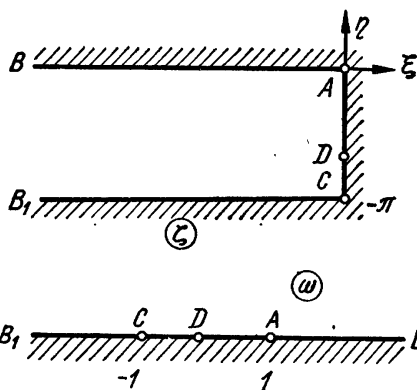


Рис. 18. Вспомогательные комплексные плоскости, используемые при решении задачи о кумуляции.

ложняющих решение задачи, скорость V_2 представляется формулой

$$V_2 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} V_1. \quad (41)$$

Эта формула служит основанием для установления глубины h «размыва» брони плотности ρ_1 металлическим отрезком плотности ρ_2 и длины l :

$$h = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} l. \quad (42)$$

Приближенная формула (42) подтвердилась экспериментальными исследованиями.

Пример 7. Удар жесткой пластинки массы m (рис. 19) со скоростью V_0 плашмя о плоскую границу идеальной несжимаемой жидкости вызывает мгновенное появление в ней поля скоростей с некоторым начальным потенциалом ϕ , являющимся гармонической функцией коор-

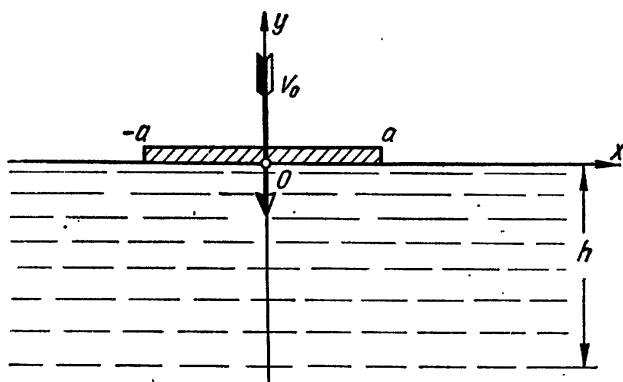


Рис. 19. Удар абсолютно жесткого тела по поверхности идеальной несжимаемой жидкости.

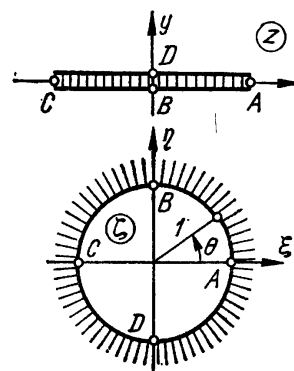


Рис. 20. Конформное отображение, реализуемое функцией $z = \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$.

то функция

$$z = \int_0^w e^{-F(w)} dw \quad (40)$$

реализует искомое конформное отображение и, как следствие, решает задачу о построении поля скоростей обеих струй и их границ.

Налагая на установленное течение струй дополнительное поступательное движение со скоростью V_2 справа налево, можно «остановить» широкую струю и найти скорость проникновения в нее узкой струи. В случае разных плотностей жидкости, незначительно ус-

динат. В условиях плоской задачи, когда жидкость занимает нижнее полупространство $|h = \infty|$, гармоническая функция $\varphi(x, y)$ может быть найдена по следующим граничным условиям. Она равна нулю на оси абсцисс всюду вне отрезка $-a < x < a$, а на самом этом отрезке ее производная по y постоянна. Последняя равна $-V$, где V — скорость пластинки в мгновение, непосредственно следующее за ударом.

Функцию $\varphi(x, y)$ можно аналитически продолжить в верхнюю полуплоскость. В симметричных относительно оси абсцисс точках аналитически продолженная функция имеет те же значения, что и исходная. Однако на отрезке $-a < x < a$ ее производная по y оказывается противоположного знака по сравнению с аналогичной производной исходной функции. Таким образом, гармоническая функция $\varphi(x, y)$, рассматриваемая на всей плоскости, имеет на берегах разреза $-a < x < a$ всюду одну и ту же величину производной по внутренней нормали.

Функция

$$z = \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (43)$$

отображает плоскость с разрезом на внутренность единичного круга $|\zeta| < 1$ в плоскости комплексной переменной ζ (рис. 20). Формула (43) позволяет рассматривать искомый потенциал как гармоническую функцию переменных ξ и η . На границе круга $|\zeta| = 1$ производная такой функции по внешней нормали, т. е. по направлению радиуса круга, равна

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \rho} = V_0 \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = -Va \sin \theta, \quad \zeta = \rho e^{i\theta}, \quad (44)$$

что является действительной частью значения функции

$$w(\zeta) = iaV\zeta \quad (45)$$

комплексной переменной ζ на границе единичного круга. Отсюда следует, что потенциал $\varphi(x, y)$ является действительной частью функции

$$w(z) = iV(z - \sqrt{z^2 - a^2}) \quad (46)$$

и на поверхности соприкосновения пластинки с жидкостью принимает значение

$$\varphi(x, 0) = V \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (47)$$

Интеграл

$$\rho \int_{-a}^a \varphi(x, 0) dx = \frac{1}{2} \pi \rho V a^2 \quad (48)$$

представляет собой импульс воздействия жидкости на пластинку при ударе. Поэтому в силу закона о количестве движения

$$m(V_0 - V) = \frac{1}{2} \pi \rho V a^2. \quad (49)$$

Здесь V — скорость пластинки после удара,

$$V = \frac{mV_0}{m + \mu'}, \quad (50)$$

где количество

$$\mu' = \frac{1}{2} \pi \rho a^2 \quad (51)$$

является «присоединенной» массой пластинки, ударяющейся о жидкость.

Аналогичная задача, однако несравненно более трудная, решается и для случая удара пластинки о жидкость в бесконечном сосуде конечной глубины h (см. рис. 19).

6

Метод характеристик в теории дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа

При изучении волновых процессов в сплошных средах и решении задач равновесия идеально пластических и сыпучих тел возникает необходимость в решении дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Многие из них представляют собой совокупность двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + b_{12} \frac{\partial v}{\partial y} &= c_1(x, y, u, v), \\ a_{ik} &= a_{ik}(x, y, u, v), \\ a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{21} \frac{\partial v}{\partial x} + b_{22} \frac{\partial v}{\partial y} &= c_2(x, y, u, v), \\ b_{ik} &= b_{ik}(x, y, u, v). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Уравнения (52) вместе с выражением для дифференциалов искомых функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$

$$\left. \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

позволяют составить два линейных соотношения типа

$$\begin{aligned} K(x, y, u, v) du + L(x, y, u, v) dv + M(x, y, u, v) dx + \\ + N(x, y, u, v) dy = 0, \end{aligned} \quad (54)$$

не содержащих производных искомых функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ по их аргументам x и y . Каждое из них справедливо вдоль своего так называемого характеристического направления. Угловые параметры характеристических направлений являются корнями некоторого квадратного уравнения

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2B \frac{dy}{dx} + C = 0, \quad (55)$$

коэффициенты которого A , B и C выражаются через величины a_{ih} и b_{ih} . Таким образом, эти параметры — функции координат x, y (непосредственно и через искомые функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$). Они вещественны, если

$$B^2 > AC. \quad (56)$$

Неравенство (56) и определяет принадлежность совокупности уравнений (52) к гиперболическому типу.

В некоторых случаях дифференциальные соотношения (54) интегрируются, что существенно упрощает задачу. В общем же случае эти соотношения заменяются конечными разностями, пользуясь которыми можно по значениям функций u и v в двух близких точках определить эти функции в месте пересечения двух различных характеристических направлений. Каждое из них проходит через одну из данных точек (рис. 21).

Пример 8. В задаче о давлении штампа на идеально пластическую среду (рис. 22) характеристические направления перпендикулярны друг другу. Соотношения (54) принимают в этом случае следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma + 2Kd\theta &= \frac{K}{r}(dr - dz), \\ d\sigma - 2Kd\theta &= \frac{K}{r}(dr - dz). \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Первое из них справедливо при условии

$$dz = dr \operatorname{tg} \theta, \quad (58)$$

а второе — при

$$dz = -dr \operatorname{ctg} \theta. \quad (59)$$

Функции σ и θ известны на свободной границе пластического полутела, где они соответственно равны $-K$ и $\frac{\pi}{4}$, что позволяет найти их в области криволинейного треугольника ABC . Вблизи точки A угол θ (наклон к оси r биссектрисы между главными направлениями) изменяется

от значения $-\frac{\pi}{4}$ до $\chi - \frac{\pi}{4}$, где

χ — угол между нормалью к поверхности штампа и направлением r . Поэтому из точки A выходит пучок характеристик одного семейства, что и позволяет найти функции σ и θ в области другого криволинейного треугольника ACG .

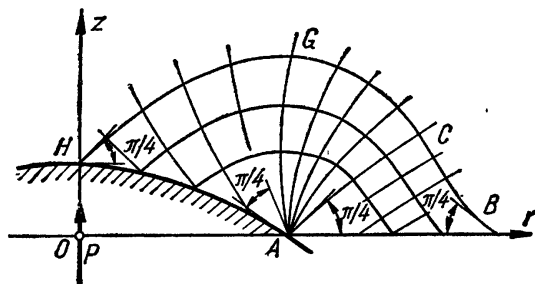


Рис. 22. Характеристики совокупности дифференциальных уравнений гиперболического типа для задачи о пробе Бринелля.

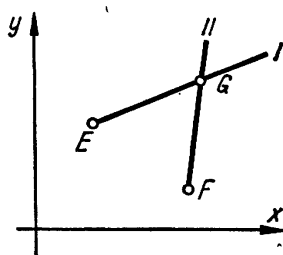


Рис. 21. Характеристики разных семейств.

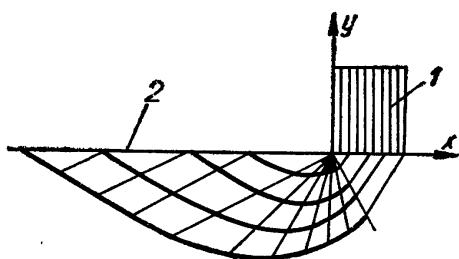


Рис. 23. Характеристики уравнений предельного состояния сыпучего грунта, обладающего внутренним сцеплением:

1 — искомая нагрузка, вызывающая предельное состояние грунта, 2 — свободная поверхность грунта.

В каждой точке гладкой поверхности штампа известно значение функции θ . Построив характеристики в области AGH , можно шаг за шагом найти на этой же поверхности функцию σ , равную полусумме главных напряжений, а следовательно, и каждое из этих напряжений в отдельности, так как их разность равна $2K$. Тем самым находится искомое распределение давления под штампом и сила, погружающая штамп в пластическую среду. Это имеет прямое отношение к так называемой пробе Бринелля, т. е. к определению твер-

дости по размеру отпечатка, образуемого стальным шаром при давлении им на поверхность исследуемого материала.

Пример 9. Другой более простой пример — определение предельной нормальной равномерно распределенной нагрузки (рис. 23) на границу сыпучего тела (обладающего также и внутренним сцеплением). Характеристики, исходящие из точек, где приложена нагрузка суть прямые, и напряженное состояние во всех точках их пересечения одно и то же. От точки, где нагрузка кончается, исходит пучок прямолинейных характеристик, пересекаемых логарифмическими спиралями другого семейства. Под свободной поверхностью характеристики — вновь прямые линии и напряженное состояние однородное. Двигаясь по характеристике от точки свободной поверхности к соответствующей точке, где имеется распределенная нагрузка, можно определить в конечном счете величину последней.

7

Операционное исчисление

Известное преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (60)$$

ставит в соответствие каждой функции действительного переменного $f(t)$ из сравнительно широкого класса функций некоторый ее образ $F(p)$ в плоскости комплексного переменного p . При этом образ производной функции $f'(t)$ представляется, как нетрудно убедиться, формулой

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = pF(p) - f(0). \quad (61)$$

При соблюдении ряда ограничений возможно и обратное преобразование, так называемое обращение Римана — Меллина, позволяющее по образу $F(p)$ восстановить функцию-оригинал $f(t)$.

В результате преобразования Лапласа решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вместе с их начальными условиями приводится к некоторой алгебраической задаче об отыскании рациональной функции параметра p и последующего отыскания оригинала при широком использовании уже готовых таблиц.

Пример 10. Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 2 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 2x = \sin t \quad (62)$$

с начальными условиями $x(0) = 1$, $\frac{dx(0)}{dt} = 0$ и $\frac{d^2x(0)}{dt^2} = 0$ в результате преобразования Лапласа переходит в алгебраическое соотношение

$$(p^3 + 2p^2 + p + 2)X(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + p^2 + 2p + 1. \quad (63)$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{0,24}{p} + \frac{0,76p + 0,48}{p^2 + 1} + \frac{-0,2p + 0,4}{(p^2 + 1)^2}, \quad (64)$$

чему соответствует в конечном счете искомый оригинал

$$x(t) = 0,24e^{-t} + 0,76 \cos t + 0,48 \sin t - 0,1t(\sin t + 2 \cos t). \quad (65)$$

Операционное исчисление успешно применяется и к задачам, содержащим дифференциальные уравнения в частных производных, в ряде случаев сводя их к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Естественно, что последующее отыскание оригинала здесь, как правило, значительно усложняется по сравнению со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример 11. Рассмотрим мгновенную остановку нижней границы бесконечно длинного слоя упруго-вязкой жидкости конечной глубины h , совершающей до этого поступательное движение. Дифференциальное уравнение движения

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (66)$$

в силу закона деформирования

$$\tau + \alpha \frac{\partial \tau}{\partial t} = \mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (67)$$

приводится к так называемому телеграфному уравнению, имеющему вид

$$\alpha \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (68)$$

Преобразование Лапласа этого уравнения с учетом начального условия $v(y, 0) = v_0$ приводит после введения безразмерных величин к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2V}{dy^2} - p(1 + p)V = -p(1 + p)v_0. \quad (69)$$

Его решение при учете граничных условий $V(0) = 0$ и $V'(h) = 0$ имеет вид

$$V = v_0 - v_0 \frac{\operatorname{ch}[(h-y)\sqrt{p(1+p)}]}{\operatorname{ch}[h\sqrt{p(1+p)}]}, \quad (70)$$

чему соответствует оригинал

$$v(y, t) = v_0 - v_0 [Y(y, t) - Y(2h - y, t) + Y(2h + y, t) - Y(4h - y, t) + \dots], \quad (71)$$

где

$$Y(y, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < t, \\ e^{-\frac{y}{2}} + \frac{y}{2} \int_y^t e^{-\frac{\delta}{2}} \frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 - y^2}\right)}{\sqrt{\delta^2 - y^2}} d\delta & \text{при } t > y \end{cases} \quad (72)$$

и

$$I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 - y^2}\right) \quad (73)$$

является бесселевой функцией первого рода. Анализ формулы для оригинала дает возможность сделать следующий вывод: в результате мгновенной остановки нижней границы вверх побежит волна разрыва скорости, которая, многократно отражаясь от верхней и нижней границ, постепенно затухает.

Развитие математических методов в аналитической механике

Теоретическая механика использует математику не только как рабочий аппарат для решения задач, которые требуют применения и развития известных уже методов, но и ставит такие проблемы, для решения которых требуется создание качественно новых методов, что иногда приводит к возникновению новых математических теорий. Известно, например, что к постановке такого важнейшего в начале своем чисто теоретического вопроса, как существование интегралов дифференциальных уравнений, ставшего основой аналитической теории дифференциальных уравнений, Коши подошел при изучении уравнения движения планет в Солнечной системе и первые идеи по этой тематике изложил в мемуаре о небесной механике. Рассмотрение задачи о брахистохроне привело к созданию вариационного исчисления, а обобщение ряда основных понятий механики — скорости, ускорения, момента и работы силы, напряжения и других — было в сущности одной из реальных основ векторного и тензорного анализов. Подобных примеров можно привести много. Новые задачи механики обогащали математику идейным содержанием больше, чем иные абстрактно-формальные по-

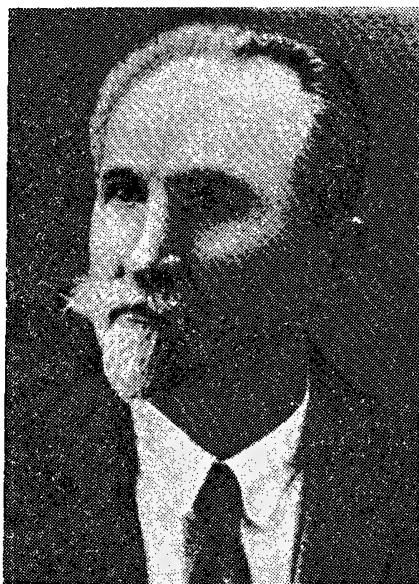
строения в некоторых ее внутренних областях. Для аналитической механики особо важное значение в основном имеют такие разделы математики, как теория дифференциальных и интегральных уравнений, теория функций комплексного переменного, вариационное исчисление, геометрия, приближенные методы, а в последнее время и методы теории вероятностей.

Одним из основных направлений развития аналитической механики в Советском Союзе является неголономная механика. Зарождение неголономной механики связано с именами Лагранжа (1788 г.) и М. В. Остроградского (1838 г.). Фундаментальный вклад в эту область внесли С. А. Чаплыгин, П. В. Воронец и Я. И. Грдина. Существенную роль в развитии неголономной механики сыграли советские математики В. В. Вагнер, В. В. Добронравов, М. Ф. Шульгин, И. С. Аржаных и др.

Большинство работ В. В. Вагнера относится к дифференциальной геометрии неголономных многообразий. Ряд его результатов важен и для изучения свойств механических неголономных систем. Движение механической системы с n степенями свободы можно рассматривать как движение точки в n -мерном пространстве, положение которой определяется обобщенными координатами $p^1, p^2, \dots, p^n$. Пусть X_n — аналитическое n -мерное многообразие, а на систему наложены неголономные линейные связи, аналитически выражающиеся линейными дифференциальными уравнениями

$$\sum_{k=1}^n A_k^r dp_k = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n - m). \quad (74)$$

В таком случае эти условия выражают некоторое неголономное многообразие V_n^m , иначе говоря, совокупность локальных пространств m измерений, отнесенных к каждой точке объемлющего пространства X_n . Следовательно, допустимые траектории данной неголономной механической системы лежат в этом многообразии V_n^m . Ясно, что его геометрические свойства отражаются непосредственно на свойствах движения самой неголономной механической системы.



Я. И. Грдина



В. В. Добронравов.

В. В. Вагнеру принадлежит самая глубокая и подробная разработка геометрии неголономных многообразий (докторская диссертация, 1935 г.). При изучении свойств неголономных многообразий большое значение имеют построенные Вагнером тензор кривизны и тензор неголономности. Тензор кривизны, построенный ранее (1929 г.) Схоутеном, не оправдывал своего названия, так как не характеризовал кривизну V_n^m . Решению этого вопроса посвящена первая часть диссертации. Найденный Вагнером тензор кривизны для V_n^m имел много свойств, напоминающих свойства тензора Римана—Кристоффеля, и некоторым образом был связан с тензором неголономности. Последний был новым понятием и определял видоизменения геометрических характеристик, которые вызываются наличием неголономных связей. Во второй части работы Вагнера рассматриваются различные дополнения метрики V_n^m , в третьей исследуется V_3^2 в трехмерном евклидовом пространстве R_3 . В последующих работах В. В. Вагнер изучал геометрию $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве, и в частности геометрию V_3^2 в X_3 , а также приложение неголономной геометрии к теории конгруэнций прямых и кругов в трехмерном евклидовом пространстве. Затем последовала разработка дифференциальной геометрии нелинейных неголономных многообразий в трехмерном евклидовом пространстве (C_3^2 в R_3 , 1940 г.) и внутренней геометрии нелинейных неголономных пространств (C_n^m в X_n , 1943 г.). В работе (1938 г.) П. К. Рашевского устанавливается факт, что в неголономном многообразии существует такая траектория, которая соединяет любые две его точки. Вместе с тем В. В. Вагнер применил развитую им геометрическую теорию неголономных многообразий к изучению конкретных динамических систем (1941 г.). Он рассмотрел движение твердого тела, подчиненного неголономной связи, по горизонтальной плоскости, т. е. классическую задачу С. А. Чаплыгина, и предложил новый метод ее решения. Рассмотренная им механическая система определяет некоторое неголономное многообразие V_3^2 , имеющее нулевую кривизну, и задача легко сводится к квадратурам. Здесь же Вагнер исследовал задачу о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, подчиненного неголономной связи. Он решил ее для случая, когда центр тяжести тела находится в неподвижной точке и из активных сил на тело действует только сила тяжести. Задача приводится к уравнению Римана.

Исключительное значение развитых В. В. Вагнером геометрических методов изучения неголономных систем состоит в том, что, зная геометрические свойства неголономного многообразия V_n^m , изображающего данную механическую неголономную систему, можно подобрать систему локальных координат так, что интегрирование уравнений движения заметно упростится. Если тензор кривизны неголономного многообразия V_n^m равен нулю, то для V_n^m можно подобрать систему локальных координат таким образом, что все коэффициенты связности в ней будут равны нулю и уравнения движения примут особо простой вид.

Таким образом, исходя из понятий механики была построена по

сути новая геометрическая система, методы которой в свою очередь помогли решить конкретные механические задачи.

В ином плане неголономная дифференциальная геометрия была предметом многочисленных исследований Д. М. Синцова и его учеников Я. П. Бланка, М. А. Николаенко и др. Существенные результаты в области неголономной геометрии получили С. С. Бюшгенс, Н. И. Кованцов и др.

В области механики континуума новое представление о деформировании элемента сплошной среды как результат неголономного преобразования компонент метрического тензора выдвинул (1938 г.) Н. А. Кильчевский. Такой подход связан с современной теорией дислокаций (Л. И. Седов, Кренер, Схоутен и др.). Развитие этой теории привело к одной из физических интерпретаций неримановых пространств: пространства с кручением, или пространства Картана. Исследования были продолжены Н. А. Кильчевским в 1964 г.

Исследования по механике континуума приводят к расширению таких представлений аналитической механики, как механическое действие, и, соответственно, к обобщенным вариационным принципам. Функциональные производные, связанные с обобщенными вариационными принципами, в свою очередь позволяют построить тензор функций кинетических напряжений, тождественно удовлетворяющий однородной системе дифференциальных уравнений механики сплошной среды (Н. А. Кильчевский, В. Н. Ионов, а также Калиский (ПНР)). Существенное развитие тензорный анализ и его приложения к механике сплошной среды получили в работах Л. И. Седова и его сотрудников.

Геометрическая статика в пространстве Лобачевского, а также некоторые вопросы кинематики в гиперболическом пространстве рассмотрены Н. П. Гориным. Им выведены условия равновесия твердого тела, исследован вопрос об инвариантах и дана их геометрическая интерпретация. Интересно его замечание о формулах преобразования сил: в пространстве Лобачевского они могут быть интерпретируемы как формулы преобразования электромагнитного поля в специальном принципе относительности.

Большой вклад в развитие теоретической механики в СССР внес Н. Г. Четаев. Его исследования посвящены аналитической динамике, устойчивости движения, теории дифференциальных уравнений, а также их взаимосвязям. В области аналитической механики он ввел новое определение возможных перемещений, являющееся наиболее общим из всех известных в настоящее время, и предложил ряд оригинальных его видоизменений. Основным его достижением в этой области можно считать разработку схемы аналитической динамики в переменных Пуанкаре. Рассматривая механическую систему с n степенями свободы, стесненную гладкими голономными стационарными связями и находящуюся под действием сил, допускающих силовую функцию, Пуанкаре ввел (1901 г.) n операторов транзитивной группы и получил дифференциальные уравнения движения в новых групповых переменных. Эти уравнения, отличающиеся от уравнений Лагранжа второго рода добавочными членами, содержащими структурные константы группы,



В. В. Румянцев.



Б. В. Булгаков.

которая описывает движение данной системы, были применены при изучении движений твердого тела с полостями, заполненными жидкостью, вокруг неподвижной точки. Таким образом была установлена принципиальная связь методов аналитической динамики с методами теории непрерывных групп. Эти идеи получили широкое развитие в работах казанской математической школы и прежде всего в статьях Н. Г. Четаева (начиная с 1927 г.). Уже в первых работах Четаев рассматривает указанную задачу Пуанкаре, но предполагает при этом связи нестационарными; здесь же он доказывает существование относительного интегрального инварианта первого порядка для уравнений Пуанкаре, приведенных им к каноническому виду. Таким образом, Н. Г. Четаев по существу построил фундамент всей аналитической динамики в групповых переменных. Основные его результаты с некоторыми дополнениями изложены им в статье, опубликованной в 1941 г. Здесь вводится понятие о циклических перемещениях, рассматривается вопрос о решении уравнений движения в групповых переменных, когда группа интранзитивна, и о возможности решения уравнения типа Гамильтона — Якоби в более общих функциях по сравнению с функцией действия. Эти результаты Четаева во многом определили направление дальнейших исследований по динамике механических систем в групповых переменных. К ним примыкает ряд работ М. Ш. Аминова, А. А. Богоявленского и др.

Большое количество исследований посвящено задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, в частности теории гироскопов и гироскопических устройств. В этом направлении работали А. Н. Крылов, Е. Л. Николаи, Б. В. Булгаков, Ю. А. Крутков, А. И. Лурье, А. Ю. Ишлинский и др.

Исходной работой для исследований советских ученых в области механики гироскопических систем явилась монография А. Н. Крылова и Ю. А. Крюткова «Общая теория гироскопов и некоторых их применений» (1932 г.). Теория гироскопов была значительно развита Б. В. Булгаковым в его монографии «Прикладная теория гироскопов» (1939 г.,

2-е изд. — 1955 г.). В дальнейшем в этой области работали Я. Н. Ройтенберг, А. И. Лурье и др.

Устойчивость движения гироскопического потока изучал В. Н. Кошляков. Он исследовал (1959 — 1960 гг.) устойчивое решение соответствующих линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с периодическими коэффициентами. А. Ю. Ишлинский получил (1956—1957 гг.) строгие дифференциальные уравнения прецессионного движения в конечных углах, а также основное условие невозмущаемости двухроторного гирокомаса. Он установил, что уравнения малых движений образуют систему четырех дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Для случая, когда сила тяжести пренебрежимо мало отличается от силы притяжения, ему удалось найти в квадратурах решение этой системы при произвольном движении точки подвеса прибора по поверхности Земли. Значительно сложнее случай возникновения и устойчивости автоколебаний гироскопических стабилизаторов, так как здесь получаются нелинейные системы дифференциальных уравнений высокого порядка. Этот случай исследовали А. Ю. Ишлинский (1958 г.), Я. Н. Ройтенберг (1960 г.), Б. И. Назаров (1963 г.), И. В. Новожилов (1967 г.) и др.



В. Н. Кошляков.

Устойчивость движения твердого тела с жидким наполнением изучал (1959—1965 гг.) В. В. Румянцев.

Большой интерес представляют работы, в которых рассматривается движение гироскопа в кардановом подвесе на подвижном основании, описываемое нелинейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Эти уравнения решались приближенными методами (Д. С. Пельпор, 1959 г.; Я. Л. Лунц, 1960 г.).

Важным вкладом в теорию гироскопического движения является изучение идеальной работы пространственной инерционной системы навигации. Это направление развивали Л. И. Ткачев (1943 г.), И. М. Лисович (1953—1961 гг.), Г. О. Фридендер (1955 г.), В. А. Боднер (1955—1959 гг.), И. Б. Челпанов (1966, 1967 гг.), М. Е. Темченко (1967 г.), В. Н. Калинович (1960—1966 гг.) и др.

Исследование движения гироскопов Чаплыгина и Аппельрота, снабженных присоединенными к ним вращающимися маховиками, проводил Л. Н. Сретенский. Он полностью проинтегрировал (1936 г.) уравнения их движения при определенных условиях, налагаемых на параметры гироскопов.

На протяжении более двух последних столетий внимание исследователей привлекает задача трех и n тел. Первые работы по этой задаче в СССР были выполнены В. А. Стекловым, В. И. Смирновым,

П. В. Воронцом, А. А. Марковым, М. Ф. Субботиным, В. В. Степановым, Н. Д. Моисеевым, Ю. Д. Соколовым и др.

Существенное развитие получила качественная теория траекторий. Цель ее — изучение общих свойств траекторий небесных тел на основании методов, не требующих интегрирования дифференциальных уравнений движения. Н. Д. Моисеев ввел ряд новых так называемых качественных областных характеристик траекторий, таких, как характеристика контактов траектории с кривыми или поверхностями заданного семейства, характеристика устойчивости в смысле Ляпунова и др.

Наибольшее количество работ в этой области принадлежит Ю. Д. Соколову. Им развиты весьма эффективные математические методы. Изучая различные частные виды задачи трех тел, Ю. Д. Соколов нашел случаи, когда соответствующая система дифференциальных уравнений допускает решения в квадратурах. В частности, впервые после Якоби он обнаружил новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений прямолинейной задачи трех тел с равными массами сил взаимодействия. Изучив особые траектории системы свободных материальных точек, взаимно притягивающихся или отталкивающихся с силами, пропорциональными произвольной функции взаимных расстояний, и обобщив ряд теорем, Соколов установил нижнюю границу радиусов сходимости разложений по степеням времени координат точек системы и их производных.

Исследования Ю. Д. Соколова 20-х годов подытожены в его докторской диссертации (1928 г.). В ней сделан полный анализ поведения величин, характеризующих движение трех тел в окрестности момента общего соударения, выяснен характер особых точек на действительной оси интегралов движения, даны важные обобщения теорем Слудского — Вейерштрасса и Дзиобека и др.

Большое значение для общей теории дифференциальных уравнений и ее приложений имели работы Ю. Д. Соколова, относящиеся к исследованию особых точек и траекторий в более общей задаче о движении системы свободных материальных точек под действием сил, зависящих от взаимных расстояний по закону

$$|f(r_{ik})| m_i m_k \quad (75)$$

(где m_i , m_k — массы, r_{ik} — расстояния между i -й и k -й точками). Функция $f(r)$ действительна и голоморфна для всякого действительного $r > 0$ и может иметь особенности на действительной оси только при $r = 0$ и $r = \infty$. При некоторых ограничениях, наложенных на $f(r)$ и ее интеграл, Соколовым сделано обобщение соответственной теоремы Пенлеве, установленной для классического случая, и доказана теорема о минимуме взаимных расстояний трех материальных точек. Очень важны найденные им достаточные условия устойчивости движения системы n материальных точек. Эти и другие важные результаты Ю. Д. Соколова изложены в его работе, опубликованной в 1951 г. В ней исследованы траектории попарного соударения в обобщенной задаче трех тел, взаимодействующих по формуле (75) и при некотором предположении относительно r (гл. II). Итоги цикла работ по исследованию тра-

екторий общего соударения трех материальных точек изложены в гл. III: получены фундаментальные теоремы, обобщающие известные теоремы Слудского, Дзиобека, Зундмана и др. В последней главе поставлен вопрос об изучении задачи n тел в случае неограниченного взаимного удаления их на конечном промежутке времени, найдены условия существования таких движений, а также исследовано поведение искомых функций и их аналитическое представление в окрестности особой точки.

Ряд новых результатов и на их основе новых эффективных методов и простых расчетных формул получен Ю. Д. Соколовым при исследовании фильтрации грунтовых вод.

В 1952 г. Ю. Д. Соколов предложил новый эффективный метод приближенного решения дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, получивший название метода осреднения функциональных поправок. Существовавшие общеизвестные методы приближенного решения были более пригодны для эффективного решения линейных задач. В случае же нелинейных задач требовалось существенное улучшение этих методов. Один из таких новых алгоритмов был предложен Ю. Д. Соколовым. Он нашел широкое применение в области теории упругости, гидро- и газодинамики и других областях механики. Вскоре появились обобщения этого метода и его новые варианты, применимые к тем или иным видам уравнений. В их разработке приняли участие А. Ю. Лучка, Н. С. Курпель, В. Н. Тивончук, Э. А. Чернышенко, Б. Г. Мосолов, Л. Е. Кривошеин и др.

Основные применения простейшего варианта метода осреднения функциональных поправок изложены в монографии Ю. Д. Соколова (1967 г.). Материал монографии методически разработан, содержит большое количество примеров и доступен широкому кругу научно-технических работников.

В последние десятилетия стало заметным проникновение в различные области механики вероятностных методов. Это обусловлено необходимостью учета явлений, которые не могут быть изучены с помощью обычного аппарата, и стало возможным благодаря успешной разработке теории случайных процессов.

Одним из первых объектов применения вероятностных методов были гироскопические устройства. В последние годы выполнен ряд работ, в которых найдены статистические характеристики движения корабля в условиях нерегулярного волнения и нерегулярной качки корабля, позволяющие определить точность приборов. При этом приходилось исследовать системы дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами и преодолевать ряд других трудностей. Важные результаты получены А. Ю. Ишлинским, А. А. Свешниковым, С. С. Рывкиным, Я. Н. Ройтенбергом и др. Так, А. А. Свешников (1961 г. и др.) развил метод исследования линейных динамических систем, находящихся под воздействием нелинейных функций случайных процессов. Он изучил уравнения вида

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t) y = n f[X(t)], \quad (76)$$



А. А. Свешников.

где $X(t)$ — стационарный случайный процесс, а функция $f[X]$ определяет характеристику релейного элемента. Метод Свешникова применим для определения точности гироскопического маятника в условиях нерегулярной качки корабля при наличии сил сухого трения в опорах осей карданова подвеса.

Важные результаты в теории возмущений получены А. Н. Колмогоровым и его учеником В. И. Арнольдом.

Ряд сложных математических задач необходимо было решить в связи с возникновением новой области механики — динамики космического полета, изучающей комплекс вопросов о движении искусственных спутников Земли. При определении параметров орбиты полета спутника надо, например, довольно точно учитывать отклонение поля тяготения

реального геоида от поля тяготения сферы и другие аналогичные факторы. Встали также вопросы о проектировании космических полетов, об управлении полетом космических аппаратов, об изучении вращательных и либрационных движений спутников и возмущающих факторов и др. В связи с этим надо было критически пересмотреть существовавшие средства и методы небесной механики и внести соответствующие изменения и поправки или разработать новые методы, лежащие вне русла традиционной небесномеханической проблематики.

Задачи астродинамики подразделяются на две основные группы: расчет и проектирование орбит, по которым движется центр масс космического аппарата, и исследование движения космических аппаратов вблизи центра масс. Новые математические изыскания применяются здесь, например, для создания такого алгоритма вычисления параметров орбиты, который бы содержал итеративный процесс и одновременно был весьма экономным и обеспечивал как быструю сходимость при малом числе итераций, так и малое время на выполнение каждой итерации. Проектирование орбит связано с учетом ряда противоречивых требований и выбором такой из них, которая лучшим образом удовлетворяла бы всем предъявляемым требованиям. При этом следует анализировать различные варианты, для чего должны быть созданы различные приближенные методики. При решении второй группы вопросов надо учитывать воздействие не только известных, но и малоизвестных факторов. Весьма важной является также проблема влияния жидкого наполнения, поставленная в свое время Н. Е. Жуковским. Разработкой указанных и других проблем этого направления занимаются многие советские ученые, среди них — В. В. Белецкий, Г. Н. Дубошин, А. И. Лурье, Д. Е. Охоцимский, В. А. Сарычев, М. К. Тихонравов.

Тесно связана с динамикой космического полета механика тел переменной массы — наука, созданная русскими учеными в конце XIX — начале XX в. Основополагающими в этой области являются исследования И. В. Мещерского. Идеи Мещерского нашли отражение в работах К. Э. Циолковского, изучавшего конкретные задачи ракетной техники и в связи с этим — прямолинейное движение тел переменной массы.

Теория движения тел переменной массы развивалась далее В. П. Ветчинкиным, Г. Н. Дубошиным, Ю. В. Кондратюком, И. А. Рыным, М. К. Тихонравовым, Ф. А. Цандером, а в более поздний период — С. П. Королевым, А. С. Лапиным, А. Ю. Ишлинским, А. А. Космодемьянским, Ф. Р. Гантмахером, Л. М. Левиным, Д. Е. Охоцимским.

Изучая дифференциальные уравнения движения двух тел, массы которых суть данные непрерывные положительные функции времени, Г. Н. Дубошин разработал (20-е годы) общий метод их решения для произвольного вида функции $f(t)$, основанный на изучении некоторого вспомогательного интегро-дифференциального уравнения. Решение этого уравнения строится с помощью рядов, расположенных по возрастающим степеням малого параметра. Дубошин доказал, что в случае убывающей массы орбита имеет вид развертывающейся эллиптической спирали, а в случае возрастающей массы — свертывающейся спирали.

Первая попытка получить общие теоремы для тел переменной массы (когда воздействие отпавших частиц на основное тело не учитывается) была сделана (1946 г.) А. А. Космодемьянским. Вместе с учениками он проводил в Московском университете исследования по вариационным методам для решения задач динамики точки переменной массы. Основная идея применения этих методов состоит в следующем. В простейшем случае прямолинейного движения точки переменной массы уравнение Мещерского имеет вид

$$M \frac{dv}{dt} = -Mg \sin \theta - Q_1 - \frac{dM}{dt} v_r, \quad (77)$$

где M — масса точки в данный момент времени, Q_1 — сила сопротивления среды, θ — угол наклона траектории к горизонту, v_r — относительная скорость исчезания частиц. Если считать $M = M_0 f(t)$, а $\frac{Q_1}{M_0} = Q$, где $f(0) = 1$, то уравнение (77) можно записать в виде

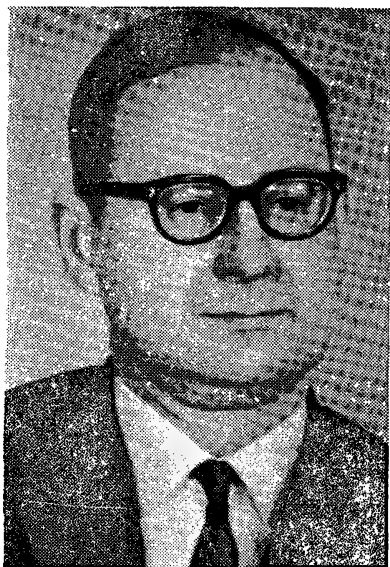
$$f \frac{dv}{dt} = -fg \sin \theta - Q - \frac{df}{dt} v_r. \quad (78)$$

Так как $\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds}$ и $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{df}{dv} v \frac{dv}{ds}$, то из уравнения (75) следует

$$s = \int_{v_1}^{v_0} \frac{(f + f' v_r) v dv}{fg \sin \theta + Q}, \quad (79)$$

а также

$$t = \int_{v_1}^{v_0} \frac{(f + f' v_r) dv}{fg \sin \theta + Q}. \quad (80)$$



Д. Е. Охожимский.

А. Ю. Ишлинский. Он предложил также для случая однородной атмосферы замену переменных, приводящую к простейшей задаче вариационного исчисления. Позднее (1951 г.) А. А. Космодемьянский установил, что если абсолютные скорости отбрасывания частиц равны нулю и внешние силы, действующие на тело переменной массы, имеют потенциал, то канонические уравнения движения для тела переменной массы имеют точно такую же форму, как и для тела постоянной массы. Он подробно рассмотрел абсолютное движение центра инерции тела переменной массы, а также доказал общие теоремы механики тел переменной массы для случая, когда центр масс не перемещается внутри тела. Исследования в этой области подытожены в монографии А. А. Космодемьянского «Динамика космического полета» (1964 г.). Особое внимание в ней уделено исследованию оптимальных режимов движения летательных аппаратов классическими методами вариационного исчисления. В ряде случаев классические методы вариационного исчисления позволили из бесконечного разнообразия всевозможных режимов движения, определяющихся, как правило, нелинейными дифференциальными уравнениями, выделить «опорные» движения, для которых нелинейные уравнения динамики интегрируются в квадратурах.

Представители другого направления в механике переменной массы для вывода теоремы количества движения и кинетического момента в случае тела переменной массы исходят непосредственно из законов изменения главного вектора количества движения и кинетического момента для некоторой системы частиц постоянной массы. Такова точка зрения Ф. Р. Гантмахера и Л. М. Левина, В. С. Новоселова и др. В. С. Новоселов построил (1959 г.) также неголономную механику тел переменной массы.

Рассмотрев интегралы (79) и (80), можно поставить и решить задачи об определении оптимальных режимов движения, при которых достигается максимальная высота или в минимальное время заданная высота.

В случае криволинейного движения уравнение (77) — одно из естественных уравнений движения (в проекции на касательную к траектории). Уравнение в проекции на главную нормаль дает дополнительное соотношение (дополнительную связь). Вариационные задачи такого рода решаются с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа.

Задача о максимальной высоте подъема ракеты в неоднородной атмосфере была решена (1946 г.) Д. Е. Охожимским. Оригинальную трактовку гипотезы К. Э. Циолковского о постоянстве относительной скорости отбрасывания частиц дал (1946 г.)

С середины 50-х годов аналитическая механика точки и тела переменной массы развивается главным образом в более общей постановке, учитывается одновременно отделение и присоединение частиц. В этом направлении существенные результаты получили В. Ф. Кротов, В. А. Шувалов, В. А. Сапа, В. М. Карагодин и др. В последнее время развиваются методы решения вариационных задач динамики летательных аппаратов в неклассической постановке. Принципиальное значение имеют работы (1962 г.) Л. С. Понтрягина и его сотрудников. Важные результаты получены также В. Ф. Кротовым, Б. И. Рабиновичем, Д. Е. Охочимским, Т. М. Энеевым, В. А. Егоровым и др.



А. А. Космодемьянский.

Теория колебаний охватывает различные явления: механические, оптические, электрические, акустические и др. Но при всем этом она обладает единством метода изучения предмета. Открытие новых явлений в физике поставило задачу изучения нового класса проблем в теории колебаний — нелинейных колебаний. Для решения этих проблем требовалась разработка нового математического аппарата. Поэтому с середины 20-х годов исследования в области теории колебаний ведутся в основном по двум направлениям: 1) дальнейшее усовершенствование и развитие линейной теории, 2) изучение нелинейных колебаний (нелинейная механика).

В 20—30-е годы в Советском Союзе сложились в основном две школы исследования нелинейных колебаний — московско-горьковская (А. А. Андронов, Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси) и киевская (Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов). В дальнейшем объем исследований значительно увеличился, и в настоящее время эта теория разрабатывается во многих научных центрах страны.

Линейная теория развивалась в направлении совершенствования некоторых ее технических применений. Это в первую очередь исследование задачи о вынужденных колебаниях. Так, задачей о динамическом продольном изгибе занимались И. М. Рабинович (1947 г.), А. Ю. Ишлинский и М. А. Лаврентьев (1949 г.). Ими рассмотрена задача о внешнем приложении продольной сжимающей силы постоянной величины. Случай действия возмущающей силы переменной частоты изучался А. П. Филипповым (1958 г.) и др.

Задача о синтезе упругих систем, обладающих заданной формой вынужденных колебаний, рассмотрена в работах (1958—1967 гг.) Г. И. Джанелидзе, И. И. Блехмана, К. Ш. Ходжаева, В. И. Полякова. Разработаны приближенные методы решения линейных задач теории колебаний, основанные на вариационных принципах (Л. В. Канторович, 1948—1956 гг.; С. Г. Михлин, 1948—1956 гг.; М. А. Красносель-

ский, 1956—1960 гг.), методы операционного исчисления (А. И. Лурье, 1938 г.; Я. Г. Пановко, 1941 г.), методы интегральных уравнений (Я. Л. Нудельман, 1949 г.; И. А. Биргер, 1956 г.), методы матричного исчисления (А. П. Филин, 1961—1967 гг.; А. Ф. Смирнов, 1958 г.).

С теорией колебаний и теорией устойчивости тесно связаны проблемы теории автоматического регулирования. В последние десятилетия образовалась новая отрасль механики, обогащенная новыми математическими идеями. Рассмотрим математическую сторону работ (с 1946 г.) А. А. Андропова.

Изучая процессы, происходящие в простейшей модели часов и лампового генератора, А. А. Андронов получил хотя и нелинейные, но простые дифференциальные уравнения, проинтегрировал их и построил полную картину интегральных кривых на фазовой плоскости. Он заметил тождество полученных замкнутых кривых с предельными циклами Пуанкаре, т. е. с замкнутыми интегральными кривыми нелинейного дифференциального уравнения, к которым асимптотически приближаются соседние интегральные кривые. И Пуанкаре, открывший и исследовавший предельные циклы (1881 г.), и другие математики, занимавшиеся затем качественной теорией дифференциальных уравнений, не усматривали какой-либо связи предельных циклов с физическими явлениями. Впервые связь так называемых устойчивых предельных циклов с процессами генерации колебаний была установлена (1927 г.) Андроновым. Он также заметил связь теории генерации колебаний и теории устойчивости Ляпунова и показал, что движение, отображаемое устойчивым предельным циклом, соответствует типу устойчивости по Ляпунову.

Незатухающие колебания, генерируемые системами, обладающими трением, А. А. Андронов назвал автоколебаниями. Он дал этому понятию также математическое определение: автоколебания — это движения, отображаемые на фазовой плоскости (в случае систем с одной степенью свободы) устойчивыми предельными циклами. Таким образом, Андронову удалось связать теорию автоколебаний с качественной теорией дифференциальных уравнений и общей теорией устойчивости движения. Итоги пятилетних исследований в этом направлении, а также ряд новых проблем были изложены в работе А. А. Андропова, опубликованной в 1933 г.

Схему плодотворной идеи, лежащей в основе подхода Андропова к изучению дифференциальных уравнений, описывающих колебательный процесс, можно изложить так. Соответственно данному уравнению (А) строится другое, более простое уравнение (В) так, что при изменении входящего в него параметра оно может перейти в (А). Тогда поведение интегральных кривых уравнения (В) определенным образом дает представление о поведении интегральных кривых уравнения (А). Зная характер изменения семейства интегральных кривых соответственно параметру (которое происходит не всегда непрерывно), можно установить законы появления, исчезновения или взаимоперехода особых точек, предельных циклов и некоторых других характерных кривых (сепарат-

рис), описывающих поведение системы на фазовой плоскости. Это так называемый эмбриологический подход.

Изложенную схему А. А. Андронов совместно со своими учениками применил к основным нелинейным задачам радиофизики. Он также показал, что для количественного расчета автоколебаний, близких по своей форме к синусоидальным, можно применить метод разложения в ряд по степеням малого параметра. Благодаря этому (Г. С. Горелик, 1955 г.) была разработана теория явлений, не поддававшихся ранее изучению обычными методами. С помощью этого метода А. А. Андронов, Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси разработали теорию открытого ими так называемого явления резонанса n -го рода (т. е. явления резонанса недовозбужденного лампового генератора, находящегося под действием внешней э. д. с. частоты, кратной его собственной частоте). Основное значение метода малого параметра Андронов усматривал в возможности связать естественным образом задачу о приближенном вычислении периодических решений с качественной теорией дифференциальных уравнений. Применение качественной теории дифференциальных уравнений и связанных с ней топологических методов к исследованию нелинейных колебаний является одной из главных его заслуг.

А. А. Андронов не только остроумно применял к физике колебаний уже известные математические методы, но и занимался непосредственно дальнейшей разработкой качественной теории дифференциальных уравнений. Так, вместе с Л. С. Понтрягиным он разработал (1937 г.) весьма плодотворную и давно привлекавшую его идею о грубых системах.

Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (81)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — аналитические функции по x, y , а также система

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) + p(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) + q(x, y), \quad (82)$$

где p и q — также аналитические функции. Система (81) называется грубой в области G , если для любого $\eta > 0$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что для всех аналитических функций $p(x, y)$ и $q(x, y)$, удовлетворяющих в G условиям

$$\left. \begin{aligned} |p(x, y)| < \varepsilon, \quad |q(x, y)| < \varepsilon, \quad |p'_x(x, y)| < \varepsilon, \\ |p'_y(x, y)| < \varepsilon, \quad |q'_x(x, y)| < \varepsilon, \quad |q'_y(x, y)| < \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (83)$$



Г. И. Джанелидзе.



А. Г. Майер.

машины с центробежным регулятором при наличии сухого трения в его муфте — А. А. Андронову и А. Г. Майеру удалось решить (1947 г.) лишь благодаря разработке сильного математического метода для решения обширного класса нелинейных задач (с кусочно-линейными характеристиками) в трех- и четырехмерном фазовых пространствах. Это так называемый метод преобразования поверхности в поверхность (для трехмерного фазового пространства) и пространства в пространство (для четырехмерного фазового пространства). Он является обобщением метода преобразования прямой в прямую, с помощью которого Андроновым в одной из его ранних работ была найдена связь между автоколебаниями и предельными циклами. С помощью нового метода успешно решены новые конкретные задачи. В частности, А. А. Андронов и его ученик Н. Н. Баутин нашли (1944 г.) решение нелинейной трехмерной задачи о движении самолета, снабженного автопилотом.

Уделяя основное внимание разработке учения о нелинейных колебаниях, А. А. Андронов должным образом оценивал роль и значение линейной теории колебаний как для радиотехники, так и для теории автоматического регулирования. И в этом направлении его школой выполнены важные исследования.

Исследования в области автоматического регулирования развивались и в других направлениях. В 1948 г. А. И. Лурье предложил каноническую форму уравнений системы регулирования. Позднее эти его исследования развивались им самим, Ю. И. Неймарком (1955, 1956 гг.), А. А. Малининым (1955 г.) и др. В 1951 г. А. И. Лурье начал разработку применения метода функций Ляпунова к задаче об устойчивости нелинейных систем регулирования. В дальнейшем это направление было продолжено рядом советских ученых, в частности М. А. Айзер-

существует топологическое отображение области G самой в себя, которое имеет следующие свойства: а) соответствующие точки находятся на расстоянии не более чем η ; б) точки одной и той же траектории первой системы соответствуют точкам, принадлежащим одной и той же траектории второй системы, и наоборот. Андронов и Понтрягин дали полную характеристику грубых систем, рассмотрев области, границы которых суть циклы без контакта, при некоторых предположениях о характеристических показателях предельных циклов и свойствах сепаратрис. Несколько позднее (1939 г.) А. А. Андронов и Е. А. Леонтович расширили класс грубых систем, введя понятие грубости различных порядков.

Весьма важную задачу теории автоматического регулирования — для паровой

маном и Ф. Р. Гантмахером (1963 г.), В. А. Якубовичем (1962—1963 гг.).

В последние годы теория автоматического регулирования начала проникать в различные области технических наук, механики и математики, используя в то же время для решения своих задач методы, заимствованные из различных областей математики, кибернетики. Например, для исследования некоторых классов регулируемых систем, систем, описывающихся линейными дифференциальными уравнениями, применены методы линейной алгебры и функционального анализа. Г. В. Щипанов выдвинул (1939 г.) идею инвариантности в системах регулирования; соответствующий математический аппарат был разработан (1940, 1946 гг.) Н. Н. Лузиным. Инвариантные системы автоматического регулирования были построены В. С. Кулебакиным (1948 г.), Б. Н. Петровым (1955, 1959, 1961 гг.) и Г. Н. Улановым (1954, 1961 гг.), теория инвариантности развита в работе А. И. Кухтенко (1961 г.).



Б. Н. Петров.

Математические методы в механике твердого деформируемого тела

В механике твердого деформируемого тела широко применяются теория обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, теория интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, различные вариационные методы, метод интегральных преобразований, вероятностные и статистические методы, численный анализ и приближенные методы, теории аналитических и специальных функций, геометрические методы, тензорное исчисление и многие другие математические теории и методы.

Наряду с бесспорной практической важностью проблемы теории упругости и пластичности с математической точки зрения оказываются весьма типичными для математической физики в целом. Многие весьма общие математические методы были разработаны непосредственно в трудах советских механиков по упругости и пластичности. Таким, например, является широко распространенный и весьма эффективный метод решения операторных уравнений, известный под названием метода Бубнова — Галеркина. Теория интегралов типа Коши, развитая Н. И. Мусхелишвили при исследовании плоских задач теории упругости, в дальнейшем была положена в основу общей теории сингулярных интегральных уравнений и теории краевых задач Римана — Гильберта.



В. З. Власов.

Основную роль в исследованиях по механике твердого деформируемого тела играет теория дифференциальных уравнений, так как большинство задач механики математически формулируется с помощью линейных или нелинейных дифференциальных уравнений. Как известно, полная система уравнений, характеризующая статическое или динамическое состояние упругости тела, находящегося под действием заданных внешних сил и при заданных краевых и начальных (в случае движения) условиях, содержит 15 нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с 15 неизвестными функциями (три компонента перемещений, шесть компонентами напряжений и шестью компонентами деформации). Найти решение указанной задачи теории упругости в общем виде не представ-

ляется возможным. Эффективные результаты можно получить лишь в частных случаях при введении тех или иных упрощающих гипотез относительно геометрических и физических характеристик упругого тела. В частности, при наложении определенных условий на геометрические и физические факторы (величину удлинений, сдвигов и углов поворота, физические свойства материала) удастся линеаризовать задачу и тем самым значительно упростить ее решение.

Уравнения классической теории упругости можно получить из уравнений общей упругости путем 1) пренебрежения всеми нелинейными членами в формулах для компонентов деформации и в уравнениях равновесия объемного элемента тела; 2) принятия линейной формы связи между напряжениями и деформациями (т. е. закона Гука). Первое допущение равносильно предположению о том, что удлинения, сдвиги и углы поворота пренебрежимо малы по сравнению с единицей и что, кроме того, квадратами и произведениями углов поворота можно пренебречь по сравнению с удлинениями и сдвигами. Что касается второго допущения, то для большинства материалов можно указать такую достаточно малую область удлинений и сдвигов, в пределах которой закон Гука соблюдается. Эти уравнения можно существенно упростить, приняв некоторые дополнительные допущения, вытекающие из характера геометрии тела и условий нагружения. Например, введение гипотезы Кирхгофа — Лява в теории тонких оболочек позволяет свести трехмерные задачи к двумерным.

Определить напряженное состояние тонкой упругой оболочки на основе решения полной (не упрощенной) системы дифференциальных уравнений удалось лишь для осесимметрично деформированных оболочек вращения, определенных типов круговых цилиндрических, а также сферических оболочек. Существенные результаты в решении этого вопро-

са принадлежат А. А. Гвоздеву (1932 г.), В. В. Соколовскому (1937 г.), А. И. Лурье (1947 г.), В. З. Власову (1949 г.), В. М. Даревскому (1951 г.), В. В. Новожилову (1946 г.), И. Н. Векуа (1952 г.). Если напряжения по толщине оболочки распределяются равномерно, то в дифференциальных уравнениях можно отбросить моменты (безмоментная теория). При этом достигается понижение порядка системы уравнений. Дифференциальные уравнения упрощаются также в случае, когда деформации, перемещения, усилия и моменты быстро затухают при удалении от линии искажения (простой краевой эффект). Некоторые величины, входящие в дифференциальные уравнения, становятся пренебрежимо малыми для цилиндрических оболочек большой и средней приведенной длины, а также для пологих оболочек. Приближенную систему дифференциальных уравнений в теории оболочек можно получить и в случае большой изменяемости напряженных состояний.

Решение проблемы интегрирования приближенных вариантов линеаризованной системы дифференциальных уравнений тонких оболочек связано с применением методов теории поверхностей, теории функций комплексного переменного, теории обобщенных аналитических и других специальных функций, методов асимптотического интегрирования и др. Для интегрирования дифференциальных уравнений нелинейной теории оболочек привлекаются методы последовательных приближений, метод малого параметра, вариационные и численные методы. Приближенные методы нелинейной теории оболочек удается обосновать (доказать теоремы существования и единственности решения, сходимости процесса построения решения) с помощью функционального анализа. Развитию приближенных методов решения задач теории оболочек посвящены работы И. Я. Штаермана (1924 г.), В. З. Власова (1933—1955 гг.), Х. М. Муштари (1938—1957 гг.), А. Л. Гольденвейзера (1939—1959 гг.), Д. Ю. Панова (1939 г.), В. В. Соколовского (1943 г.), А. И. Лурье (1946, 1947 гг.), Ю. Н. Работнова (1945, 1946 гг.), Н. А. Алу-мяз (1949—1955 гг.), К. З. Галимова (1950—1957 гг.), И. Н. Векуа

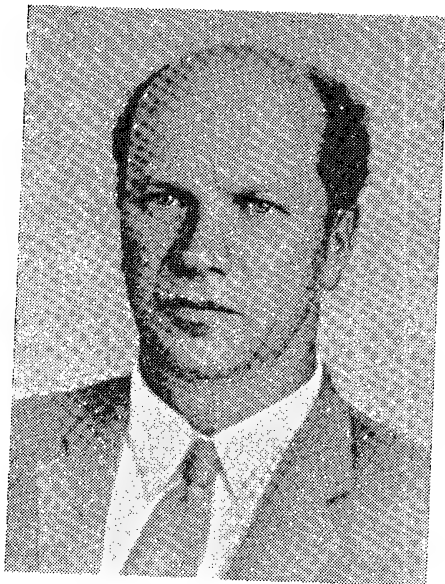


И. Я. Штаерман.



Х. М. Муштари.

с помощью функционального анализа. Развитию приближенных методов решения задач теории оболочек посвящены работы И. Я. Штаермана (1924 г.), В. З. Власова (1933—1955 гг.), Х. М. Муштари (1938—1957 гг.), А. Л. Гольденвейзера (1939—1959 гг.), Д. Ю. Панова (1939 г.), В. В. Соколовского (1943 г.), А. И. Лурье (1946, 1947 гг.), Ю. Н. Работнова (1945, 1946 гг.), Н. А. Алу-мяз (1949—1955 гг.), К. З. Галимова (1950—1957 гг.), И. Н. Векуа



А. А. Ильюшин.



Х. А. Рахматулин.

вые рассмотрел (1945 г.) задачи о распространении упруго-пластических волн и обнаружил существование волны нового типа — волны разгрузки. Им впервые решены некоторые динамические задачи теории малых упруго-пластических деформаций с помощью дифференциальных уравнений в частных производных. К распространению пластических волн относится также ряд работ Г. С. Шапиро и Ф. А. Бахшияна.

(1952—1959 гг.), С. А. Тумаркина (1952—1960 гг.), И. И. Воровича (1955—1958 гг.), А. С. Вольмира (1956—1959 гг.) и др.

А. А. Ильюшину принадлежит разработка (1943—1948 гг.) весьма эффективного общего метода решения системы дифференциальных уравнений статики упруго-пластического тела, названного методом упругих решений. По существу — это метод последовательных приближений, в котором в качестве первого приближения принимают упругое деформированное состояние. Ильюшин также составил (1940 г.) систему дифференциальных уравнений вязко-пластического течения несжимаемого вещества для случая плоской деформации и создал теорию устойчивости пластин и оболочек за пределами упругости.

Метод дифференциальных уравнений является одним из основных в построении теории распространения волн в упругой среде. Как известно, теория упругих волн имеет особенно большое значение в исследовании сейсмических колебаний. В развитие этой теории значительный вклад внесен советскими учеными — В. И. Смирновым, С. Л. Соболевым, С. А. Христиановичем, Х. А. Рахматулиным, В. Г. Гоголадзе. С. Л. Соболев исследовал (1930 г.) распространение упругих волн в неоднородной среде и построил новую теорию интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. В. Г. Гоголадзе (1934, 1935 гг.) обобщил результаты С. Л. Соболева на случай неоднородной анизотропной среды, а С. А. Христианович, (1937 г.) — для широкого класса нелинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа. Х. А. Рахматулин впер-

Огромную роль в механике твердого деформируемого тела играют методы теории аналитических функций, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Впервые применил (1908 г.) аналитические функции комплексного переменного к плоской задаче теории упругости и получил, наряду с некоторыми важными общими результатами, решение ряда конкретных, трудных по тому времени задач Г. В. Колосов. Н. И. Мусхелишвили, продолжая (1922—1966 гг.) исследования Г. В. Колосова, сформулировал проблемы теории функций комплексного переменного, к которым сводятся основные и некоторые специальные смешанные плоские задачи теории упругости³. Оказывается, что функция комплексного переменного w , определяющая поле перемещений плоского деформированного состояния, может быть представлена в виде



Д. И. Шерман.

$$w = \frac{1}{2\mu} [\kappa \varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}],$$

где $w = u + iv$, u , v — компоненты вектора перемещения, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ — аналитические произвольные функции в рассматриваемой области, $\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$, λ , μ — постоянные Ламэ. При исследовании плоской задачи теории упругости получил развитие метод интегральных уравнений (Д. И. Шерман, 1962 г.). Н. И. Мусхелишвили, используя функцию, осуществляющую конформное отображение на круг односвязной области, занимаемой упругой средой, свел (1920—1936 гг.) основные плоские задачи теории упругости к всегда разрешимым интегральным уравнениям Фредгольма. Весьма изящным образом получил (1926 г.) всегда разрешимое интегральное уравнение Фредгольма для первой основной задачи, предполагая, что среда заполняет конечную односвязную область, В. А. Фок.

Н. И. Мусхелишвили предложил (1919—1933 гг.) для любой конечной или бесконечной многосвязной среды интегральные уравнения Фредгольма с ядрами, выраженными через элементарные функции. Д. И. Шерман с помощью методов теории потенциала получил (1934, 1935 гг.) для основных плоских задач в случае многосвязной области интегральные уравнения, близкие по структуре ядер к уравнениям Н. И. Мусхелишвили, но значительно более удобные в практических расчетах. С. Г. Михлин, используя так называемую комплексную функцию Грина, привел (1935 г.) основные плоские задачи теории

³ Н. И. М у с х е л и ш в и л и. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.



А. С. Космодамианский.

упругости для многосвязной среды к интегральному уравнению Фредгольма.

В указанных исследованиях используется требование гладкости контура области, занятой упругой средой. Интегральные уравнения для плоских задач, применимые в случае областей с угловыми точками, получены Л. Г. Магнарадзе (1938 г.) и С. М. Белоносовым (1950—1962 гг.). Л. Г. Магнарадзе обобщил интегральные уравнения Н. И. Muskhelishvili на случай произвольного многосвязного контура с любыми угловыми точками, отличными от точек возврата. При этом интегралы в уравнениях Л. Г. Магнарадзе понимаются в смысле Стильтьеса. С. М. Белоносов, сочетая метод интегралов типа Коши, разработанный Н. И. Muskhelishvili, с методом конформного отображения данной области на полуплоскость и по-

следующим применением интегрального преобразования Фурье — Лапласа, свел основные плоские задачи теории упругости к интегральному уравнению

$$\kappa u(x) + \int_0^{\infty} y K(x+y) \overline{u(y)} dy = f(x),$$

где $0 < x < \infty$, $f(x)$ — заданная функция, зависящая от граничных данных, ядро $K(x+y)$ зависит от контура области, κ — постоянная. Интеграл в приведенном уравнении понимается в смысле Римана.

Весьма эффективные практические приемы решения плоских задач теории упругости разработаны (1936—1951 гг.) Г. Н. Савиным для случая односвязных областей (включая области с угловыми точками)⁴. В работах (1965—1968 гг.) С. Г. Лехницкого, Г. Н. Савина и Д. И. Шермана развиты методы определения концентрации напряжений около отверстий в анизотропных и изотропных пластинах. Г. Н. Савин поставил и решил (1936 г.) вопрос о влиянии закруглений отверстий на концентрацию напряжений.

В последние годы Г. Н. Савиным, А. С. Космодамианским, А. Н. Гузем и другими предложены и разработаны (1960—1968 гг.) приближенные методы решения задач о концентрации напряжений около отверстий в оболочках и пластинах. Основу этих методов составляют введение функций комплексного переменного специальной структуры в виде степенных рядов и различных модификаций теории возмущений, а также использование следствий теорем сложения цилиндрических и сфери-

⁴ Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. Изд-во АН СССР, М., 1951.

ческих функций с последующим сведением краевых задач к бесконечным системам алгебраических уравнений. Доказано, что полученные бесконечные системы являются квазирегулярными. Эти методы развиты для односвязных и многосвязных оболочек и пластин, для нелинейных динамических задач, задач, в которых учитывается действие температуры, и др. Г. Н. Савин, С. М. Белоносов и С. П. Гавели свели (1964—1968 гг.) задачи о концентрации напряжений около отверстий в оболочках к контурным интегральным уравнениям.

Г. Н. Савин и О. А. Горошко разработали (1958—1964 гг.) методы решения интегро-дифференциальных и дифференциальных уравнений задач динамики (не вполне упругой нити переменной длины применительно к шахтному подъему). Специфической особенностью этих задач является зависимость границы области от времени. Г. Н. Савин, Г. А. Ван Фо-Фы, А. Н. Гузь и Л. П. Хорошун развили (1961—1968 гг.) методы решения правильных задач теории композитных слоистых и волокнистых материалов упорядоченной периодической структуры.

В работах В. В. Болотина, Г. Н. Савина, Л. П. Хорошуна и Г. О. Шермергора и ряда других авторов получили развитие (1963—1969 гг.) приближенные методы механики стохастически армированных композитных материалов. А. И. Лурье и А. Н. Гузь (1967—1969 гг.) усовершенствовали некоторые методы решения краевых задач трехмерной теории устойчивости деформирования упругих тел. И. Н. Векуа успешно использовал (1937—1959 гг.) методы аналитических функций и интегральных уравнений для исследования широкого класса задач математической физики, включающего плоские задачи о колебаниях упругих тел и задачи о деформации упругих оболочек.

Метод интегральных и интегро-дифференциальных уравнений Сомильяна применительно к решению задач теории оболочек развивался (1939—1963 гг.) Н. А. Кильчевским. Соответствующие уравнения можно получить либо на основании теоремы о взаимности работ, либо путем непосредственного обращения дифференциальных уравнений краевых задач теории оболочек в интегральные и интегро-дифференциальные. Пользуясь теорией обобщенных функций, можно доказать правомерность операций над фигурирующими в этом методе сингулярными функциями. Для решения уравнений применяют главным образом конечноразностный метод, в результате чего получают систему линейных алгебраических уравнений. Метод интегральных и интегро-дифференциальных уравнений решения сложных задач теории оболочек



Н. А. Кильчевский.



Б. Г. Галеркин.

в ряде случаев имеет некоторые преимущества перед методом дифференциальных уравнений.

К интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям приводятся, как показывают многочисленные исследования советских ученых, различного рода задачи о распространении волн в упругой среде. К этому направлению относятся работы В. И. Смирнова (1932—1937 гг.), С. Л. Соболева (1932—1953 гг.), В. Д. Купрадзе (1934—1945 гг.), С. Г. Михлина (1940—1947 гг.), Г. И. Петрашеня (1945, 1946 гг.), Д. И. Шермана (1945—1947 гг.), И. Н. Векуа (1948 г.) и др. В. И. Смирнов и С. Л. Соболев предложили (1932 г.) метод функционально-инвариантных решений волнового уравнения, позволяющий найти решение широкого класса задач о распространении упругих волн с помощью

теории функций комплексного переменного.

Пространственные (трехмерные) задачи теории упругости относятся к наиболее трудному в математическом отношении классу линейных задач механики твердого деформируемого тела. Только этим, по-видимому, следует объяснить тот факт, что количество решенных пространственных задач теории упругости к настоящему времени крайне ограничено.

Советским ученым принадлежат фундаментальные результаты в области пространственной теории упругости. В первую очередь следует отметить работы по общим формам представления решения уравнений равновесия изотропной упругой среды. Б. Г. Галеркин выразил (1931 г.) решение уравнений равновесия теории упругости через три бигармонические функции, П. Ф. Папкович представил (1932 г.) общее решение в более простой форме через четыре гармонические функции и указал возможность сокращения их числа до трех функций. В работах М. Г. Слободянского (1938, 1954 гг.), Л. Н. Тер-Мкртчяна (1944, 1947 гг.), К. В. Соляника-Крассы (1957 г.) и других авторов даны некоторые общие формы представления решения уравнений равновесия. Ю. А. Крутков (1949 г.) и В. И. Блох (1950 г.), исходя из построенного ими тензора функций напряжений, показали, что существует связь между различными формами общих решений. В отечественных и зарубежных исследованиях чаще всего используется решение Папковича.

Различные общие формы решений — весьма полезный математический прием интегрирования уравнений равновесия теории упругости. Но при решении краевых задач теории упругости основные трудности возникают на последнем этапе, при удовлетворении краевых условий. Пока еще не разработаны эффективные аналитические и численные методы для преодоления этих трудностей в случае областей произвольной

геометрической формы. Однако для ограниченного класса канонических областей, где решение краевых задач теории потенциала строится в явном виде с помощью метода Фурье, можно построить точные аналитические решения и пространственных задач теории упругости (А. И. Лурье, Я. С. Уфлянд, Л. А. Галин, Б. Г. Галеркин, Г. С. Шапиро, К. В. Соляник-Красса и др.). Эти исследования подытожены в монографиях А. И. Лурье (1955 г.) и Я. С. Уфлянда (1963 г.).

Метод Фурье в пространственных задачах теории упругости приобретает новые существенные черты, не характерные для классической его трактовки. Так, в случае тел «конечных размеров» собственные значения и соответствующие им собственные функции являются комплексными. Условия ортогональности для них не выполняются. А. И. Лурье (1942, 1943, 1955 гг.) и В. К. Прокоповым (1949 г.) такие решения названы однородными. И. И. Ворович показал (1966 г.), что базисные свойства однородных решений связаны с классическими результатами (1951 г.) М. В. Келдыша по n -кратной полноте собственных элементов несамосопряженных операторов. Им также проведен асимптотический анализ однородных решений. Возможен и другой прием построения полной системы вещественных собственных функций на поверхности тел «конечных размеров»: она составляется из подсистем, каждая из которых ортогональна лишь на части границы. Такой подход использован в работах Н. Х. Арутюняна и Б. Л. Абрамяна (1954, 1963 гг.) и др.

В связи с постановкой и решением новых смешанных (контактных) задач теории упругости советскими учеными в последние годы развития теории парных интегральных уравнений (Н. Н. Лебедев, 1957 г.; Я. С. Уфлянд, 1958, 1967 гг.; Н. Х. Арутюнян и Б. Л. Абрамян, 1964 г., и др.).

Все указанные исследования основаны на развитии классического метода Фурье в пространственных задачах теории упругости. К этому направлению следует отнести и важный цикл исследований (1950—1969 гг.) по динамическим задачам теории упругости Г. И. Петрашеня.

Другой метод решения пространственных (в первую очередь, осесимметричных) задач теории упругости основан на сведении их к краевым задачам для аналитических и обобщенных аналитических функций. В работах (1957, 1965 гг.) Г. Н. Положего осесимметричные задачи теории упругости формулируются с помощью двух p -аналитических функций в виде формул, аналогичных формулам Колосова — Мусхелишвили. Указаны операторы, которые в ряде случаев позволяют привести осесимметричные задачи к краевым задачам для аналитических функций комплексного переменного. А. Я. Александровым найдены (1959, 1968 гг.) представления компонентов осесимметричного напряженного состояния через интегралы от комплексных потенциалов Колосова — Мусхелишвили. Решения задач для слоя и сферы получены в замкнутой форме. К этому направлению относятся также работы Н. А. Ростовцева (1953 г.), В. И. Моссаковского (1954, 1958 гг.), Ю. И. Соловьева (1966 г.) и др. В указанных исследованиях отмечается связь используемых обобщенных функций с общей теорией обобщенных аналитических функций (1959 г.) И. Н. Векуа.

На основе метода Фурье и математических методов теории аналитических функций, а также использования асимптотических свойств решений, контурного интегрирования, теории бесконечных алгебраических систем и интегральных уравнений получены численные результаты в решении конкретных задач. Не представляется возможным дать сколько-нибудь полный перечень работ, в которых получены эти результаты. В дополнение к предыдущему укажем лишь некоторые из них. Это исследования И. И. Воровича и В. М. Александрова (1960 г.), В. М. Александрова (1968 г.), А. А. Баблюна (1961 г.), Н. М. Бородачева (1962 г.), Г. М. Валова (1962 г.), В. С. Губенко и В. И. Моссаковского (1960 г.), В. Л. Рвачева (1957 г.), А. Д. Коваленко, В. Т. Гринченко и А. Ф. Улитко (1969 г.), П. З. Лившица (1960 г.), Н. А. Ростовцева (1964 г.), Д. В. Грилицкого (1961 г.) и др.

В теории упругости широко применяется метод интегральных преобразований. Этот метод можно эффективно использовать при решении многих статических и динамических задач, например, контактных, осесимметричных задач, задач о колебаниях, об ударе и др. При этом решение задачи часто приводится к дифференциальным и интегральным уравнениям, бесконечным системам линейных уравнений, рядам, интегралам, содержащим специальные функции. Метод интегральных преобразований применяли В. М. Абрамов (1939 г.), А. И. Лурье (1942—1955 гг.), Г. С. Шапиро (1943—1947 гг.), В. Г. Гоголадзе (1944 г.), Н. Н. Лебедев (1958 г.), Я. С. Уфлянд (1948—1963 гг.), Г. Я. Попов (1961 г.), В. М. Александров и И. И. Ворович (1960 г.), Н. А. Ростовцев (1961 г.). Теория интегральных уравнений и интегральные преобразования имеют большое значение при решении задач реологии (А. Ю. Ишлинский, 1950 г.; Ю. Н. Работнов, 1962 г.). Как известно, в теории линейных упруго-наследственных сред уравнение состояния может быть записано в форме

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (1 + K^*) \sigma,$$

где

$$K^* \sigma = \int_{-\infty}^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau,$$

ε и σ — соответственно деформация и напряжение, E — мгновенный модуль упругости, $K(t - \tau)$ — ядро ползучести.

Ю. Н. Работнов показал (1948 г.), что при выборе ядра ползучести в виде дробно-экспоненциальной функции

$$\Theta_\alpha(\beta, t - \tau) = (t - \tau)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (t - \tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}$$

решение указанного выше интегрального уравнения можно представить в виде

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\varepsilon}{1 + K^*} = \varepsilon - \int_{-\infty}^t \varphi(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau,$$

причем ядро релаксации $\phi(t - \tau)$ также принадлежит к классу дробно-экспоненциальных функций. Если ядра наследственности являются экспоненциальными функциями, то уравнения состояния могут быть представлены в виде линейных дифференциальных уравнений. На основании уравнений состояния, записанных в дифференциальной или интегральной форме, найдено решение ряда задач механики упругой среды с последствием.



Ю. Н. Работнов.

Важные результаты в разработке теории вязко-упругих сред и при решении конкретных задач получили П. Т. Соколов и В. И. Скрябин (1935 г.), В. Г. Гоголадзе (1938 г.), А. Ю. Ишлинский (1938—1940 гг.), А. Н. Герасимов (1938—1948 гг.), А. Р. Ржаницын (1946 г.), Н. Х. Арутюнян (1947—1952 гг.), Ю. Н. Работнов (1948 г.), М. И. Розовский (1948—1955 гг.), А. А. Ильюшин и П. М. Огибалов (1965—1968 гг.) и др. В последние годы дальнейшее развитие теории упруго-наследственных сред связано с решением задач механики грунтов (Ж. С. Ержанов, 1964 г.) и полимерных материалов, в частности стеклопластиков (Г. Н. Савин, 1968 г.). Метод интегрального преобразования Лапласа широко применяется в динамической теории термоупругости. Советскому Союзу принадлежит приоритет в этой области термоупругости. Задача о тепловом ударе на поверхности полупространства, исследованная (1950 г.) В. И. Даниловской, была первой динамической задачей термоупругости, решенной с помощью операционного исчисления.

В развитии механики твердого деформируемого тела большую роль играют вариационные методы. Это объясняется тем, что вариационные принципы позволяют получить доказательство соответствующих теорем существования и единственности решений, а также решение ряда конкретных задач теории упругости, пластичности, ползучести и строительной механики, не прибегая к дифференциальным уравнениям (в большинстве случаев нелинейным), характеризующим равновесие и движение тела.

Теории упругости и пластичности располагают множеством экстремальных методов, из которых прежде всего следует назвать методы Релея, Треффца, Тимошенко, Ритца, Бубнова — Галеркина, Лейбензона, Качанова и их разновидности, модификации и обобщения. Например, согласно методу Бубнова — Галеркина компоненты упругого перемещения выражаются посредством рядов

$$u = u_0 + \sum a_k f_k, \quad v = v_0 + \sum b_k \varphi_k, \quad w = w_0 + \sum c_k \psi_k,$$

где a_k, b_k, c_k — произвольные постоянные, $f_k, \varphi_k, \psi_k, u_0, v_0, w_0$ — известные функции координат. При этом функции f_k, φ_k, ψ_k следует выбирать



В. М. Майзель.

так, чтобы заранее были удовлетворены уравнения геометрических связей и статические граничные условия. Тогда вариационное уравнение Лагранжа (принцип возможных перемещений) приводит к системе уравнений, число которых равно числу постоянных a_k, b_k, c_k . Компоненты тензора напряжений, входящих в уравнения, могут быть выражены как линейные функции этих постоянных. Таким образом, для определения последних имеется система линейных уравнений.

Советским ученым принадлежит математическое обоснование различных вариационных методов, применяющихся в механике деформируемого твердого тела. Например, А. И. Лурье доказал (1946 г.) существование потенциала Кастильяно для нелинейных систем; И. И. Гольденблат показал (1956 г.), что вариационным принципам теории упругости конечных деформаций можно придать форму, при которой они становятся удобным средством для исследования многих вопросов теории пластичности, ползучести, строительной механики; С. Н. Розе исследовал (1961 г.) сходимость метода Качанова; С. Г. Михлин доказал разрешимость систем Ритца для функционалов весьма общего вида. Однако даже в случае квадратичного функционала составление системы Ритца связано с громоздкими вычислениями. Эти трудности могут быть преодолены, если воспользоваться модификацией метода Ритца, предложенной (1959 г.) Л. М. Качановым. Другая модификация этого метода принадлежит (1961 г.) А. А. Ильшину. Л. С. Лейбензон разработал (1940 г.) эффективный вариационный метод, состоящий в смягчении граничных условий, которое достигается требованием минимизации интеграла от квадратичной ошибки при некоторых дополнительных условиях. Как показал (1943 г.) Л. С. Лейбензон, ряд трудностей, возникающих при решении задач теории упругости, можно устранить, если надлежащим образом воспользоваться принципом возможных перемещений. Важные результаты в развитии вариационных методов получили также В. М. Майзель (1941—1942 гг.), В. В. Новожилов (1948 г.), К. З. Галимов (1953 г.), В. В. Болотин (1963 г.) и др. В работе В. М. Майзеля, опубликованной в 1951 г., на основе обобщения теоремы о взаимности работ на случай задачи термоупругости разработан метод решения задач о термоупругих напряжениях в дисках, пластинах, оболочках и других подобных телах, с помощью которого они сводятся к соответствующим задачам изотермической теории упругости о напряженном состоянии тел, находящихся под действием сосредоточенных сил.

В исследованиях советских ученых по теории упругости широко применяются специальные функции. А. Н. Динником (1913, 1915 гг.)

рассмотрены статические задачи теории упругости, задачи о термоупругих напряжениях в длинных сплошных и полых цилиндрах при нестационарных температурных полях, о продольных и поперечных колебаниях стержней переменного сечения и цилиндров и другие задачи, решаемые в бесселевых функциях. Для решения этих задач им разработаны таблицы бесселевых функций. Исследования А. Н. Динника продолжены и развиты (1960 г.) его учеником Б. Г. Корневым.

Важные результаты по теории специальных функций (гипергеометрические функции, функции Лежандра и др.) применительно к задачам теории упругости получили А. Д. Коваленко и его ученики. Работы А. Д. Коваленко по применению гипергеометрических функций при построении эффективных точных решений для круглых пластин переменной толщины и оболочек вращения являются естественным завершением исследований, начатых (1913—1919 гг.) известной в истории теории оболочек цюрихской школой. Особое внимание в них обращено на изучение случая логарифмических решений гипергеометрического уравнения Гаусса. В ряде публикаций (1945—1950 гг.) А. Д. Коваленко по аналогии с функциями Бесселя второго рода ввел понятие гипергеометрической функции второго рода, называя так при целом положительном параметре c выражение вида

$$\Phi(a, b, c; z) = F(a, b, c; z) \ln z + F_1(a, b, c; z),$$

где $F(a, b, c; z)$ — обычная гипергеометрическая функция Гаусса, $F_1(a, b, c; z)$ — функция, определяемая бесконечным степенным рядом.

Продолжая исследование свойств логарифмических решений гипергеометрических уравнений, А. Д. Коваленко составил полную систему соотношений между смежными гипергеометрическими функциями второго рода, ввел обобщенную гипергеометрическую функцию второго рода, содержащую члены с $\ln z$, вывел для нее рекуррентные формулы и нашел частные решения неоднородного гипергеометрического уравнения при свободном члене в виде полинома в гипергеометрических функциях первого и второго рода (1957, 1964 гг.). При исследовании задач о несимметричной деформации круглых пластин переменной толщины, о несимметричной деформации конических оболочек и других А. Д. Коваленко и И. Ф. Вовкодав ввели (1967—1969 гг.) обобщенные гипергеометрические функции второго рода, содержащие члены с логарифмом в первой и более высоких степенях.

В последние десять лет широкое признание получили методы теории математической статистики и теории вероятностей в механике твердого тела. Эти методы позволяют учесть рассеяние начальных несовершенств, условий закрепления и случайных нагрузок. С точки зрения теории надежности (способности системы выполнять определенные функции в заданных условиях) отказ рассматривается как случайное событие, а надежность — как вероятностная характеристика системы. Основные исследования в этом направлении принадлежат В. В. Болотину (1958 — 1963 гг.) и И. И. Воровичу (1959 г.).

Особое место при решении задач механики твердого деформируемого тела занимают вычислительные методы, из которых в первую очередь



А. Д. Коваленко.

следует назвать метод сеток (П. М. Варвак, 1949 г.; Д. В. Вайнберг, А. Л. Сиянский, 1966 г.). Идея этого метода заключается в замене дифференциальных уравнений конечноразностными уравнениями, в результате чего получается система алгебраических уравнений относительно неизвестных значений исходных функций в узловых точках сеточной области, аппроксимирующей заданную область. Метод сеток особенно эффективен при использовании математических машин.

В рассматриваемой области применяются также геометрические методы. В частности, А. В. Погорелов развил метод исследования устойчивости оболочек, основанный на анализе геометрических факторов, поскольку существует тесная связь между задачами теории оболочек и некоторыми вопросами теории поверхностей.

Интересно, что некоторые задачи теории поверхностей можно трактовать как задачи о равновесии двумерных сред, наделенных некоторыми физическими свойствами.

Асимптотические методы в нелинейной механике

Колебательные процессы, наблюдаемые в физике, механике, астрономии, технике (лишь в первом приближении, и то не всегда) можно описать с помощью линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Эти процессы по существу являются нелинейными. На первом этапе развития учения о колебаниях лишь в отдельных случаях, когда наблюдаемые явления никак нельзя было объяснить с помощью линейной трактовки, нелинейные колебания рассматривались как таковые (М. В. Остроградский, Гельмгольц, Релей). Вместе с тем уже в прошлом столетии существовал математический аппарат (например, метод теории возмущений, метод разложения в ряд по степеням малого параметра), который при надлежащем развитии и обобщении мог бы быть применен для исследования некоторых классов нелинейных колебательных систем, во всяком случае систем, достаточно близких к линейным (описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с малым параметром ϵ , которые при $\epsilon = 0$ вырождаются в линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами).

В теории возмущений, разработанной астрономами для изучения движения планет, рассматривались движения, описываемые диффе-



Президиум V Международной конференции по нелинейным колебаниям. Слева направо: С. Дилиберто (США), Т. Хаяши (Япония), Т. Вожель (Франция), М. Картрайт (Англия), Н. Н. Боголюбов (СССР), Ю. А. Митропольский (СССР), Д. Граффи (Италия). Киев, 1969 г.

ренциальными уравнениями с малым параметром. При его нулевом значении они вырождаются в уравнения, интегрирующиеся элементарно, — в уравнения задачи «двух тел». Такого рода задачи, в частности знаменитая «задача трех тел», рассматривались еще при самом возникновении небесной механики, причем сразу же была определена существенная трудность, состоящая в том, что для получения результатов, пригодных для изучения движения за достаточно длительный промежуток времени, неприменимы обычные разложения по степеням малого параметра. Дело в том, что для искомых величин, характеризующих движение, обычные разложения по степеням малого параметра приводят к приближенным формулам, где наряду с членами, гармонически зависящими от времени, есть еще так называемые секулярные члены типа $\varepsilon^m t \sin \alpha$, $\varepsilon^m t \cos \alpha$, в которых время t не входит под знак синуса и косинуса. Интенсивность секулярных членов быстро возрастает вместе с t , поэтому даже без детального анализа погрешности ясно, что область применимости таких приближенных формул ограничена слишком коротким интервалом времени. Аналогичный характер носит и упомянутая трудность вековых членов в теории возмущений. После трудов Лагранжа и Лапласа для преодоления этой трудности был предложен целый ряд эффективных методов.

Метод, основанный на разложении в ряд по степеням малого параметра ε , приводит, как правило, к расходящимся рядам, но получающиеся при этом приближенные формулы, если ограничиться некоторым фиксированным числом $m = 1, 2, 3, \dots$, весьма пригодны для практических расчетов. Эти ряды асимптотические в том смысле, что погрешность m -го приближения пропорциональна $(m + 1)$ -й степени малого параметра ε . Поэтому, если m фиксировано, погрешность сколь угодно мала при достаточно малых значениях ε . Следует указать, что при $m \rightarrow \infty$, вообще говоря, не получается сходимости, но ее отсутствие



Н. Н. Боголюбов. Дубна, 1969 г.

несущественно для практических расчетов, поскольку на практике определение коэффициентов при последующих степенях ϵ столь быстро усложняется, что фактически могут быть использованы приближения лишь первого, второго и вообще очень невысокого порядка, а их применимость всецело обуславливается свойством асимптотичности.

Упомянутые асимптотические методы оказались весьма эффективными в небесной механике. Затем они были перенесены в квантовую механику. Однако эти методы были разработаны для консервативных динамических систем, описываемых каноническими уравнениями, и без принципиального обобщения их невозможно было применить для изучения большинства рассматривавшихся нелинейных колебательных систем, которые являются неконсервативными, так как содержат источники притока энергии и ее поглощения. Кроме аппарата теории возмущений был разработан аппарат, не связанный с консервативными системами, — локальная теория периодических решений Пуанкаре и теория линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами А. М. Ляпунова. Однако до начала 30-х годов XX в. эти методы систематически не применялись при исследовании нелинейных колебательных процессов, не была даже раскрыта глубокая внутренняя связь их с проблемами нелинейных колебаний. Впервые применить

точные методы Ляпунова — Пуанкаре в систематическом исследовании нелинейных колебаний, полностью раскрыть их фундаментальное значение в этой области удалось советским физикам Л. И. Мандельштаму, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронову, А. А. Витту.

Нелинейные колебания приобрели особую актуальность в 20-х годах в связи с быстрым развитием радиотехники, так как проблемы устойчивой генерации незатухающих колебаний, трансформации частоты, стабилизации, принудительной синхронизации, модуляции и демодуляции и другие могли быть решены лишь с помощью введения в колебательные системы нелинейных элементов, поскольку в чисто линейных колебательных системах не могут существовать установившиеся колебательные режимы, не зависящие от начальных условий. Только после появления многочисленных исследований, связанных с названными проблемами, стало ясным то глубокое и принципиальное отличие механики нелинейных колебаний от механики линейных колебаний, которое полностью сохраняется даже при рассмотрении слабонелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями, отличающимися от линейных с постоянными членами лишь наличием весьма малых членов. Поскольку существенным является поведение колебаний на интервале времени, весьма большом по сравнению с их «собственными периодами», пренебрегать влиянием даже этих малых членов невозможно. Поэтому данную область учения о нелинейных колебаниях целесообразно рассматривать как отдельную дисциплину — механику нелинейных колебаний, или, как это принято называть, нелинейную механику.

Одним из первых начал разрабатывать нелинейную механику голландский физик Ван-дер-Поля. Он предложил метод «медленно меняющихся» коэффициентов, аналогичный одному из методов, применявшихся еще Лагранжем в небесной механике. Однако метод медленно изменяющихся коэффициентов в данной Ван-дер-Полем формулировке не был математически обоснован и условия его применимости оставались невыясненными. Эти принципиальные трудности были преодолены (1934 г.) А. А. Андроновым и А. А. Виттом, которые не только обосновали результаты, полученные нестрогим методом Ван-дер-Поля, но и с помощью методов Ляпунова — Пуанкаре решили ряд новых проблем (существование порога для амплитуды внешней электродвижущей силы при синхронизации, вопрос о стационарных периодических колебаниях в системе связанных контуров и др.).

Проблему о математическом обосновании метода Ван-дер-Поля и о пределах его применимости решили П. Фату (1928 г.) и Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси (1934 г.). Поясним сущность вопроса на примере уравнения Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \quad (84)$$

Посредством замены переменных

$$x = a \cos(\omega t + \varphi), \quad \frac{dx}{dt} = -a \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

уравнение (84) приводится к системе двух уравнений с медленно изменяющимися неизвестными a и φ :

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon F(\omega t, a, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon \Phi(\omega t, a, \varphi), \quad (85)$$

где F, Φ — периодические функции времени t , определяющиеся формулами

$$F(\omega t, a, \varphi) = -f\{a \cos(\omega t + \varphi), -a\omega \sin(\omega t + \varphi)\} \frac{\sin(\omega t + \varphi)}{2\omega},$$

$$\Phi(\omega t, a, \varphi) = f\{a \cos(\omega t + \varphi), -a\omega \sin(\omega t + \varphi)\} \frac{\cos(\omega t + \varphi)}{2\omega}.$$

Заметим, что приближенные уравнения Ван-дер-Поля формально получаются из точных уравнений (85) посредством применения к уравнениям (85) «принципа усреднения», т. е. с помощью замены их правых частей соответствующими усредненными выражениями (по явно входящему t)

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(\omega t, a, \varphi) dt, \quad \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Phi(\omega t, a, \varphi) dt.$$

Таким образом, для обоснования метода Ван-дер-Поля применительно к уравнению (84) достаточно обосновать законность применения принципа усреднения к уравнениям (85). Выполнив аналогичные замены переменных, нетрудно убедиться, что для обоснования метода Ван-дер-Поля и в более общих случаях достаточно обосновать допустимость применения принципа усреднения к дифференциальным системам вида

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, \dots, x_n) \quad (86)$$

с медленно изменяющимися неизвестными $x_1, \dots, x_n$. Вопрос о таком обосновании и был исследован Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси для частного случая, когда правые части рассматриваемых уравнений являются периодическими функциями t . Наложив на правые части естественные условия регулярности, Мандельштам и Папалекси установили, что разность между соответствующими решениями точных и усредненных уравнений может быть при достаточно малом ε сколь угодно малой на достаточно длительном интервале времени (порядка L/ε , где L — сколь угодно большое фиксированное число). В их рассуждениях весьма существенную роль играло условие периодичности функций $X_k(t, x_1, \dots, x_n)$ по отношению к t .

С помощью совершенно иного метода Н. М. Крылову и Н. Н. Боголюбову удалось освободиться (1937 г.) от этого ограничительного условия и применить принцип усреднения также в тех случаях, когда зависимость $X_k(t, x_1, \dots, x_n)$ от t является квазипериодической. Н. Н. Боголюбов в работе «О некоторых статистических методах в математической физике» (1945 г.) показал, что для применимости принципа усреднения не требуется налагать на зависимость этих выражений

от времени условия периодичности, точной или приближенной, и вполне достаточным является условие существования среднего значения

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} X_k(t, x_1, \dots, x_n) dt. \quad (87)$$

Как метод Ван-дер-Поля, так и методы Ляпунова — Пуанкаре в их первоначальной формулировке не могли удовлетворить запросам практики в отношении простоты расчетных схем. Эти методы помогли глубоко вскрыть качественную сторону явлений, но в своих приложениях к составлению расчетных схем оказались слишком сложными. Поэтому для применения в инженерной практике разрабатывались методы более простого типа: квазилинейный (А. И. Берг, Ю. Б. Кобзарев) и энергетический (К. Ф. Теодорчик) методы, отличающиеся физической наглядностью и интуитивностью. Основная идея квазилинейного метода состоит в замене элементов нелинейных эквивалентными линейными с параметрами, определяющимися специальным образом. Оказывается, что эти параметры, в отличие от параметров настоящих линейных систем, зависят от амплитуды, а иногда (в случае резонанса) и от фазы колебаний.

Для решения ряда задач радиотехники, например для определения амплитуды стационарных колебаний в электронном генераторе, исследования резонансов деления частоты, явления асинхронного возбуждения, с успехом применялся метод эквивалентной линеаризации. Однако как метод Ван-дер-Поля, так и метод эквивалентной линеаризации позволяли находить лишь первое приближение; колебания рассматривались или как гармонические с постоянными амплитудами и фазами (стационарные режимы), или как колебания с медленно изменяющимися амплитудами и фазами (процессы установления).

Таким образом, в начале 30-х годов оставался открытым вопрос о создании теории, аналогичной хотя бы теории возмущений и математически обоснованной, позволяющей получать не только первое, но и высшие приближения, применимой для изучения как периодических, так и непериодических колебательных процессов и, наконец, удовлетворяющей запросам практики в отношении простоты и наглядности расчетных схем. Эта задача была решена Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым в ряде их работ, среди которых особое место занимает монография «Введение в нелинейную механику» (1937 г.). Ими разработан новый подход к изучению нелинейных колебаний, основанный на построении асимптотических разложений. Этот подход представляет собой по идее дальнейшее распространение созданных астрономами асимптотических методов на случай неконсервативных динамических систем. Преодолев принципиальные трудности, Крылов и Боголюбов распространили методы теории возмущений на общие неконсервативные динамические системы и создали новые асимптотические методы, пригодные для исследования нелинейных колебательных систем, являющихся, как правило, неконсервативными. Они разрабатывали асимптотические методы в двух направлениях: в направлении создания формализма

построения приближенных решений и в направлении теоретического, качественного исследования свойств решений дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр.

Коротко остановимся на основной идее асимптотических методов применительно к уравнению (84). К правильной их формулировке можно прийти, исходя из физических представлений о характере рассматриваемого колебательного процесса. Так, при отсутствии возмущения, т. е. при $\varepsilon = 0$, колебания, очевидно, будут чисто гармоническими ($x = \cos \psi$) с постоянной амплитудой и равномерно вращающимся фазовым углом:

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega \quad (\psi = \omega t + \theta)$$

(амплитуда a и фаза θ колебания будут постоянными по времени величинами, зависящими от начальных условий). Наличие нелинейного возмущения ($\varepsilon \neq 0$) приводит к появлению в решении уравнения (84) обертонов, обуславливает зависимость мгновенной частоты $\frac{d\psi}{dt}$ от амплитуды и, наконец, может вызвать систематическое увеличение или уменьшение амплитуды колебаний в зависимости от притока или поглощения энергии возмущающими силами. Очевидно, что все эффекты возмущения исчезают в предельном случае ($\varepsilon = 0$).

Принимая все это во внимание, ищем решение уравнения (84) в виде степенного ряда

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots, \quad (88)$$

где $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi)$, ... периодически зависят от угла ψ , а a и ψ определяются дифференциальными уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Итак, задача сводится к подбору соответствующих выражений для $u_1(a, \psi)$, $u_2(a, \psi)$, ..., $A_1(a)$, $B_1(a)$, $A_2(a)$, $B_2(a)$, ... таким образом, чтобы выражение (88) формально удовлетворяло уравнению (84). Эта задача решается элементарно, а для искомых коэффициентов разложения получаются явные выражения, правда, быстро усложняющиеся с возрастанием номера.

Идея асимптотических методов оказалась исключительно общей и гибкой. Она применима к самым разнообразным случаям систем с «малым» и «большим» параметрами, в том числе и к системам с бесконечным числом степеней свободы.

При разработке асимптотических методов особое внимание было уделено построению простых и эффективных приемов, которые позволили бы, исходя из элементарных соображений, составить приближенные формулы. Предложенные Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым весьма эффективный принцип эквивалентной линеаризации, символические

и другие методы существенно облегчили исследование многочисленных нелинейных задач. Например, принцип эквивалентной линеаризации дает возможность составить уравнения, характеризующие закон изменения фазы и амплитуды, минуя составление точных уравнений движения. Символические методы оказались очень эффективными при исследовании одночастотных колебаний систем со многими степенями свободы и наличием только одной нелинейности, различных схем связанных контуров, колебаний в коленчатых валах, резонанса в электронном генераторе. В исследованиях Крылова и Боголюбова эти методы получили строгое математическое обоснование также для уравнений в частных производных. В работе И. З. Штокало «Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами» (1961 г.) символические методы обобщены и распространены на линейные дифференциальные уравнения с квазипериодическими и почти периодическими коэффициентами.

Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов применили асимптотические методы для решения ряда актуальных задач. Так, они получили формулы второго приближения для определения частоты стационарных колебаний в электронных генераторах, позволяющие определить влияние обертонов на стабильность частоты, исследовать резонансы деления частоты, внутренние резонансы в системах со многими степенями свободы. Особое внимание ими уделялось теории резонанса в связи с вопросом об использовании нелинейных элементов для устранения резонанса в машиностроении. Были решены задача о продольной устойчивости самолета, задача об устойчивости параллельной работы электрических машин и др.

Позднее («Проблемы динамической теории в статистической физике», 1946 г.; «Кинетические уравнения», 1946 г.) Н. Н. Боголюбову удалось вынести асимптотическую теорию за рамки собственно нелинейной механики и использовать ее в статистической физике, в теории кинетических уравнений. Оказалось, что при рассмотрении бесконечной цепочки уравнений (содержащих малый параметр, например малую плотность в случае газов), определяющих функции распределения комплексов молекул, можно применить по существу те же асимптотические методы и в качестве «уравнений m -го приближения» получить кинетические уравнения различной степени точности.

Как отмечалось выше, строгая теория метода усреднения создана Н. Н. Боголюбовым. Суть этого метода заключается в следующем. Рассмотрим дифференциальное уравнение в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \quad (90)$$

где ε — малый положительный параметр, t — время, x, X — точки n -мерного евклидова пространства E_n . При ряде ограничений, накладываемых на правые части уравнения (90), путем замены переменных согласно формуле

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t, \xi) + \varepsilon^2 F_2(t, \xi) + \dots + \varepsilon^m F_m(t, \xi) \quad (91)$$

уравнение (90) сводится к точному уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \dots + \varepsilon^m P_m(\xi) + \varepsilon^{m+1} R(t, \xi). \quad (92)$$

Отбрасывая в уравнении (92) слагаемое $\varepsilon^{m+1} R(t, \xi)$, получим «усредненное» уравнение m -го приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 P_2(\xi) + \dots + \varepsilon^m P_m(\xi). \quad (93)$$

При этом все функции $F_1(t, \xi)$, $F_2(t, \xi)$, ..., $F_m(t, \xi)$, входящие в правую часть выражения (91), находятся элементарно. Функции $X_0(\xi)$, $P_2(\xi)$, ..., $P_m(\xi)$ определяются путем усреднения правой части уравнения (90) после подстановки в нее выражения (91); например,

$$X_0(\xi) = M_t \{X(t, \xi)\}, \quad P_2(\xi) = M_t \left\{ \left(\tilde{X} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) X(t, \xi) \right\}, \dots$$

Преимущество получающихся после усреднения приближенных уравнений (93) перед точными состоит в том, что они не содержат в правых частях явно времени t , т. е. являются автономными. Вместе с тем они все же являются дифференциальными (как и точные), что накладывает определенное ограничение на возможность применения метода усреднения. Следует подчеркнуть, что для весьма большого количества практически интересных случаев усредненные уравнения оказываются гораздо более простыми и поддающимися исследованию. При этом во многих случаях, в которых общее решение усредненной системы получить не удастся, можно найти по крайней мере важные частные решения, например решения, соответствующие установившимся стационарным процессам.

Метод усреднения, разработанный Н. Н. Боголюбовым, эффективно применяется при решении ряда важных вопросов в теории дифференциальных уравнений. И. З. Штокало в монографии «Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами» (1960 г.) применил основные идеи метода усреднения при решении задач устойчивости линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими и почти периодическими коэффициентами. Для системы вида

$$L\left(t, \frac{d}{dt} x\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(t) \frac{d^k x}{dt^k},$$

где $f_k(t) = \sum_v A_v^k e^{i v t}$, Штокало установил «формальную» теорему Флоке в том смысле, что процесс приведения к системе с постоянными коэффициентами является асимптотически сходящимся. Для этой системы он построил детерминанты Гурвица, которые затем разложил в формальные ряды по степеням малого параметра.

И. З. Штокало разработал алгоритм построения приближенных решений уравнений указанного типа, а также получил оценки погрешности приближенного решения. Полученные разложения по степеням малого параметра дали возможность найти строгие критерии устойчи-

вости, заключающиеся в следующем: 1) если первые не исчезающие члены в разложении всех детерминантов Гурвица положительны, то решение исходной системы обладает сильной устойчивостью в положительном направлении при достаточно малых значениях параметра; 2) если же в разложении хотя бы одного из детерминантов Гурвица первый из не исчезающих членов отрицателен, то исходная система обладает неограниченным решением при $t \rightarrow \infty$ и достаточно малых значениях параметра. Эти критерии применяются, в частности, при исследовании устойчивости колебаний маятника с вертикально вибрирующей точкой подвеса в окрестности его вертикального положения равновесия.

Обоснование метода усреднения в основном сводится к решению следующих двух проблем:

1) отыскания условий, при которых разность между решением точной системы уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x) \quad (94)$$

и решением соответствующей ей усредненной системы

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon M_t \{X(t, \xi)\} = \varepsilon X_0(\xi) \quad (95)$$

при достаточно малых значениях параметра ε становится сколь угодно малой на сколь угодно большом, но все же конечном интервале времени;

2) установления соответствия между различными свойствами решений точных уравнений (94) и решений усредненных уравнений (95), которые зависят от их поведения на бесконечном интервале времени.

Основополагающее значение при решении первой проблемы для достаточно широкого класса дифференциальных уравнений в стандартной форме имеет следующая классическая теорема Н. Н. Боголюбова.

Пусть функции $X(t, x)$ удовлетворяют таким условиям:

а) для некоторой области $D \in E_n$ можно указать такие положительные постоянные M и λ , что для всех вещественных $t \geq 0$ и для любых точек x, x', x'' из этой области выполняются неравенства

$$|X(t, x)| \leq M, \quad |X(t, x') - X(t, x'')| \leq \lambda |x' - x''|; \quad (96)$$

б) равномерно по отношению к x в области D существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt = X_0(x). \quad (97)$$

Тогда любым сколь угодно малым положительным ρ, η и сколь угодно большому L можно сопоставить такое положительное ε_0 , что если $\xi = \xi(t)$ есть решение уравнения (95), определенное на интервале $0 < t < \infty$ и лежащее в области D вместе со всей своей ρ -окрестностью, то для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в интервале $0 < t$ справедливо неравенство

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta, \quad (98)$$



Акад. АН УССР Ю. А. Митропольский с группой старших научных сотрудников Института математики АН УССР. Слева направо: О. Б. Лыкова, А. Ф. Шестопап, А. Н. Шарковский, Ю. А. Митропольский, В. И. Фодчук, А. А. Березовский, В. Г. Коломиец, А. М. Самойленко. 1968 г.

в котором $x = x(t)$ является решением уравнения (94), совпадающим с $\xi(t)$ при $t = 0$.

Эта теорема получила дальнейшее развитие и обобщение. И. И. Гихману принадлежит теорема о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, \lambda) \quad (99)$$

от параметра λ , из которой как частные случаи следуют обычная теорема о непрерывной зависимости и основная теорема Боголюбова об усреднении на конечном интервале времени. Близкий результат к теореме Гихмана получен Б. П. Демидовичем. Как в теореме Гихмана, так и в теореме Демидовича существенно используется тот факт, что правые части рассматриваемых дифференциальных уравнений (99) удовлетворяют условию Липшица. В связи с этим заслуживает внимания теорема М. А. Красносельского и С. Г. Крейна о непрерывной зависимости решений уравнений (99) от параметра λ , доказанная при менее ограничительных условиях, а именно требуется существование для уравнения (99) при $\lambda = \lambda_0$ единственного решения $x = x(t, \lambda_0)$, определенного при $0 \leq t \leq T$, лежащего в некоторой области D и удовлетворяющего условию $x(0, \lambda_0) = x_0 \in D$. Эта теорема позволяет получить обоснование принципа усреднения для более широкого класса уравнений. Тео-

рема Красносельского и Крейна была расширена и обобщена Я. Курцевейлем и З. Ворелем, а также Г. А. Антосевичем.

В работе Н. Н. Боголюбова и Д. Н. Зубарева метод усреднения обобщен на случай систем дифференциальных уравнений с быстро вращающейся фазой:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= X_k(\alpha, x_1, \dots, x_n), \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \lambda \omega(x_1, \dots, x_n) + A(\alpha, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

где λ — большой параметр, X_k и A — периодические функции α с периодом T .

Широкое применение и дальнейшее развитие метод усреднения получил при исследовании дифференциальных уравнений с медленно изменяющимися параметрами в монографии Ю. А. Митропольского «Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний» (1964 г.). Например, рассматривая нелинейные уравнения с медленно изменяющимися параметрами вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[m(y) \frac{dx}{dt} \right] + c(y)x &= \varepsilon F\left(y, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right), \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon f\left(y, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right), \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

где $\frac{d\theta}{dt} = v(y)$, и сводя их к стандартному виду при ряде условий путем замены переменных

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \psi, \\ \frac{dx}{dt} &= -a\omega(y) \sin \psi \quad (\psi = \int \omega(y) dt + \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

можно, применяя усреднение, вместо уравнений (101) рассматривать следующую усредненную систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(y, a, \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(y) - v(y) + \varepsilon B_1(y, a, \psi), \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon D_1(y, a, \psi), \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

где функции в правых частях определяются путем усреднения соответствующих правых частей системы в стандартной форме. Полученная система (103) имеет определенную специфику, поскольку в ней наряду с медленными движениями a , y имеется быстрое (при $\omega \neq v$) движение ψ . В дальнейшем метод усреднения был распространен также на системы с медленно изменяющимися параметрами более общего вида и были выведены оценки погрешности для конечного интервала времени.

Важные результаты принадлежат В. М. Волосову. Базируясь на идеях Н. Н. Боголюбова, развитых для уравнений в стандартной форме и уравнений с быстро вращающейся фазой, Волосов разработал более общую схему усреднения для систем дифференциальных уравнений, содержащих многомерные медленные и быстрые движения, вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(t, x, y, \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon Y(t, x, y, \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

где x, y — векторы измерения соответственно k и m ($k + m = n$) n -мерного евклидова пространства E_n , $X(t, x, y, \varepsilon)$ и $Y(t, x, y, \varepsilon)$ — соответственно k - и m -мерные вектор-функции, ε — малый положительный параметр.

Метод усреднения применяется также к системам с запаздыванием (Халанай, В. П. Рубаник, В. И. Фодчук, Хейл и др.). Распространение метода усреднения на дифференциальные уравнения с запаздыванием непосредственно связано с теорией линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, развитой А. Д. Мышкисом (1951 г.), С. Н. Шимановым (1958 г.) и др.

В связи с исследованием поведения колебательных систем, находящихся под воздействием случайных сил, возрос интерес к теории дифференциальных уравнений со случайными функциями. В этой теории эффективно применяется метод усреднения (Р. Л. Стратонович, И. И. Гихман, В. Г. Коломиец).

Существенное развитие и широкое применение метод усреднения получил при исследовании дифференциальных уравнений в частных производных, близких к уравнениям гиперболического типа (Ю. А. Митропольский и Б. И. Мосеенков, 1962 г.; Г. С. Писаренко и М. В. Василенко, 1959 г.).

Как отмечалось выше, при обосновании принципа усреднения решалась также вторая проблема — установление соответствия между свойствами решений точных уравнений (94) и решений усредненных уравнений на бесконечном временном интервале. Н. Н. Боголюбову принадлежит теорема, устанавливающая (при некоторых довольно общих ограничениях, накладываемых на правую часть исходных уравнений в стандартной форме) существование (в некоторой достаточно малой окрестности статического решения $\xi = \xi_0$ соответствующих усредненных уравнений) единственного почти периодического решения $x = x^*(t)$ исходного уравнения, определенного на всем интервале $(-\infty, +\infty)$ и обладающего свойством условной устойчивости. Эта теорема Боголюбова была распространена на другие классы уравнений Ю. А. Митропольским и О. Б. Лыковой («Исследование поведения решений нелинейных уравнений в окрестности положения равновесия», 1964 г.).

Существенное развитие асимптотические методы получили в работах Ю. А. Митропольского («Нестационарные процессы в нелинейных коле-

бательных системах», 1955 г.; «Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний», 1964 г.) в трех основных направлениях: 1) разработка новых алгоритмов, которые позволяли бы строить асимптотические разложения для нелинейных дифференциальных уравнений с «малым» и «большим» параметрами, весьма часто встречающихся в задачах физики и техники, а также разработка схем, удобных для практического построения приближенных решений; 2) обнаружение и изучение новых физических явлений в нелинейных колебательных системах; 3) теоретико-качественное исследование дифференциальных уравнений, содержащих «малый» параметр. В последнем направлении особое внимание уделено разработке метода интегральных многообразий, что существенно связано с практически важной задачей — исследованием одночастотных колебательных процессов в системах со многими (и даже бесконечным числом) степенями свободы.

Одним из важных результатов, полученных в области развития асимптотических методов, является разработка алгоритма построения приближенных решений для нелинейных дифференциальных уравнений с медленно изменяющимися параметрами. Простейшее из этих уравнений имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left\{ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right\} + c(\tau) x = \varepsilon f \left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (105)$$

где ε — малый положительный параметр, $\tau = \varepsilon t$ — медленное время, $m(\tau)$, $c(\tau)$ — медленно изменяющиеся параметры, характеризующие колебательную систему (это могут быть, например, медленно изменяющиеся масса системы и ее жесткость и т. д.), $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ — мгновенная частота внешней возмущающей силы. Приближенное решение уравнения (105) ищется в виде асимптотического ряда

$$x = a \cos \left(\frac{p}{q} \theta + \psi \right) + \varepsilon u_1 \left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q} \theta + \psi \right) + \\ + \varepsilon^2 u_2 \left(\tau, a, \theta, \frac{p}{q} \theta + \psi \right) + \varepsilon^3 \dots, \quad (106)$$

где $u_1(\tau, a, \theta, \frac{p}{q} \theta + \psi)$, $u_2(\tau, a, \theta, \frac{p}{q} \theta + \psi)$, ... — периодические функции углов θ , $\frac{p}{q} \theta + \psi$ с периодом 2π , p , q — некоторые небольшие взаимно простые числа, выбор которых зависит от того, какой резонанс будет исследоваться; функции времени a и ψ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \psi) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{p}{q} \nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \psi) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

где $\omega(\tau) = \sqrt{\frac{c(\tau)}{m(\tau)}}$ — «собственная» частота системы, $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ — мгновенная частота внешнего периодического возмущения, $\tau = \varepsilon t$ —

медленное время, $\omega(\tau) - \frac{p}{q} \nu(\tau)$ характеризует разность между фазой собственного колебания и фазой внешнего возмущения, которая может изменяться в процессе колебания.

В первом приближении решение уравнения (105) имеет вид

$$x = a \cos(p\varphi + \psi) \quad \left(\varphi = \frac{1}{q} \theta\right), \quad (108)$$

где a и ψ определяются из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{p}{q} \nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi), \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

в которой $\omega^2(\tau) = \frac{c(\tau)}{m(\tau)}$, $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$, $A_1(\tau, a, \psi)$, $B_1(\tau, a, \psi)$ определяются по достаточно простым формулам исходя из известных выражений для правой части уравнения (105). В качестве второго приближения для решения этого уравнения принимается выражение

$$x = a \cos(p\varphi + \psi) + \varepsilon u_1(\tau, a, \theta, p\varphi + \psi), \quad (110)$$

в котором a и ψ определяются из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\tau) - \frac{p}{q} \nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \psi), \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

где функции в правой части (110) и (111) также находятся без затруднений.

Разработанный Ю. А. Митропольским метод распространен им на различные случаи уравнения (84) вида

$$\frac{d}{dt} \left\{ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right\} + c(\tau) x = \varepsilon F\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (112)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right\} + c(\tau) x = \varepsilon F(\tau, x), \quad (113)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right\} + c(\tau) x = \varepsilon F\left(\tau, \frac{dx}{dt}\right), \quad (114)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right\} + c(\tau) x = \varepsilon f(\tau, \theta) + \varepsilon F\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (115)$$

для которых исследовалась интегрируемость соответствующих уравнений первого и второго приближений.

Разработаны также алгоритмы построения асимптотических решений для более сложных нелинейных уравнений второго порядка с медленно изменяющимися параметрами вида

$$\frac{d}{dt} \left\{ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right\} + f(\tau, x) = \varepsilon F\left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (116)$$

а также для уравнений, близких к уравнениям с «периодическими» коэффициентами

$$\frac{d}{dt} \left\{ m(\tau) \frac{dx}{dt} \right\} + p(\tau, \theta) x = \varepsilon F \left(\tau, \theta, x, \frac{dx}{dt} \right), \quad (117)$$

где $p(\tau, \theta + 2\pi) = p(\tau, \theta)$. Результаты, полученные при исследовании уравнений типа (105), (111) — (117), дали возможность обнаружить и подробно изучить ряд новых явлений нелинейных колебательных систем с одной степенью свободы в нестационарных колебательных процессах. Эти явления ранее либо не были известны, либо наблюдались только экспериментально. С помощью алгоритма построения приближенных решений для уравнения (105) подробно исследованы колебания маятника при медленном увеличении или уменьшении его длины и выведен ряд специфических особенностей этих колебаний. Интересные результаты получены при исследовании колебаний нелинейного вибратора во время прохождения его через резонанс: впервые обнаружены специфические для нелинейных систем явления при прохождении через резонанс (затягивание, скачки и срывы амплитуды, биения и т. п.), при этом рассмотрены примеры прохождения через резонанс коленчатого вала, явления, возникающие во время прохождения через резонансы при запуске центрифуги и других гироскопических устройств, совместное воздействие обычного и параметрического резонансов, а также явления, возникающие при прохождении через оба резонанса.

Развитию асимптотических методов применительно к исследованию линейных дифференциальных уравнений с медленно изменяющимися коэффициентами посвящены работы С. Ф. Феценко, в том числе написанная им совместно с Л. Д. Николенко и Н. И. Шкилем монография «Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений» (1966 г.). Им предложен метод асимптотического представления интегралов неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений с медленно изменяющимися коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon) x + B(\tau, \varepsilon) e^{i\theta(t, \varepsilon)},$$

где $\tau = \varepsilon t$, $A(\tau, \varepsilon)$, $B(\tau, \varepsilon)$ — неограниченно дифференцируемые матрицы, допускающие разложение

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau), \quad B(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_s(\tau).$$

Впервые рассмотрен случай, когда корни $\chi_i(\tau)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) характеристического уравнения матрицы $A_0(\tau)$ ($\text{Det} | A_0(\tau) - \lambda E | = 0$) обладают переменной кратностью в различных точках области изменения аргумента. Предложенный С. Ф. Феценко асимптотический метод позволяет расщепить исходную систему на несколько независимых подсистем низших порядков, количество которых зависит от числа изолированных групп корней характеристического уравнения. Этот метод применялся для решения ряда инженерных задач, в частности



Г. С. Писаренко.

задачи о движении шахтных подъемных канатов с грузом на конце.

Методы нелинейной механики в последнее время широко применяются для решения конкретных задач. К этому направлению относятся работы Г. С. Писаренко, в частности монография «Рассеяние энергии при механических колебаниях» (1962 г.). В них рассмотрены интересные задачи о прохождении через резонанс турбинных лопаток как постоянного, так и переменного сечения с учетом рассеяния энергии в материале. Решена одна из труднейших задач теории колебаний упругих систем — о колебаниях стержней с учетом рассеяния энергии в материале и др.

Актуальные задачи о нестационарных процессах в различных механических системах, в том числе задача о воздействии колебательной системы на источник энергии ограниченной мощности, рассмотрены В. О. Кононенко. Асимптотический метод применил к случаю систем, близких к каноническим, В. А. Гробов. Он фундаментально исследовал нестационарные процессы, в частности прохождение через критические числа оборотов в роторах турбомашин.

Во многих актуальных проблемах современной техники постоянно встречаются колебательные системы со многими (и бесконечным числом) степенями свободы. Даже если колебания в таких системах описываются дифференциальными уравнениями, близкими к линейным, для приложения обычных методов нелинейной механики требуется предварительно решить совокупность линейных дифференциальных уравнений с числом неизвестных, пропорциональным числу степеней свободы, что создает значительные затруднения.

В колебательных системах со многими степенями свободы наличие неизбежных внутреннего и внешнего трений и внешних возбуждающих сил приводит обычно к быстрому исчезновению высших частот, т. е. к установлению основного тона колебаний (или колебаний с какой-либо одной частотой ω_k). Поэтому целесообразно при исследовании системы со многими степенями свободы рассматривать одночастотный режим, когда все точки системы совершают колебания с одной и той же частотой. Н. Н. Боголюбовым была предложена (1948 г.) схема построения частного решения нелинейной системы уравнений вида

$$\frac{dx_k}{dt} - \sum_{q=1}^n c_{kq} x_q = \varepsilon f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (118)$$

Предполагая, что в невозмущенной системе (т. е. в системе (118) при $\varepsilon = 0$) возможны незатухающие колебания с некоторой

частотой ω

$$x_k = a\varphi_k e^{i(\omega t + \theta)} + a\varphi_k^* e^{-i(\omega t + \theta)} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (119)$$

зависящие только от двух произвольных постоянных a и θ , и накладывая еще ряд дополнительных условий, Боголюбов предлагает частное решение системы (118), соответствующее одночастотному колебательному режиму в системе, описывающейся уравнениями (118), искать в виде асимптотических рядов

$$x_k = a\varphi_k e^{i\psi} + a\varphi_k^* e^{-i\psi} + \varepsilon u_k^{(1)}(a, \psi) + \varepsilon^2 u_k^{(2)}(a, \psi) + \dots \quad (120)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

в которых $u_k^{(i)}(a, \psi)$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots$) — периодические функции угла ψ , а величины a и ψ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

Следует заметить, что поскольку при интегрировании уравнений (121) в решение (120) вводится только две произвольные постоянные, то с помощью выражений (120) получается приближенное представление не для общего решения системы (118), которое должно зависеть от n произвольных постоянных, а лишь для двупараметрического семейства частных решений. Так как в нелинейных системах принцип суперпозиции неприменим, то на основании различных частных решений нельзя построить общее решение. Однако во многих случаях найденное двупараметрическое решение обладает особым свойством сильной устойчивости, заключающимся в том, что любое решение уравнений (118) при начальных значениях, близких к начальным значениям двупараметрического многообразия интегральных кривых (120), и возрастании t стремится к решениям, принадлежащим многообразию (120). Рассматриваемое многообразие как бы притягивает к себе близкие к нему решения. Собственно говоря, только в этом случае исследование решений типа (120) и может представлять интерес для физики.

Начиная с 1949 г. над развитием одночастотного метода, построением алгоритмов, удобных для исследования самых различных типов систем дифференциальных уравнений, часто встречающихся при изучении колебательных систем со многими степенями свободы, работает Ю. А. Митропольский. Он получил ряд тонких теорем, устанавливающих критерии устойчивости изученных двупараметрических семейств частных решений. В дальнейшем эти теоремы были развиты в стройную теорию интегральных многообразий, получившую самостоятельное значение при исследовании дифференциальных уравнений с «малым» или «большим» параметром.

Как известно, при исследовании колебательных систем для построения соответствующих дифференциальных уравнений очень удобно

исходить из рассмотрения кинетической и потенциальной энергий

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^N a_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^N c_{rs} q_r q_s. \quad (122)$$

В этом случае получаются невозмущенные уравнения в виде

$$\sum_{s=0}^N (a_{rs} \ddot{q}_s + c_{rs} q_s) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, N). \quad (123)$$

Предполагая, что на систему воздействуют внешние обобщенные возмущающие силы вида

$$\varepsilon Q_r(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (124)$$

или

$$\varepsilon Q_r(vt, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N), \quad (125)$$

или

$$\varepsilon Q_r(\tau, \theta, q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N), \quad (126)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $\frac{d\theta}{dt} = v(t)$, мы приходим к системе уравнений

$$\sum_{s=1}^N (a_{rs} \ddot{q}_s + c_{rs} q_s) = \varepsilon Q_r \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (127)$$

или, если $a_{rs} = a_{rs}(\tau)$, $c_{rs} = c_{rs}(\tau)$, где $\tau = \varepsilon t$ — медленное время, к системе более общего вида

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{s=1}^N a_{rs}(\tau) \dot{q}_s \right\} + \sum_{s=1}^N c_{rs} q_s = \varepsilon Q_r \quad (r = 1, 2, \dots, N). \quad (128)$$

Для системы уравнений типа (127), (128), если в правых частях стоят функции типа (124) — (126), существует метод построения приближенных решений, в общем случае сводящийся к тому, что решение (в самом общем случае для системы (128) при εQ_r , определяющемся выражением (126)) системы (128) ищется в виде рядов

$$q_s = \varphi_s^{(1)}(\tau) a \cos(p\varphi + \vartheta) + \varepsilon u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, p\varphi + \vartheta) + \varepsilon^2 \quad (129)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N),$$

в которых $u_s^{(1)}(\tau, a, \theta, p\varphi, \vartheta)$, $u_s^{(2)}(\tau, a, \theta, p\varphi, \vartheta)$ — периодические функции θ и $p\varphi + \vartheta$ с периодом 2π , а величины a и ϑ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 A^2(\tau, a, \vartheta) + \dots, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1(\tau) - \frac{p}{q} v(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \vartheta) \dots, \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

где $\omega_1(\tau)$ — наименьший (не обязательно) корень уравнения

$$D \parallel -a_{rs}(\tau) \omega^2 + c_{rs}(\tau) \parallel = 0, \quad (131)$$

$\varphi_s^{(h)}(\tau)$ — нетривиальные решения системы алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^N \{-a_{rs}(\tau) \omega_h^2(\tau) + c_{rs}(\tau)\} \varphi_s^{(h)}(\tau) = 0, \quad (132)$$

p и q — некоторые взаимно простые (вообще говоря, небольшие) числа, выбор их зависит от того, какой резонанс будет исследоваться.

Для облегчения применения к различным классам уравнений разработанного метода найдены различные приемы составления уравнений вида (130). Так, для составления уравнений первого приближения созданы методы типа методов линеаризации, гармонического баланса и др. В частности, большим и перспективным достижением оказался метод энергетической интерпретации, который дал возможность формально перенести метод, разработанный для систем с конечным числом степеней свободы, на системы с бесконечным числом степеней свободы, описываемые уравнениями в частных производных, близкими к уравнениям гиперболического типа.

Одночастотный метод был применен также при построении асимптотических решений для систем уравнений с гироскопическими членами. Построенные в этом случае уравнения первого приближения для амплитуды и фазы одночастотного процесса дали возможность весьма точно проанализировать ряд сложных явлений в гироскопических системах при нестационарном колебательном процессе.

Асимптотические методы успешно использовались для исследования релаксационных колебательных систем, описываемых в общем случае уравнениями вида

$$\frac{dx}{dt} = X(\tau, x) + \varepsilon X^*(\tau, \theta, x, \varepsilon), \quad (133)$$

где

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad X = (X_1, X_2, \dots, X_n), \\ X^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*).$$

Полученные алгоритмы применены для исследования конкретных колебательных систем, при этом были обнаружены новые явления, специфические для нелинейных колебательных систем со многими степенями свободы при нестационарном режиме. Например, подробно изучен вопрос о прохождении через резонанс в системах со многими степенями свободы в коленчатых валах, центрифугах и других гироскопических устройствах, связанных электрических контурах, роторах турбомашин. Рассмотрены также сложные явления, возникающие при нестационарном режиме и внутреннем резонансе, при совместном внешнем резонансе и параметрическом резонансе, и др.

Асимптотические методы были развиты применительно к новым классам уравнений. В. П. Рубаник (1955 г.) применил их для исследования уравнений, правая часть которых представляет собой двоя-



А. М. Самойленко.

ко периодическую функцию, В. М. Волосов (1956 г.) — для исследования колебательных систем с медленно изменяющимися параметрами. Б. И. Мосеенков с помощью энергетического подхода к изучению колебательных систем с распределенными параметрами исследовал (1957 г.) нестационарные колебания валов с несимметричным сечением и другие задачи.

Асимптотические методы применялись для построения приближенных решений уравнений, близких к уравнениям с периодическими коэффициентами, а также для исследования одночастотных колебаний в системах, описываемых уравнениями вида

$$\frac{dx}{dt} = X(\tau, x) + \varepsilon Y(\tau, \theta, x, \varepsilon), \quad (134)$$

где $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$, $\tau = \varepsilon(t)$. А. М. Самойленко исследовал (1962 г.) этим методом уравнения с нерегулярной правой частью

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(\nu t, x, \dot{x}) = \varepsilon f(x, \dot{x}) \delta(x - x_0), \quad (135)$$

где $\delta(x - x_0)$ — δ -функция. А. Н. Шарковский изучал (1968 г.) динамические системы.

Широко применяется асимптотический метод при решении задач теории регулирования. Так, А. И. Лурье (1958 г.) использовал его для исследования автоколебательных процессов, Е. П. Попов (1954 г.) — для переходных процессов в системах регулирования. Ими рассмотрены системы высокого порядка с медленно изменяющимися параметрами, которые встречаются в теории регулирования и описываются уравнениями вида

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t), \quad (136)$$

где $Q(p)$, $R(p)$, $S(p)$ — операционные многочлены, $F(x, px)$ — нелинейная функция, $f(t)$ — внешнее медленно изменяющееся воздействие.

Асимптотический метод применялся также для исследования других сложных механических систем. Например, В. Н. Челомей использовал его для исследования колебаний в сервомеханизмах, Н. Н. Моисеев — для расчета орбит спутников.

Как отмечалось выше, с помощью асимптотических разложений (113) получают приближенное представление не для общего решения уравнений (112), а лишь для некоторого двухпараметрического семейства частных решений. Представляет интерес установление критериев, при которых это двухпараметрическое семейство обладало бы свойством устойчивости, заключающимся в том, что всякое решение системы

(128), начальное значение которого может и не быть достаточно близким к начальным значениям двухпараметрического семейства (129), стремится при возрастании t к решениям семейства (129) (в общем случае — к семейству в целом, а не к индивидуальным кривым семейства). Для систем типа (128) доказана важная теорема, устанавливающая критерии, при выполнении которых семейство решений обладает свойством сильной устойчивости.

Вопрос обоснования метода построения приближенных решений, соответствующих одночастотным колебаниям в системах со многими степенями свободы, тесно связан с теорией интегральных многообразий, идея которой принадлежит Н. Н. Боголюбову. Особенностью идеи метода интегральных многообразий является некоторый новый подход к качественной теории дифференциальных уравнений. Известно, что индивидуальные решения дифференциальных уравнений, как правило, очень чувствительны к малым изменениям правых частей уравнений. В теории интегральных многообразий рассматриваются не индивидуальные решения, а интегральные многообразия (не кривые, а гиперповерхности), которые более стабильны по отношению к малым изменениям правых частей уравнений. В связи с этим, рассматривая интегральные многообразия, можно доказать ряд теорем, которые для индивидуальных решений можно получить только при достаточно жестких условиях, накладываемых на правые части уравнений. Вопрос о существовании и устойчивости интегральных многообразий имеет большое значение и для исследования индивидуальных решений, поскольку при наличии устойчивого интегрального многообразия, к которому с течением времени стремятся любые решения системы, вместо всего фазового пространства можно рассматривать решения, лежащие на интегральном многообразии гиперповерхности.



А. Н. Шарковский.

Существенное развитие теория интегральных многообразий получила в исследованиях (1957, 1958 гг.) Ю. А. Митропольского, посвященных обоснованию одночастотного метода для нелинейных колебательных систем с медленно изменяющимися параметрами. Ему принадлежит также ряд теорем о существовании и свойствах интегральных многообразий для нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в конечно- и бесконечномерном случаях. В последнем случае получена теорема, обосновывающая применение одночастотного метода для исследования систем с распределенными параметрами.

Применяя метод интегральных многообразий при исследовании одной релаксационной колебательной системы, Ю. А. Митропольский



Н. Н. Моисеев.

уравнений, 1957—1965 гг.), Хейла и его сотрудников (США, по различным аспектам изучения интегральных многообразий для различных систем нелинейных уравнений, 1960, 1961 гг.) и др.

Многие задачи физики и техники приводят к рассмотрению разрывных, или, что то же, релаксационных, колебаний, которые характеризуются двумя основными особенностями: медленным накоплением энергии в каких-либо элементах системы (пружина, конденсатор и т. п.) и последующей разрядкой энергии, происходящей почти мгновенно после того, как достигнут некоторый практический потенциальный порог для этого накопления. К рассмотрению разрывных колебаний приводят, в частности, задачи о колебаниях в релаксационных ламповых схемах либо без самоиндукции, либо без емкости — в так называемых мультивибраторах; разрывные колебания возникают также при известных условиях в цепях с неоновой лампой, в механических системах при колебаниях тел малой массы, находящихся под воздействием большого трения, и в других системах.

А. А. Андронов, А. А. Витт при рассмотрении задач указанного типа обычно пренебрегали, например, малыми емкостями, самоиндукциями и исходили из физических соображений, которые формулировались в виде гипотезы скачка.

Впервые вопрос о разрывных колебаниях без привлечения физических соображений рассматривался (1951 г.) Н. А. Железцовым и Л. В. Родыгиным (в случае симметрического мультивибратора). Если учесть малые, так называемые паразитные, параметры, неизбежные в любой реальной системе, то задача изучения релаксационных колебаний сводится математически к задаче вычисления периодических решений, близких к разрывным в системах уравнений, содержащих малый параметр при старших производных. Не нарушая общности,

сводит рассмотрение исходной системы уравнений к изучению одного уравнения на многообразии и в результате подробного анализа решений этого уравнения выводит критерии существования зон параметрического резонанса для исследуемой релаксационной системы, обнаруживает явление квазисинхронизации, во втором приближении уточняет частоту асинхронных колебаний и т. п.

Результаты Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского по теории интегральных многообразий развиты в работах О. Б. Лыковой (по теории локальных интегральных многообразий и исследованию индивидуальных решений на этих многообразиях, 1957—1967 гг.), К. В. Задираки (о применении метода интегральных многообразий для исследования сингулярно-возмущенных дифференциальных

эти системы можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

где x и f — k -мерные вектор-функции, y и g — l -мерные вектор-функции, ε — малый положительный параметр.

Системы вида (137) рассматривались вне связи непосредственно с задачами о релаксационных колебаниях; при этом обычно из рассмотрения исключались точки, в которых функциональный определитель $\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|$ обращается в нуль. Наиболее интересны в этом направлении работы А. Н. Тихонова и его учеников, а также Флато и Н. Левинсона, где с разных точек зрения и для различных целей изучалось поведение решений системы (137) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так, А. Н. Тихоновым доказана теорема о том, что при некоторых весьма общих условиях на конечном интервале времени $0 < t < T$ для решений системы (137)

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t, \varepsilon), \\ y &= y(t, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

выполняются предельные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) &= x(t), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) &= y(t), \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

где $x(t)$, $y(t)$ — решения вырожденной системы, получающиеся из системы (137) при $\varepsilon = 0$,

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

и лежащие в $(k + l)$ -мерном евклидовом пространстве целиком на поверхности

$$f(x, y) = 0. \quad (141)$$

Исследования А. Н. Тихонова были продолжены А. Б. Васильевой, В. М. Волосовым и др.

Левинсон и Флато рассматривали вопрос о существовании периодических решений систем вида (137). Доказана теорема, устанавливающая критерии, при которых существует периодическое решение системы (137), однако в предположении, что вырожденная система (139) имеет периодическое решение, целиком лежащее на поверхности.

Однако в большинстве из указанных работ не устанавливается эффективный алгоритм построения решения, кроме того, теоремы Тихонова, Левинсона и другие неприменимы для изучения поведения решений системы (137) вблизи края поверхности (141), т. е. вблизи тех точек, где $\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| = 0$. Вместе с тем именно поведение решений системы (137)

вблизи края поверхности (141) оказывается важным, так как для решений, описывающих релаксационные колебания, характерно прохождение через край поверхности (141). Изучение поведения решений (139) вблизи края поверхности (141) связано с математическими трудностями. Эти трудности для простейших релаксационных систем второго порядка впервые были преодолены Хаагом и А. А. Дородницыным. Хааг рассматривал уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + \lambda f'(x) \dot{x} + x = 0, \quad (142)$$

А. А. Дородницын — уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2) \dot{x} + x = 0 \quad (143)$$

при больших значениях параметра λ . Оба эти уравнения путем введения новых переменных согласно формулам $y = -\lambda^{-1}x$, $\tau = \lambda^{-1}t$, $\lambda^{-2} = \varepsilon$ приводятся к системе вида (137), причем уравнение кривой (141) в данном случае имеет вид

$$y - \int_0^x f(x) dx = 0. \quad (144)$$

А. А. Дородницыну удалось получить для уравнения (143) более полный результат. Им вычислен предельный цикл и найдена численная величина периода этого цикла. Однако, не говоря уже о том, что результаты Хаага и А. А. Дородницына относятся к частным случаям, асимптотические разложения очень сложны: различные количества (решения, периоды и т. д.) ведут себя по-разному на различных участках предельного цикла в отношении порядка их величин по сравнению с ε .

Впервые строго математические методы исследования систем общего вида (137), позволяющие выяснить характер релаксационных колебаний, были предложены (1955—1957 гг.) Л. С. Понтрягиным и Е. Ф. Мищенко. Понтрягин предложил начинать изучение системы (137) с решений так называемой системы быстрых движений

$$\varepsilon \dot{x} = f(x, y), \quad (145)$$

где x , f — k -мерные векторы, y — l -мерный вектор, и классифицировать постановки задач для этой системы в зависимости от того, какие решения имеет система (145). Релаксационные колебания относятся к случаю, когда система быстрых движений (145) своими стационарными решениями имеет положения равновесия. Исходя из этой идеи, Понтрягин и Мищенко построили достаточно общую асимптотическую теорию релаксационных колебаний, описывающихся системой дифференциальных уравнений (137), позволяющую с помощью математически обоснованных асимптотических разложений находить явные выражения для периодических решений. Получены эффективные формулы, по которым можно вычислять периоды циклов, не решая систему уравнений (137), а исходя непосредственно из вида правых частей.

Выше отмечалось, что в задачах нелинейной механики в ряде важных случаев можно установить существование интегральных многообразий тороидального типа, обладающих свойством асимптотического притяжения близких траекторий. Тем самым вопрос об исследовании стационарных колебательных процессов сводится к вопросу об изучении структуры траекторий, лежащих на многообразиях. В работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова «Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний» (1934 г.), Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний» (1963 г.) для этой цели использованы известные результаты теории Пуанкаре — Данжуа, относящиеся к преобразованию окружности на себя. С их помощью удалось доказать существование квазипериодических решений для уравнений типа

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + \varepsilon F(h, \varphi, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \nu + \varepsilon \Phi(h, \varphi, \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

к рассмотрению которых приводят многие нелинейные колебательные системы, и исследовать их устойчивость в тех случаях, когда тороидальные многообразия двумерны.

Общий случай, когда уравнения на тороидальном многообразии сводятся к уравнениям вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = \nu + f(\varphi),$$

где $\varphi = \varphi_1, \dots, \varphi_n$, исследован (1963 г.) Н. Н. Боголюбовым с помощью метода, который представляет собой сочетание метода А. Н. Колмогорова, изложенного им в работе «О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона» (1954 г.), и В. И. Арнольда об ускоренной сходимости с методом интегральных многообразий. Так, при некоторых предположениях относительно правых частей системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F(h, \varphi, \Delta, \varepsilon), & h &= h_1, \dots, h_{n_0}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \Delta + f(h, \varphi, \Delta, \varepsilon), & \varphi &= \varphi_1, \dots, \varphi_n, \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

где $\nu = \omega + \Delta$, при условии аналитичности функций, стоящих в правой части, в некоторой области для большинства ω (в смысле меры Лебега), если $\varepsilon (|\varepsilon| < \varepsilon_1)$ достаточно мало, доказано существование квазипериодического решения системы (147) с частотами ω вида

$$\begin{aligned} h_t &= S(\omega t + \psi, \varepsilon), \\ \varphi_t &= \omega t + \psi + \Phi(\omega t + \psi, \varepsilon), \end{aligned}$$

где $S(\theta, \varepsilon)$, $\Phi(\theta, \varepsilon)$ — аналитические функции θ, ε в некоторой области, обладающей свойством притяжения любых решений, начальные

значения которых принадлежат этой области. Однако с помощью методов, применяющихся в нелинейной механике, не всегда удается доказать аналитичность функций, определяющих тор, можно лишь доказать их дифференцируемость. Поэтому принципиально важным в исследовании структуры траекторий, лежащих на тороидальных многообразиях, является обобщение этих результатов на случай, когда функции, определяющие многообразие, только дифференцируемы. Благодаря результатам Мозера и методу интегральных многообразий выяснен вопрос о существовании дифференцируемых квазипериодических решений задач нелинейной механики.

Идеи Н. Н. Боголюбова о доказательстве существования квазипериодических решений задач нелинейной механики широко применяются. Так, на их основе доказано существование квазипериодических решений канонической системы Гамильтона, подвергнутой воздействию малых возмущений.

Как указывалось выше, исследование многих задач нелинейной механики приводит к рассмотрению систем типа (146). Такие системы уравнений, как известно, успешно можно исследовать с помощью методов нелинейной механики (например, качественное исследование с помощью метода интегральных многообразий, построение фактического решения с помощью введения последовательных замен переменных согласно формулам типа

$$\left. \begin{aligned} h_{i-1} &= h_i + u_i(h_i, \varphi_i), \\ \varphi_{i-1} &= \varphi_i + v_i(h_i, \varphi_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots; \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

здесь на n -м шаге получается система уравнений, где φ_n входит в члены $(n+1)$ -го порядка малости, и, следовательно, с точностью до величин n -го порядка малости получается упрощенная система, интегрирование которой значительно проще). Общий случай ($n > 2$), долгое время остававшийся неисследованным из-за трудностей, возникающих в связи с появлением малых делителей при построении формул замены переменных, рассмотрен Н. Н. Боголюбовым в монографии «О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики» (1964 г.). Ю. А. Митропольским исследована (1964 г.) система вида (147) в случае, когда матрица H вырождается в вектор $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ (при этом все β имеют отрицательные вещественные части), и разработан метод построения общего решения рассматриваемой системы, в основу которого положено введение последовательной замены переменных типа (148), обеспечивающей ускоренную сходимость.

Математические методы в гидроаэродинамике

В механике жидкостей и газов с середины XVIII в. используется модель идеальной жидкости (сжимаемой или несжимаемой), со второй половины XIX в. — модель вязкой (ньютоновой) жидкости. Эти модели описываются соответственно «уравнениями

Эйлера»⁵ и уравнениями Навье — Стокса. Для математической трактовки проблем механики жидкостей и газов существенное значение имело выделение а) класса движений с потенциалом скоростей, в частности плоско-параллельных движений, б) струйных движений — движений со свободной поверхностью и своеобразным краевым условием на такой заранее неизвестной поверхности, в) вихревых движений. Не менее существенным оказалось представление о пограничном слое и введение уравнений, описывающих движение в нем жидкости или газа (уравнений Прандтля). Во всех этих случаях на основе упомянутых выше общих уравнений были построены специфические системы уравнений и граничных условий, из которых исходят, применяя математические методы исследования. В настоящее время в гидроаэродинамике используется также много других моделей. Это неньютоновы жидкости (на стыке с теорией пластичности и теорией упругости) и различные схемы газовой динамики, учитывающие не чисто механические процессы. (Впрочем, в газовой динамике уже в основную систему уравнений надо включать и уравнение состояния.)



А. И. Лурье.

В 20-х годах XX в. исследованием уравнений Эйлера — Лагранжа занялся Н. М. Гюнтер. В 1925 г. он начал публикацию цикла работ, целью которых было доказать единственность и существование решений при обычных граничных и начальных условиях. В работе «Об основной задаче гидромеханики» (1926 г.) предполагается, что несжимаемая жидкость, заполняющая все пространство, имеет постоянную плотность и находится под действием сил, имеющих потенциал. Строятся бесконечные последовательности функций

$$\begin{array}{ccc} u_0, & v_0, & w_0, \\ u_1, & v_1, & w_1, \\ \dots & \dots & \dots \\ u_n, & v_n, & w_n \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

и функций

$$x_n = q_1 + \int_0^t u_n dt,$$

⁵ Имеются в виду как уравнения в форме Эйлера, так и уравнения в форме Лагранжа.

$$y_n = q_2 + \int_0^t v_n dt,$$

$$z_n = q_3 + \int_0^t w_n dt,$$

причем подбирается правило перехода от функций u_{n-1} , v_{n-1} , w_{n-1} к функциям u_n , v_n , w_n . Оказывается, что функции x , y , z и u , v , w удовлетворяют некоторой сложной системе нелинейных интегральных уравнений; эта система решается с помощью метода последовательных приближений. Метод последовательных приближений был применен Гюнтером также для решения двумерной смешанной задачи в ограниченной области.

Почти одновременно с Н. М. Гюнтером методы теории интегральных уравнений в применении к задачам гидроаэродинамики развивали А. И. Некрасов и М. А. Лаврентьев. А. И. Лурье применил (1928, 1929 гг.) метод интегральных уравнений к задачам стационарного и нестационарного обтекания тел (цилиндр, шар, эллипсоид) в случае их поступательного и вращательного движений в вязкой жидкости.

Специфические особенности задач гидроаэродинамики и тот факт, что при известных предположениях реальную пространственную задачу можно свести к плоской задаче, заставили обратить внимание на соответствующие методы теории функций. При изучении движений с потенциалом скоростей и струйных движений идеальной жидкости особенно плодотворным оказалось применение (в двумерном случае) теории функций комплексного переменного. Были уточнены математические постановки задач в соответствии с их механическим содержанием (достаточно напомнить о классических исследованиях по теории крыла и теории струй Жуковского и Чаплыгина), широко использованы уже известные, «готовые» математические результаты (в первую очередь, из области конформных отображений), и в то же время получили дальнейшее развитие оправдавшие себя математические методы.

В теории конформных отображений и вообще в геометрической теории функций комплексного переменного, как и во многих других отраслях математики, математически точное и вместе с тем практически удобное решение можно получить лишь в отдельных сравнительно частных случаях. Поэтому велико и принципиальное и практическое значение результатов общего и качественного характера, например оценок изменения функции, реализующей конформное отображение одной области (D_1) на другую (D_2) при небольшом изменении границы, скажем D_1 , или при переходе от D_1 к близкой области D_1' такой, что $D_1' \supset D_1$ (и соблюдаются определенные ограничения, наложенные на их границы). Так, в связи с задачами гидромеханики стали актуальными вариационные методы в теории функций комплексного переменного. С другой стороны, переход от (несжимаемых) жидкостей к (сжимаемым) газам (в дозвуковом режиме) означал аналитически переход от простейших уравнений эллиптического типа, которым удовлетворяют

аналитические функции, к более общим эллиптическим системам. Это выдвигало проблему соответствующего обобщения теории конформных отображений и всего аппарата аналитических функций. Переход от «плоских» к осесимметрическим и пространственным задачам также стимулировал такие обобщения. При исследовании подобных вопросов (указанных здесь только частично) были развиты или созданы математические методы, значение которых, разумеется, не ограничивается приложениями в механике жидкостей и газов.



А. И. Некрасов.

Вопросами теории волн на поверхности жидкости для случая плоского безвихревого движения занимался в 20-х годах А. И. Некрасов. Он свел задачу к определению функции, конформно отображающей область потока, который ограничен двумя вертикалями, на круг единичного радиуса. Таким образом, дифференциальные уравнения задачи и граничные условия были заменены нелинейными интегральными уравнениями вида

$$f(x) = \lambda \int_a^b [f(y) + R(y, f(y), \lambda)] K(x, y) dy.$$

Некрасов доказал, что это уравнение можно решить методом разложения неизвестной функции в ряд.

К задачам гидродинамики применялся метод конформного отображения. Ф. Г. Шмидт использовал (1924 г.) его при изучении движения прямолинейного вихря, образующегося в жидкости, ограниченной поверхностями определенного вида. В статье «Об одном случае плоского движения несжимаемой жидкости с образованием свободных границ» (1926 г.) С. А. Чаплыгин и М. А. Лаврентьев решают задачу, исходя из конформного отображения области потока на четверть окружности радиуса, равного единице. Различные случаи обтекания алгебраических контуров исследовал (1928—1930 гг.) методом конформного отображения Н. П. Неронов. В этом же направлении работал Н. И. Мухелишвили. Он применил к задачам плоской гидродинамики новый метод решения гармонического и би-гармонического уравнений. В частности, показал, что если часть плоскости, находящаяся вне движущегося контура, может быть конформно отображена на плоскость с помощью рациональных функций, то распределение скоростей в жидкости можно выразить в элементарных функциях.

Метод конформного отображения широко применялся при исследованиях задач аэродинамики. Весьма существенные работы в этом на-

правлении выполнены М. А. Лаврентьевым, М. В. Келдышем, Л. И. Седовым и др.

В 20-х годах были поставлены некоторые важные задачи механики сплошных сред, решенные или развитые значительно позднее. Так, в первой половине 20-х годов А. А. Фридман вместе со своими сотрудниками и учениками пытался решить проблему турбулентного движения. Начаты были исследования в области применения первого и второго методов Ляпунова к задачам устойчивости движения сплошных сред.

Классическая задача определения фигур равновесия вращающейся жидкости была поставлена и решена А. М. Ляпуновым. Исходя из идей Ляпунова, Н. Г. Четаев обобщал (1926, 1929, 1930 гг.) его результаты на случай, когда кроме сил ньютонова притяжения, действующих между отдельными частицами вращающейся жидкости, есть еще силы сжатия, вызывающие непрерывный и равномерный рост плотности жидкости. Полученное таким образом функциональное уравнение оказалось трудноразрешимым, и Четаев ограничился в своем решении определением устойчивых форм равновесия, отличных от эллипсоидальных, рассматривающихся в классическом случае. При описании устойчивых рядов фигур он использовал топологические методы.

В 20-х годах вопросами механики и математической физики, в частности идеями А. М. Ляпунова, заинтересовались Д. А. Граве и его ученик М. Х. Орлов. В работах Орлова, посвященных расчету фигур относительного равновесия вращающейся массы (1927, 1928 гг.), вычислены элементы критических эллипсоидов до седьмого порядка включительно. В связи с применением в этих целях аппарата интегральных уравнений начали развиваться и соответствующие численные методы.

Аэродинамические исследования, являющиеся продолжением основополагающих исследований Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина, также потребовали значительного развития определенного математического аппарата. В ряде работ по теории крыла (1922, 1926 гг.) Чаплыгин поставил основные задачи и показал пути их решения.

Еще в 1919—1922 гг. Н. И. Мухелишвили предложил применять для изучения движения контура в некоторой среде с помощью гармонического уравнения теорию интеграла Коши. Одной из наиболее важных задач теории крыла с самого начала 20-х годов была задача конформного отображения изучаемого контура на внешнюю часть окружности или на полуплоскость* в соответствии с условиями Чаплыгина. Она оказалась весьма трудной. Для ее решения были применены методы вариационного исчисления. Эту задачу, а также задачу о потоке, обтекающем дугу произвольной формы, изучал М. А. Лаврентьев. Он получил в этом направлении существенные результаты. В общем случае задача построения потока приводится к решению некоторого интегрального уравнения первого рода. Трудность решения подобного уравнения в теории крыла состоит в том, что интеграл является несобственным, так как ядро уравнения имеет особую точку. Лаврентьев предложил прием замены интегрального уравнения системой линейных уравнений и доказал сходимость этого процесса.

В связи с развитием в СССР гидромашиностроения существенное значение приобрела теория турбомашин. Рассматривалась рабочая жидкость, лишенная вязкости, и предполагалось, что она входит в колесо машины без удара и выходит по касательной к лопаткам. В этом направлении работали Г. Ф. Проскура и его ученик В. М. Майзель. Последний предложил (1926—1929 гг.) метод приближенного интегрирования уравнения Лапласа для случая пространств различной связности и при разных граничных условиях.

Аэродинамическая теория винта разработана в четырех мемуарах Н. Е. Жуковского (последний из них опубликован в 1918 г.). К аэродинамическим примыкают исследования в области газовой динамики, начало которым было положено в 20-х годах С. А. Чаплыгиным.

Последним направлением механики жидкостей, развивавшимся в 20-х годах и связанным с исследованиями Н. Е. Жуковского, была теория вязкой жидкости. В сущности, к ней приводились также задачи теории крыла и воздушного винта, в которых учитывается возникновение вихрей. С математической стороны задача сводилась к разработке приемов приближенного интегрирования уравнений вязкой жидкости.

А. И. Некрасов применил для исследования сохранения вихря в вязкой жидкости функции Бесселя. В этом же направлении работал В. В. Голубев. В исследованиях в области аэродинамики он широко пользовался методом функций комплексного переменного. Как указал Н. Н. Лузин, в трудах В. В. Голубева этот метод многообразно варьируется им в зависимости от намечаемых приложений. Голубев применял его при изучении механизированного крыла, крыла конечного размаха, а также при исследовании пограничного слоя. В области теории пограничного слоя им получены интегральные соотношения (соотношения Голубева), разработан метод интегрирования нелинейного уравнения Польгаузена, выполнено качественное исследование дифференциального уравнения пограничного слоя и строго доказан монотонный характер интегральной кривой этого уравнения, удовлетворяющей краевым условиям. Ученик Н. Е. Жуковского Л. С. Лейбензон, используя интеграл энергии, предложил новое интегральное соотношение в теории пограничного слоя и применил его при исследовании движения жидкостей с весьма большой вязкостью. Он разработал ряд вопросов движения нефти и положил начало теории фильтрации газированных жидкостей.

Развитие механики жидкостей и газов в Советском Союзе в 30—40-х годах XX в. имело свои характерные особенности. Преобразования народного хозяйства на рубеже 20-х и 30-х годов, бурный рост тяжелой промышленности и возникновение новых отраслей машиностроения способствовали развитию соответствующих научных направлений.

Методы теории нелинейных интегральных уравнений использованы (1937 г.) Н. А. Слезкиным для решения задачи об определении периодических капиллярных волн конечной высоты, которая в этом случае сводилась к решению некоторого симметричного интегрального уравнения. Н. Е. Кочин решил (1937 г.) общую задачу



Н. А. Слезкин.

об установившемся движении твердого тела под поверхностью тяжелой жидкости. Он использовал метод теории функций комплексного переменного. К этому же времени относятся его работы по теории волн, возникающих на поверхности раздела двух жидкостей разной плотности, где он также применяет теорию функций комплексного переменного в комбинации с теорией интегральных уравнений. Метод комплексного переменного был применен и М. В. Келдышем при исследовании плоской задачи теории бесконечно малых волн. Пространственная задача решена Н. Е. Кочиным с помощью теории размерности. Ему принадлежит также решение общей задачи о вычислении сил, действующих на твердое тело при его движении с постоянной скоростью под поверхностью бесконечно глубокой жидкости, при

этом им использована теория интегральных уравнений.

К 30-м годам относится решение ряда задач о движении тел под поверхностью бесконечно глубокой жидкости (М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев, 1937 г.; Л. Н. Сретенский, 1938 г.; А. Н. Тихонов, 1940 г.). В качестве математического аппарата использована теория интегральных уравнений.

В области теории приливных волн значительные результаты получены Л. Н. Сретенским и П. Я. Кочиной. Кочина показала (1938 г.), что определение собственных колебаний таких волн приводит к нахождению фундаментальных чисел и функций некоторого интегрального уравнения, ядро которого выражается через функцию Грина. Задача о распространении приливных волн на поверхности весьма большого бассейна приводит к системе дифференциальных уравнений Лапласа. Уравнение Лапласа теории приливов было рассмотрено (1937 г.) Сретенским в предположении, что жидкость полностью покрывает вращающийся шар или содержится в полярном бассейне.

Аэродинамические исследования в рассматриваемый период представляли собой продолжение и развитие направлений школы Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина. Значительный интерес вызывала теория крыла и винта самолета. М. А. Лаврентьев развил (1932 г.) метод построения профилей крыльев, в основу которого положено применение интегральных уравнений. М. В. Келдыш определил (1936 г.) условия устойчивости любых систем профилей. С. А. Чаплыгин решил (1936 г.) задачу построения потока, обтекающего триплан, состоящий из тонких пластинок. В. В. Голубев показал (1937 г.), что метод решения Чаплыгина связан с теорией алгебраических функций.

В мемуаре «К общей теории крыла моноплана» (1922 г.) С. А. Чаплыгин установил, что огибающая линий действия сил для всякого

крыла есть некоторая парабола, названная им «параболой устойчивости». В области теории крыла конечного размаха существенные результаты получил (1940 г.) Н. Е. Кочин. Он привел задачу о построении потока по потенциалу течения к приближенному решению интегральных уравнений путем разложения по малому параметру.



Л. Н. Сretenский.

Математическая трактовка задачи о колебаниях крыла также приводила, ввиду своей принципиальной сложности, к приближенным методам. Существенные результаты были получены М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым (1938 г.), а также Л. И. Седовым (1936, 1939 гг.). Производную от комплексного потенциала они выражают с помощью определенных интегралов, распространенных по крылу и вихревому слою за крылом, а для определения величины разрыва скорости на вихревом слое составляют интегральное уравнение типа Вольтерра первого рода. При решении интегральных уравнений в случае установившихся колебаний крыла получаются выражения, содержащие определенный интеграл от безразмерного параметра; этот интеграл можно выразить через функции Бесселя. В случае задачи о посадке с постоянной скоростью на спокойную воду интегральное уравнение для функции интенсивности сбегających вихрей превращается в алгебраическое вследствие постоянства этой функции.

Н. Е. Кочин в работе «Об установившихся колебаниях крыла круговой формы в плане» (1941 г.) свел поставленную задачу к отысканию гармонической функции, удовлетворяющей почти всюду функции Лапласа. Окончательно задача приводится к уравнению типа Фредгольма.

Важные результаты были получены в разработке учения о пограничном слое. Задача о движении несжимаемой жидкости в стационарном пограничном слое сводится к отысканию интегралов некоторой нелинейной системы уравнений в частных производных. При соблюдении определенных граничных условий Л. Г. Лойцянский и Н. Е. Кочин предложили (1942 г.) преобразование этой системы в систему, удобную для интегрирования. Точно она разрешима лишь в нескольких частных случаях, поэтому в подавляющем большинстве случаев приходится отыскивать приближенные методы решения.

Методы решения задач газовой динамики начали развиваться в 30-х годах в связи с исследованиями обтекания самолета, движущегося с дозвуковыми скоростями, а также с исследованием некоторых задач теории турбин. В Москве этими вопросами занимались С. А. Чаплыгин, Ф. И. Франкль, М. В. Келдыш, П. А. Вальтер, а также другие

ученые, в Ленинграде — И. А. Кибель, М. В. Келдыш и Ф. И. Франкль при исследовании (1934 г.) обтекания плоского крыла потоком с малыми числами M на бесконечности решили внешнюю задачу Неймана. Ими, а также П. А. Вальтером был развит метод последовательных приближений Релея — Янцена для малых значений M , доказана его сходимость.

Задача об обтекании тела дозвуковым потоком сжимаемой жидкости разрабатывалась на основе методов С. А. Чаплыгина, изложенных им в мемуаре «О газовых струях» (1902 г.). Л. С. Лейбензон и Н. А. Слезкин развили приближенный метод Чаплыгина, получивший впоследствии название метода аппроксимации адиабаты. Позднее (1939, 1940 гг.) задача обтекания тел при M , близком к единице, была исследована С. А. Христиановичем. Он привел уравнения Чаплыгина к каноническому виду и применил метод конформного отображения. Благодаря этим работам значительно облегчилось практическое использование теории.

В конце 20-х — начале 30-х годов техника выдвинула проблемы, связанные с теорией турбин и вопросами повышения скорости движения самолета. В годы Великой Отечественной войны к этим проблемам прибавилась еще одна — проблема реактивного движения. Можно сказать, что математическое описание соответствующих процессов на протяжении последующих десятилетий стало одной из наиболее важных задач прикладной математики.

Для исследования относительного движения твердого тела в газе со все повышающимися скоростями — дозвуковыми, околозвуковыми и сверхзвуковыми, — определявшего в конечном итоге вопрос об оптимальной форме движущегося тела, но вызвавшего также много вопросов о поведении газа при разных его характеристиках и условиях движения, потребовалось выполнение большой экспериментальной работы и теоретических изысканий. Чтобы получить общие решения дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа при дозвуковых скоростях, смешанного типа — при скоростях околозвуковых и гиперболического типа — при скоростях сверхзвуковых нужно было выполнить ряд частных исследований. Л. Н. Сретенский (1945 г.), а затем С. А. Христианович и И. М. Юрьев (1946 г.), Л. И. Седов (1946 г.) изучали задачу о дозвуковом обтекании тел при наличии циркуляции. Л. И. Седов развил (1949 г.) приближенный метод Чаплыгина при большом диапазоне чисел M . В общей постановке задачу теории крыла конечного размаха в сверхзвуковом потоке решала (1945—1947 гг.) Е. А. Красильщикова. Ею построено интегральное уравнение для потенциала скорости возмущенного движения и решена задача для колебаний тонких крыльев, а также для случая установившегося движения. В ряде работ, опубликованных в 1947 г. (Л. А. Галин, И. А. Паничкин, С. В. Фалькович, М. Д. Хаскинд), задача обтекания тонкого крыла сверхзвуковым потоком решена в различных аспектах для установившегося и не установившегося движений.

В 40-х годах А. А. Ильюшин, С. В. Фалькович и другие ученые поставили задачу о движении тела при гиперзвуковых скоростях. Л. И. Седов нашел (1944, 1945 гг.) решение задачи о сильном взрыве, в основу которого положено сведение уравнений движения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Это решение было развито (1945—1955 гг.) К. П. Станюковичем. Продолжались исследования в области теории вязкой жидкости. В. В. Струминский обобщил (1946 г.) основные интегральные методы расчета двумерного и трехмерного пограничных слоев для случаев вязкой сжимаемой и несжимаемой жидкостей. А. Н. Колмогоров создал (1946 г.) теорию механизма развитой турбулентности на базе теории вероятностей. Он предложил ограничиваться при исследовании рассмотрением относительных движений жидкости внутри малых объемов, по сравнению с размерами потока. При этом статистический режим турбулентных движений можно считать не зависящим от ориентировки в пространстве и сравнительно медленно изменяющимся при смещении всего объема как целого.



Е. А. Красильщикова.

Теоретические исследования в области механики жидкостей и газов в 50—60-х годах развивались не только в традиционных направлениях. Постановка новых задач теории обуславливалась потребностями практики советского машиностроения и авиационной и ракетной техники. Практика стимулировала развитие новых теорий; математические теории, возникшие и развивавшиеся при обстоятельствах, далеких от нужд гидроаэродинамики, нашли в ее задачах новые объекты для размышления. Например, для исследования движения вихря под поверхностью идеальной жидкости были применены методы функционального анализа, для решения плоской задачи обтекания вихря потоком идеальной жидкости — метод конформного отображения.

М. А. Лаврентьев предложил (1959 г.) новую схему плоского установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости. Он рассматривает поток как потенциальный в основной части и как движение с постоянной завихренностью у стенок; поле скоростей предполагается непрерывным при переходе через линию, разделяющую потенциальные и вихревые области потока. Математическое исследование последнего проводится применительно к обеим этим областям: в первой области искомая функция удовлетворяет уравнению Лапласа, во второй — уравнению Пуассона. На границе обеих областей эта функция должна принимать заданные значения.

Изучение теории струй идеальной жидкости значительно продвинулось вперед. Исследования М. А. Лаврентьева были основаны на



Научный семинар по гидродинамике акад. М. А. Лаврентьева. Новосибирск, 1969 г.

развитых им принципах геометрической теории функций комплексного переменного. Им доказана теорема существования и единственности для струйного обтекания дуги, имеющей ось симметрии, и получен ряд выводов качественного характера о струйном обтекании выпуклых контуров. М. А. Лаврентьев на основе изученного им поведения функций, реализующих конформное отображение, при деформации границы отображаемой области разработал вариационный метод. С помощью этого метода он получил в теории струй теоремы существования и единственности решения, различные результаты качественного характера. В теории нелинейных волн с помощью вариационных методов им доказано существование периодических волн, имеющих конечную амплитуду и уединенную волну в канале конечной глубины. Для перехода от уравнений Коши — Римана к более общим системам эллиптического типа Лаврентьевым и его школой разрабатывалась теория квазиконформных отображений, непосредственно применимая к задачам дозвуковой динамики газов.

Значительная часть указанных выше исследований подытожена в монографии М. А. Лаврентьева «Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа» (1962 г.). В работах по теории длинных волн широко использовано приближенное представление функций, реализующих конформное отображение области, имеющей вид узкой полосы с криволинейными границами, на стандартную область, например на прямолинейную полосу единичной ширины. Соответствующие формулы описывают асимптотическое поведение решений уравнений Лапласа относительно параметра, определяющего меру гладкости границы. Такая асимптотика может быть построена для решений весьма широкого класса линейных операторных уравнений и класса областей, отличных от бесконечных полос.

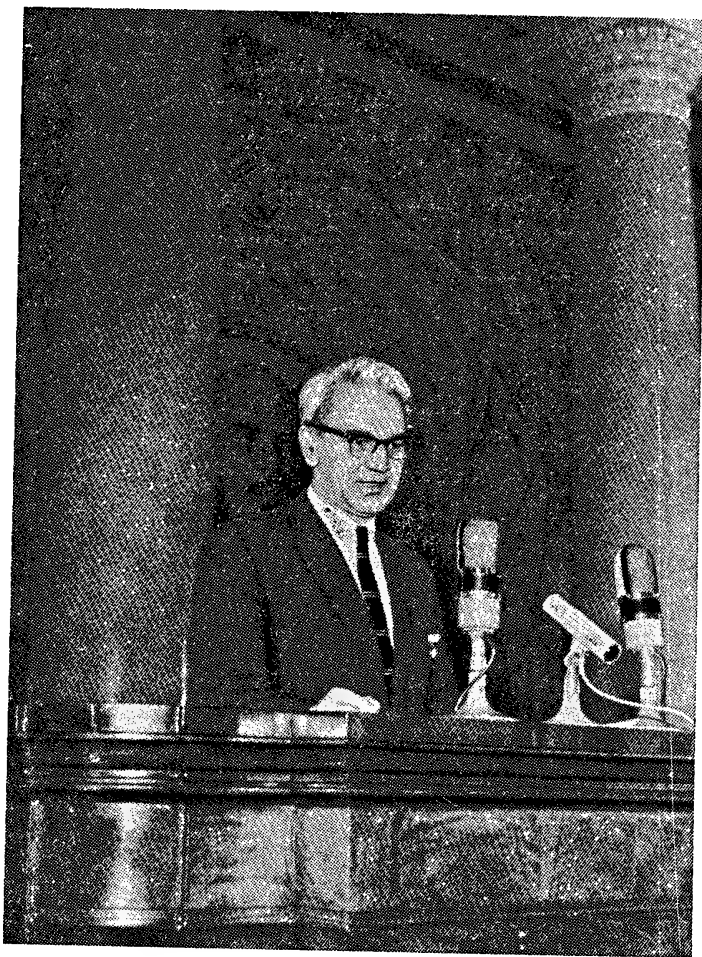
Новые математические средства потребовались также для исследования вопроса о существовании и единственности решений уравне-

ний Навье — Стокса. После исследований Д. Е. Долидзе, изложенных в его монографии «Некоторые вопросы нестационарного течения вязкой жидкости» (1960 г.), где используется преимущественно классический метод функций и тензоров Грина, далеко идущие результаты были получены О. А. Ладыженской и др. Так, О. А. Ладыженская доказала существование по крайней мере одного ламинарного решения нелинейной стационарной задачи о движении вязкой жидкости для любых чисел Рейнольдса при негладких границах. Не перечисляя других результатов, отметим, что их содержание определяется дополнительным указанием того функционального пространства, в котором ищется решение, и что, вообще говоря, речь идет об обобщенных в том или ином смысле решениях. В свою очередь, изучение функциональных пространств, которые приходится вводить при решении задач гидромеханики, не только расширяет область применения функционального анализа, но и обогащает само содержание этой математической дисциплины. К таким же выводам приводит анализ работ (1963, 1966 гг.) О. А. Олейник о существовании решений уравнений пограничного слоя (уравнений Прандтля).

Существенно новые результаты получены в области аналитических методов исследования смешанных задач газовой динамики. Ф. И. Франкль (1943 г.) и С. В. Фалькович (1945 г.) свели задачу об околозвуковом обтекании тел к решению уравнения смешанного типа Трикоми. Несколько позднее (1949 г.) М. А. Лаврентьев и А. В. Бицадзе предложили решение новой краевой задачи для уравнения второго порядка



Акад. Л. И. Седов со своими учениками. Москва, 1959 г.



Выступление акад. М. В. Келдыша на II Всесоюзном съезде механиков. 1964 г.

смешанного типа. Франкль теоретически построил (1955 г.) пример течения со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся скачком уплотнения. Существование и единственность решения этой краевой задачи доказаны А. В. Бицадзе (1956 г.) и Ю. В. Девингталем (1957 г.). Приближенный метод исследования течений с переходом через скорость звука предложил (1949 г.) Л. И. Седов. В области гиперзвуковых течений А. А. Дородницким (1949 г.) и Г. Г. Черным (1955—1957 гг.) разработаны приближенные методы исследования задачи обтекания тонких затупленных спереди тел.

Как известно, в динамике вязкой жидкости фундаментальное значение имело открытие двух типов движения: ламинарного и турбулентного. Для исследования ламинарного движения применимы традиционные методы математической физики. Иначе дело обстоит в теории турбулентности. Оказалось, что здесь необходимы статистические концепции и методы. В этой области советскими учеными сделано и делается многое. На развитие новых математических методов ока-

зали влияние исследования по статистической теории турбулентности А. Н. Колмогорова, М. Д. Миллионщикова, А. М. Обухова и др. Физические представления, из которых исходил Колмогоров, можно было превратить в расчетную теорию только с помощью аппарата теории случайных процессов, созданной в значительной мере им же.

В свою очередь, развитие статистической теории турбулентности поставило новые математические проблемы и стимулировало дальнейшую разработку математического аппарата. Некоторые важные результаты были получены на основании учета размерности величин, входящих в математические соотношения. Методы подобия и размерностей оказались плодотворными и во многих других проблемах (например, в теории сильного взрыва, принадлежащей Л. И. Седову, при решении задач гиперзвукового обтекания тонких и затупленных спереди тел). Большую роль в распространении и развитии этих методов сыграла монография Л. И. Седова «Методы подобия и размерности в механике» (изд. 4-е, 1957 г.).

Многочисленные приближенные приемы, использовавшиеся в механике жидкостей и газов, в ряде случаев способствовали совершенствованию и развитию общих математических методов и получению тех или иных собственно математических результатов. Примером может служить результат С. А. Чаплыгина о том, что можно конформно отобразить любую трехсвязную область на внешность трех отрезков одной и той же прямой, тогда как области n -связные при $n > 3$ уже нельзя отобразить на внешность n отрезков одной прямой. Другой пример — вывод И. М. Гельфандом и К. И. Бабенко условий корректности граничной задачи, поставленной в газовой динамике, для разностной системы, аппроксимирующей соответствующие системы дифференциальных уравнений. Общее значение восходящей к С. А. Чаплыгину идеи построения приближенных решений задач газовой динамики на основе упрощенного закона баротропности подчеркнуто М. В. Келдышем и Л. И. Седовым («Приложения теории функций комплексного переменного к гидродинамике и аэродинамике», 1964 г.).

Наконец, укажем пример несколько иного взаимодействия механики и математики: концепция пограничного слоя дала возможность не только истолковать, но и рассчитать ряд явлений в механике жидкостей и газов, она подсказала плодотворные аналогии в других областях механики, а также в теории уравнений в частных производных.

Математические методы в теории фильтрации

В создании общей теории фильтрации основную роль сыграл фундаментальный труд Н. Е. Жуковского «Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод» (1889 г.). В нем впервые были строго выведены основные дифференциальные уравнения фильтрации.



Н. Н. Павловский.

Интенсивное развитие теории фильтрации в нашей стране началось после Великой Октябрьской социалистической революции в связи с решением больших народнохозяйственных проблем: гидротехнического и мелиоративного строительства, водоснабжения, добычи нефти и газа и др. В 20-х годах в развитии этой теории наметилось два основных направления.

Первое направление — изучение движения грунтовых вод в связи с гидротехническим и мелиоративным строительством, водоснабжением, гидрогеологическими изысканиями для различных целей, водопонижением и т. п. Большую роль в развитии этого направления сыграли работы Н. Н. Павловского. Второе направление относится к технологии добычи нефти и газа. Первые исследования в этом направлении связаны с именем Л. С. Лейбензона — осно-

вателя науки о подземной гидравлике нефти и газа.

В известном труде «Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения» (1922 г.), явившемся первым примером последовательного применения точных методов гидромеханики и теории функций комплексного переменного к решению инженерных гидротехнических задач, Н. Н. Павловский поставил задачу о напорной фильтрации как задачу математической физики и свел ее к смешанной задаче теории потенциала (к частному случаю задачи Гильберта). В двумерном случае он эффективно использовал метод конформных отображений. Им рассмотрены важные примеры решения конкретных задач путем непосредственного использования формулы Шварца — Кристоффеля.

Большую роль в теоретических исследованиях безнапорной фильтрации — широкого класса фильтрационных задач в однородных грунтах со свободной поверхностью — сыграл метод конформных отображений в различных его модификациях. Многие важные практические задачи безнапорной фильтрации решены методом конформных отображений с использованием способа годографа скорости. Этот способ был впервые разработан в теории фильтрации В. В. Ведерниковым (1935 г.) и Н. Н. Павловским (1937 г.) для областей, границы которых содержат депрессионные кривые и участки с краевыми условиями первого и второго рода.

В последнее время метод конформных отображений широко применяется для решения задач так называемой плановой фильтрации, т. е. фильтрации в горизонтальных или слабонаклонных пластах, при этом вертикальные размеры грунтового потока весьма малы по сравнению с его горизонтальными размерами. Для решения задач плановой фильтрации особенно широко используются методы математического

моделирования (работы Н. И. Дружинина, П. Ф. Фильчакова, 1956 г.), различные сеточные интеграторы и ЭЦВМ.

Фундаментальным вкладом в теорию фильтрации являются исследования П. Я. Кочкиной. В них разработан (1938 г.) метод решения фильтрационных задач, основанный на аналитической теории дифференциальных уравнений («Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод», 1942 г.).

В 1941 г. С. Н. Нумеров предложил новый метод решения плоских задач в однородном и неоднородном грунтах, так называемый метод краевых задач теории функций комплексного переменного. По этому методу фильтрационная задача, для которой известна область в одной из трех плоскостей — комплексного переменного z , комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ или функции Жуковского $P = kz - iw$, сводится к задаче Римана — Гильберта. Этот метод был развит в работах Г. Н. Положего (1952 г.).

Для решения фильтрационных задач в слоистом грунте разработан метод интегральных уравнений. Плоская задача фильтрации через два грунта состоит в нахождении двух функций комплексного переменного — комплексных потенциалов $w_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ и $w_2 = \varphi_2 + i\psi_2$, определяющих течение соответственно в первом и втором грунтах, удовлетворяющих кроме соответствующих условий на границе еще и условиям на линии раздела, которые можно взять в виде

$$\frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = \frac{1}{\kappa_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}, \quad \psi_1 = \psi_2.$$

Эта задача в общем случае может быть сведена непосредственно к системе сингулярных интегральных уравнений (М. А. Лаврентьев, И. Б. Погребысский, 1940 г.). Для некоторых частных случаев этой задачи (например, случая двух несимметрично расположенных относительно вертикальной линии раздела точечных шпунтов, случая двух симметрично расположенных плоских флютбетов) С. В. Фалькович построил (1941 г.) решение по особенностям. Для многослойных сред в случае прямолинейных или пересекающихся в одной точке линий раздела слоев при наличии только точечных источников Б. К. Ризенкамппф предложил (1940 г.) строить решение в виде интеграла Фурье, а П. Я. Кочина показала (1947 г.), что такое решение можно построить в случае произвольного числа слоев произвольной мощности с различными коэффициентами фильтраций. Н. М. Герсевановым разработан (1945 г.) метод решения фильтрационных задач, состоящий в сведении их к решению некоторых функциональных уравнений.

Началом развития обратных краевых задач теории напорной фильтрации являются исследования (1953 г.) М. Т. Нужиной, в которых поставлена и решена задача построения подземного контура плотины при условии, что распределение скорости фильтрации задано в виде функции дуговой абсциссы $v = v(s)$ ($0 \leq s \leq L$), где L — длина искомого подземного контура. Задача решена двумя методами. Первый метод состоит в сведении к обратной задаче чисто циркуляционного

обтекания симметричного профиля, второй — в сведении к смешанной краевой задаче для полуплоскости.

Важное значение приобретают качественные исследования дифференциальных уравнений в частных производных. Одно из направлений этих исследований, начало которому было положено в работах М. В. Келдыша (1937 г.) и М. А. Лаврентьева (1937 г.), состоит в исследовании зависимости решений краевых задач от изменений области. С помощью выделения главных частей функций, дающих конформное отображение близких областей, Лаврентьев установил применительно к теории струй первые вариационные теоремы об изменении отображающей функции и ее производной при незначительном изменении контура, ограничивающего данную область. Применив эти результаты при изучении движения грунтовых вод, он сформулировал вариационные теоремы, устанавливающие характер изменения основных элементов фильтрационного потока в зависимости от удлинения шпунтов флютбета. Эти теоремы дают возможность обосновывать и уточнять некоторые приближенные методы решения фильтрационных задач.

Г. Н. Положий разработал (1953 г.) для решения фильтрационных задач метод мажорантных областей. Основная идея метода заключается в замене решений данных краевых задач решениями вспомогательных краевых задач для наиболее простых, так называемых мажорантных областей. С помощью теоремы о сохранении области для линейных эллиптических систем дифференциальных уравнений Положий распространил метод мажорантных областей на решение плоских фильтрационных задач с осевой симметрией в однородной и неоднородной средах.

Развивая основные идеи метода мажорантных областей, И. И. Ляшко установил (1958 г.) некоторые вариационные теоремы фильтрации, позволяющие определять строго математически обоснованные верхние и нижние оценки локальных и суммарных противодавлений, а также фильтрационных характеристик, необходимых для рационального проектирования многшпунтовых флютбетов при криволинейном водоупоре. Развитию и конкретному эффективному применению метода мажорантных областей при решении плоских фильтрационных задач и пространственных фильтрационных задач с осевой симметрией посвящены работы Н. А. Пахаревой (1954 г.), А. А. Глущенко (1962 г.), В. И. Лаврика (1963 г.) и др.

Г. Н. Положему принадлежит (1962 г.) новый метод численного решения краевых задач математической физики, преимущественно связанных с линейными дифференциальными уравнениями, — метод суммарных представлений. С помощью этого метода можно находить численно-аналитические решения при большом количестве узлов сетки в явном виде или в виде формул, содержащих небольшое число параметров.

И. И. Ляшко распространил (1962 г.) метод суммарных представлений на некоторые неограниченные области. Он разработал (1963 г.) аппарат метода суммарных представлений для краевых задач напорной фильтрации, рассматривая их в конечноразностной постановке, а затем распространил этот аппарат на решение фильтрационных задач в сло-

истых грунтах. Позднее И. И. Ляшко и И. М. Великоиваненко исследовали вопрос о построении формул суммарных представлений для уравнения

$$\operatorname{div} [\kappa \operatorname{grad} \varphi] = f$$

при кусочно-постоянной функции κ . Ряд исследований Ляшко и Великоиваненко посвящен (1967 г.) развитию методики некоторых задач фильтрации с использованием быстродействующих вычислительных машин.

Методика применения метода суммарных представлений для решения обратных краевых задач теории фильтрации разрабатывалась (1967 г.) А. А. Глущенко.

В природных условиях параметры фильтрации являются функциями не только координат x, y, z , но и зачастую функциями времени t , поэтому их необходимо рассматривать в условиях неустановившейся фильтрации. Плоскую напорную фильтрацию под гидротехническими сооружениями в условиях неустановившегося режима изучал (1938 г.) Б. Б. Девисон. Он решил исходное уравнение с инерционными числами, считая напоры на границах нижнего и верхнего бьефов заданными функциями времени. П. Я. Кочина рассмотрела (1947 г.) в близкой постановке задачу о перемещении линии раздела между двумя жидкостями различных плотностей (пресной и соленой) также под гидротехническим сооружением.

В точной постановке, т. е. без линеаризации условия на свободной поверхности и без предположения о малом уклонении кривой депрессии от горизонтальной прямой, некоторые задачи плоской безнапорной неустановившейся фильтрации были рассмотрены П. Я. Кочиной (1951 г.), Н. К. Калинин (1948 г.), Л. А. Галиным (1947 г.).

Близка по смыслу к рассмотренной задача о движении границы раздела двух жидкостей. Задача перемещения границы раздела двух жидкостей различной вязкости и плотности в системах нефть — вода и вода — газ впервые была поставлена и исследована (1932 г.) Л. С. Лейбензоном. Затем ею занимались В. Н. Щелкачев (1939 г.), Г. Б. Пыхачев (1939 г.), П. Я. Кочина (1939 г.), И. А. Чарный (1948 г.) и др. Так как точные гидромеханические решения этой проблемы из-за чрезвычайных математических трудностей получить не удастся, то разработаны приближенные способы ее решения. Наиболее распространенным из них является так называемый метод недеформируемых (жестких) линий тока, основанный на допущении, что линии тока при фильтрации двух жидкостей в некоторой области совпадают с линиями тока при фильтрации одной жидкости в той же области при неизменных граничных условиях. Схемы одномерного вытеснения одной жидкости другой в трубках тока постоянного и переменного сечений широко используются при расчетах разработки нефтяных и газовых месторождений. Схема поршневого вытеснения изучена (1955—1957 гг.) В. Л. Даниловым. Им рассмотрены в точной постановке некоторые плоские и пространственные задачи о перемещении границы раздела двух жидкостей с различными вязкостями и удельными весами в



Л. А. Галин.

недеформируемых пластах. Решение сводится к задаче Коши для интегро-дифференциальных уравнений специального типа.

Менее распространенным является метод расчета, основанный на допущении о постоянстве давления (по координатам и времени) на границе раздела, что эквивалентно предположению о пренебрежимо малой вязкости одной жидкости по сравнению с другой. В этом случае согласно П. Я. Кочиной на границе раздела в течение всего времени движения выполняется условие

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + m \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Некоторые точные решения плоских задач стягивания контура нефтеносности при соответствующем граничном условии получены П. Я. Кочиной (1947 г.),

П. П. Куфаревым (1950 г.), Л. А. Галиным (1951 г.) и др.

В последнее время в связи с интенсивным развитием вычислительной и аналоговой техники для решения рассматриваемой проблемы применяются различные вычислительные методы.

В приближенной постановке задачи движение грунтовых вод со слабоизменяющейся свободной поверхностью в условиях неустановившейся фильтрации описывается известным нелинейным уравнением, полученным (1904 г.) Буссинеском при дополнительных предположениях о том, что горизонтальные составляющие скорости по глубине потока в каждый данный момент времени считаются постоянными. С. Н. Нумеров обобщил (1948 г.) уравнение Буссинеска, при этом он учел силы инерции. Лишь в 1960 г. П. Я. Кочиной было показано, что оно включает в себя как условие неразрывности течения, так и граничные условия на свободной поверхности. Строгие автомодельные решения уравнения Буссинеска пока найдены лишь для некоторых частных задач (П. Я. Кочина, 1952 г., Г. И. Баренблатт, 1952 г., и др.). Приближенные решения этого уравнения получены для многих практических задач. Разработаны приближенные способы его решения: метод последовательной смены стационарных состояний, метод осреднения функциональных поправок (Ю. Д. Соколов, 1952 г.), метод интегральных соотношений (Г. И. Баренблатт, 1952 г.) и другие расчетные приемы. Однако наиболее эффективные решения получаются при линеаризации этого уравнения различными способами, предложенными, например, П. Я. Кочиной (1949 г.), Н. Б. Багровым и Н. Н. Веригиным (1949 г.). В результате линеаризации нелинейное уравнение приводится к линейному типа Фурье, хорошо изученному в теории теплопроводности и теории диффузии. Уравнение Буссинеска применено также для приближенного решения некоторых задач неус-

тановившейся фильтрации (С. Ф. Аверьянов, 1949 г.; Ф. М. Бочев, 1966 г.; Н. Н. Веригин, 1949 г.; С. Н. Нумеров, 1966 г.; В. М. Шестаков, 1964 г., и др.).

Уравнение типа Фурье также характеризует упругий режим фильтрации в напорных пластах, обоснование и широкое изучение которой связано главным образом с эксплуатацией нефтяных месторождений. Теория упругого режима была разработана (1946 г.) В. Н. Щелкачевым. Согласно этой теории в задачах о напорных пластах следует учитывать упругие свойства жидкости и горных пород, которыми при изучении потоков со свободной поверхности обычно пренебрегают. Позднее эта теория была обобщена на гидравлически связанные неоднородно-слоистые пласты.

Математические методы в теории механизмов

1

Развитие математических методов в теории механизмов

Приложения математики к проблемам теории механизмов ведут свое начало от П. Л. Чебышева. Разработанный им в целях синтеза механизмов метод приближения функций с помощью полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, имеет непосредственное прикладное значение, он послужил также основой для построения ряда весьма тонких математических теорий. В последней четверти XIX в. выделяется как отдельное научное направление кинематическая геометрия, развивается применение дифференциальной геометрии к задачам теории механизмов, разрабатываются графические методы исследования, в том числе методы графического дифференцирования и интегрирования. Оливье, а вслед за ним Х. И. Гохман разрабатывают геометрическую теорию пространственного зацепления. Д. Н. Зейлигер, И. М. Занчевский, А. П. Котельников начинают создавать новый метод специально для решения задач пространственной кинематики — винтовое исчисление.

В конце XVIII в. Уатт изобрел механизм для приближенного преобразования прямолинейного движения поршня паровой машины в криволинейное колебательное движение коромысла. Сам он считал шарнирный четырехзвенник своим лучшим изобретением. В XIX в., особенно во второй его половине, теория шарнирных механизмов становится одной из наиболее существенных частей общей теории механизмов, ее «пробным камнем», на котором испытывается пригодность и общность математических методов в применении к машинам. Таким образом, теория машин и механизмов, или прикладная механика, как часто она тогда называлась, из описательной науки превратилась в науку расчетную.



А. П. Котельников.

В конце XIX в. П. О. Сомов разработал ряд вопросов, относящихся к теории ускорений высших порядков, теории структуры механизмов и др.

А. П. Котельников опубликовал (1895 г.) работу «Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике», в которой для описания винтов применяются специальные комплексные числа, предложенные Клиффордом. Эти числа состоят из вещественной части и произведения вещественной части и ω , причем $\omega^2 = 0$. Котельников сформулировал «принцип перенесения», суть которого состоит в установлении соответствия между операциями векторного и винтового исчисления. Одно уравнение винтового исчисления заменяет шесть скалярных уравнений.

В начале XX в. геометрическими вопросами теории механизмов занимался Н. Е. Жуковский. Им, в частности, был предложен очень изящный графический метод решения общей задачи кинестатики, известный под названием жесткого рычага Жуковского. В. П. Горячкин начал разработку вопросов динамики сельскохозяйственных машин. Предложенные им методы впоследствии были распространены на исследование рабочих машин других отраслей промышленности. В 1919 г. был издан его классический труд «Земледельческая механика».

К 1914—1918 гг. относится публикация в «Трудах Петроградского политехнического института» мемуаров Л. В. Ассур, ученика Н. Е. Жуковского. В своих исследованиях Ассур пользовался главным образом методами проективной геометрии и топологии. Он установил также, что задача теории механизмов по сути является задачей топологической. Им разработаны методы кинематического и кинестатического исследований механизмов. Примечательно, что им были заложены основы кинестатического исследования с несколькими степенями свободы. Для определения кинематических параметров незамкнутых кинематических цепей Ассур предложил метод особых точек. Для решения кинематических задач с замкнутыми контурами он разработал метод геометрических мест.

Исследования пространственных механизмов были начаты Н. И. Мерцаловым. По совету В. П. Горячкина он в 1922 г. начал читать на машиностроительном факультете Петровской сельскохозяйственной академии курс теории пространственных механизмов, в котором применял методы начертательной геометрии.

В 20-х годах машиноведами были решены некоторые конкретные задачи, а также выдвинуты принципиальные положения теории механизмов. Предметом их исследования являлись учение о структуре

и кинематика плоских и пространственных механизмов. Для решения поставленных задач применялись геометрические и аналитические методы. А. В. Верховскому принадлежит (1925 г.) полное математическое решение задачи о пространственном шарнирном четырехзвеннике (механизм Бенетта — Верховского) с вращательными кинематическими парами, оси которых не параллельны и не пересекаются. А. П. Котельников и Д. Н. Зейлигер продолжали свои исследования в области кинематической геометрии. Работа А. П. Котельникова «Точки Бурместера, их свойства и построение» (1927 г.) посвящена определению такой точки, пять положений которой располагаются на одной и той же окружности. Вначале Котельников излагает свойства строфоиды, играющей большую роль в исследовании точек Бурместера. Затем он выводит формулы для ускорений различных порядков точки подвижной плоскости, находит условия соприкосновения различных порядков окружности с траекторией точки и получает уравнения, определяющие положения точек Бурместера. Свойства точек Бурместера Котельников исследует с помощью метода квадратичных преобразований строфоид, на которых лежат эти точки и соответствующие им центры кривизны, в более простые линии. Он изучает также случаи вырождения строфоид. И. Е. Огиевский, используя понятие топологического отображения, выводит (1927 г.) теорему о том, что при движении плоскости «самой в себе» тождество

$$u(v_{\mu_1}, v_{\mu_2}, \dots, v_{\mu_n}; v_{F_1}, v_{F_2}, \dots, v_{F_n}) = 0,$$

где v_{μ_i} и v_{F_i} — плоские векторы, принадлежащие соответственно двум плоскостям, отображаемой и отображающей, а u -функция, устанавливающая между ними взаимное однозначное соответствие, влечет за собой тождество

$$u(-v_{\mu_1}, -v_{\mu_2}, \dots, -v_{\mu_n}; -v_{F_1}, -v_{F_2}, \dots, -v_{F_n}) = 0.$$

Плоскость, содержащая вектор v_{F_i} , подвижная при прямом движении и неподвижная при обратном, а плоскость векторов v_{μ_i} неподвижная при прямом движении и подвижная при обратном. Ряд работ посвящен применению функций комплексного переменного при решении плоской задачи теории механизмов. Это было связано с поисками общего метода решения задач, относящихся к механическому изображению функциональных зависимостей.

В 30-х годах продолжалось развитие геометрических методов для решения задач кинетических механизмов. Общие методы решения



Л. В. Ассур.



И. Е. Огиевецкий.

задач разрабатывали И. И. Артоболевский и Н. Г. Бруевич. Бруевич предложил (1935 г.) новый оригинальный метод решения задач плоской кинематики с помощью векторных уравнений; впоследствии этот метод был распространен им на пространственные механизмы. Начиная с середины 30-х годов интерес исследователей привлекает задача расчета зубчатых зацеплений, в частности геометрическая теория пространственных зубчатых зацеплений.

Значительные усилия машиноведов были направлены на развитие вопросов структуры и классификации механизмов. В развитие идей Л. В. Ассура разрабатывались классификационные системы (И. И. Артоболевский, В. В. Добровольский), основанные на конкретных геометрических и топологических идеях. И. И. Ар-

тоболевский предложил геометрический метод кинематического анализа сложных кинематических цепей, имеющих замкнутый контур. Этот метод заключается в определении особых точек с помощью приемов проективной геометрии. Ему принадлежит решение ряда задач дифференциальной геометрии в применении к основным проблемам кинематики механизмов. Г. Г. Баранов разработал (1937 г.) новый метод кинематического анализа общего семизвенного пространственного механизма, основанный на применении методов начертательной геометрии. Им поставлена задача о построении планов положений этого механизма и выяснены ее принципиальные трудности.

К 30-м годам относится начало изучения задач синтеза механизмов, в которых применялись как геометрические, так и алгебраические методы. Продолжались исследования по построению механизмов для воспроизведения определенных математических зависимостей. И. М. Рабинович предложил (1934 г.) механизм для решения системы линейных уравнений. В. П. Каминский построил (1939 г.) теорию нового коникографа.

Начиная с 1937 г. публикуются работы Н. Г. Бруевича, в которых заложены основы теории счетно-решающих устройств и связанной с ней теории ошибок. Им построены механизмы для решения алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Методы кинематической геометрии разрабатывались (1939 г.) И. И. Артоболевским. Он показал, что любое заданное плоско-параллельное движение можно воспроизвести совокупностью центроид в абсолютных и относительных движениях, а также создал теорию передачи движения с помощью взаимоггибаемых кривых, которая была положена в основу проектирования кулачковых и зубчатых механизмов.

Значительные результаты получены по созданию математических методов для решения задач пространственной кинематики механизмов. В 1934 г. была издана «Комплексная линейчатая геометрия» Д. Н. Зейлигера, в которой разрабатывались вопросы теории винтового исчисления. В 1937 г. этими вопросами начал заниматься С. Г. Кислицын. Он ввел (1938 г.) понятие винтового верзора, под которым подразумевается символический оператор. С помощью этого символического оператора можно осуществить ортогональное преобразование троек винтов между собой в трехмерном пространстве. С. Г. Кислицын развил теорию верзоров и применил ее при исследовании пространственных механизмов. Так методы аффинной геометрии начали использоваться в винтовом исчислении.



Н. Г. Бруевич.

В связи с развитием в 30-х годах отечественного машиностроения и повышением быстроходности машин возрос интерес к вопросам динамики машин. Развивая идеи Л. В. Ассура, Н. Г. Бруевич решил ряд задач кинестатики плоских механизмов (1935 г.), а затем и пространственных механизмов (1937, 1938 гг.). Некоторые задачи силового расчета механизмов были решены (1933 г.) И. И. Артоболевским. Им также обобщены (1939 г.) результаты исследований в области кинестатики плоских механизмов. Вопросы статики плоских цепей рассматривались Г. Г. Барановым (1935 г.) и В. В. Добровольским (1936 г.). В этой области применялись методы начертательной геометрии и векторного анализа.

В начале 40-х годов дальнейшее развитие получили методы кинематического анализа механизмов. Если до 40-х годов в основе этих методов лежали графические и графо-аналитические приемы проективной, начертательной, дифференциальной и кинематической геометрии, а аналитические методы исследования применялись редко, то теперь быстро растет роль аналитического аппарата. Для решения задач кинематики механизмов привлекаются векторное, тензорное и винтовое исчисления, методы теории матриц, а также другие методы современной математики.

В. А. Зиновьев развил (1939, 1949 гг.) своеобразный аналитический метод расчета плоских и пространственных механизмов путем составления уравнений замкнутых векторных контуров, заменяющих кинематическую схему механизмов. Свойства шатунных кривых исследовал (1944 г.) В. В. Добровольский. Он вывел уравнения для некоторых геометрических мест, связанных с особыми точками шатунных кривых. Известная теорема Робертса — Чебышева о существовании трехшарнирных четырехзвенных механизмов, описывающих одну и



С. Г. Кислицын.

ту же шатунную кривую, была дополнена З. Ш. Блохом. В 1940 г. вышла его работа, посвященная развитию исследований П. Л. Чебышева в области приближенного синтеза шарнирных механизмов, где восстановлены промежуточные выкладки и доказательства и решен ряд новых задач, в частности указано на существование еще трех шестизвенных механизмов, описывающих одну и ту же шатунную кривую. И. И. Артоболевский и Н. И. Левитский показали (1945 г.), что шестизвенных шарнирных механизмов, описывающих одну и ту же шатунную кривую, существует не три, а бесконечное множество. Кроме того, они доказали, что шатунную кривую шестизвенного механизма можно в общем случае воспроизвести в различных шестизвенных механизмах. Левитский рассмотрел (1948 г.)

вопросы о порядке шатунных кривых многозвенных механизмов. С помощью рекуррентных соотношений он установил зависимость между числом звеньев механизмов и максимальным порядком симметричных и несимметричных шатунных кривых. М. В. Семёнов исследовал (1947 г.) шатунные кривые четырехзвенных механизмов с поступательными парами и разработал новый метод, позволяющий определить метрическое соотношение между звеньями механизмов, воспроизводящих заданные кривые. Метод основан на разложении уравнений шатунных кривых в гармонические ряды.

В 1944 г. была опубликована монография И. И. Артоболевского, З. Ш. Блоха и В. В. Добровольского «Синтез механизмов», в которой подведены итоги исследований в области геометрических и аналитических методов синтеза как в СССР, так и за рубежом.

Разрабатывались вопросы теории полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, в применении к приближенному синтезу механизмов. В этом направлении работали З. Ш. Блох, Н. И. Левитский, Я. Л. Геронимус и др. З. Ш. Блох предложил вариант метода Чебышева, заключающийся в следующем. Пусть точка, принадлежащая механизму, воспроизводит некоторую кривую

$$x = \Phi_1(t; p_1, p_2, \dots, p_n), \quad y = \Phi_2(t; p_1, p_2, \dots, p_n),$$

а уравнение искомой кривой, приближение к которой выполняется механизмом, имеет вид

$$F(x, y) = 0.$$

Тогда, подставляя в это уравнение значения x и y , получаем функцию, тождественно не обращающуюся в нуль. Параметры p_i , зависящие от размеров механизма, подбираются при условии, что функция наименее уклоняется от нуля на некотором определенном условиях

работы механизма отрезке. Исследования Блоха были завершены монографией (1948 г.), в которой, в частности, решены некоторые задачи синтеза кривошипно-шатунных и кривошипно-кулисных направляющих механизмов. Н. И. Левитский в монографии, посвященной синтезу механизмов по Чебышеву (1946 г.), обобщил идеи Чебышева и ввел понятие о взвешенном приближении. В его монографии «Проектирование плоских механизмов с низшими парами» (1950 г.) к задачам синтеза механизмов применяется метод наилучшего взвешенного среднеквадратичного приближения. Для этого Левитский минимизирует интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t) \{f(t; p_1, p_2, \dots, p_n)\}^2 dt,$$

где $p(t)$ — некоторый вес, или сумму

$$\sum_{i=1}^N p(t_i) \{f(t_i; p_1, p_2, \dots, p_n)\}^2,$$

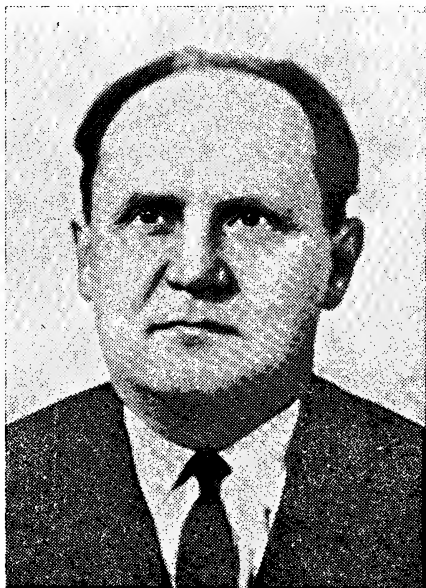
где t_i — некоторые выбранные узлы.

В работах И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского, опубликованных в 1947 г., приведены модели около 80 механизмов Чебышева с подробным описанием и исчерпывающим комментарием.

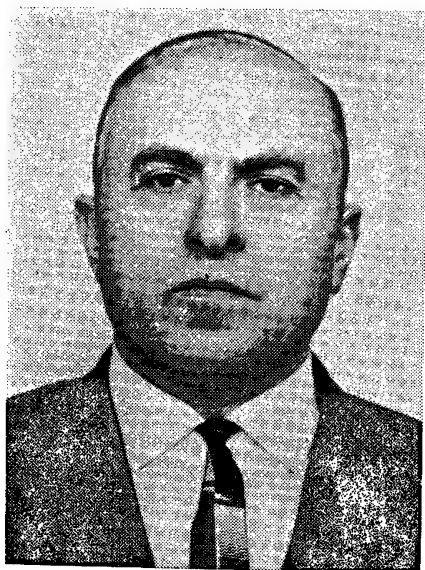
В 40-х и начале 50-х годов были предложены также другие методы приближенного синтеза механизмов. Разрабатывались методы, в которых нашли применение свойства тригонометрических рядов. При решении задач синтеза плоских механизмов применялись комбинированные методы, представляющие собой сочетание метода геометрических мест с методами, основанными на теории приближения функций. К этому направлению относятся, в частности, работы С. А. Черкудинова. Я. Л. Геронимус, ряд работ которого посвящен теоретическим вопросам чебышевского приближения, применил метод Чебышева при решении общей задачи динамического синтеза. Он сделал подбор (1947—1952 гг.) противовесов, обеспечивающих наилучшее уравнивание механизма. Е. Л. Новодворский и И. Ш. Пинскер применили (1951—1953 гг.) к задачам синтеза шарнирных механизмов теорию интерполирования.



В. А. Зиновьев.



Н. И. Левитский.



Д. С. Тавхелидзе.



О. Г. Озол.

Существенно продвинулось вперед решение задач плоской и пространственной кинематики механизмов. Геометрические методы были применены Д. С. Тавхелидзе, А. А. Тамамшевым, С. И. Гамрекели, В. М. Январашвили (в исследованиях, относящихся к кинематике пятизвенных механизмов). Для изучения пространственных механизмов Д. С. Тавхелидзе использовал основные теоремы начертательной геометрии и предложил оригинальный метод построения положений их звеньев. Применив геометрические методы, он разработал методы расчета плоских механизмов с двумя степенями свободы. Г. А. Джабуа, пользуясь методами аналитической геометрии в пространстве, исследовал четырехзвенные пространственные механизмы. В частности, он получил некоторые зависимости для сферического и плоского четырехзвенных механизмов. В. М. Январашвили с помощью геометрических методов решил ряд задач теории сферических механизмов, а также изучал теорию пятизвенного шарнирного механизма. О. Г. Озол использовал методы топологии и теории чисел для получения аналитических соотношений между структурными параметрами кинематических цепей. Им были предложены новые структурные формулы механизмов, разработан универсальный аналитический метод кинематического расчета плоских механизмов — метод треугольников для применения на вычислительных машинах, позволяющий просто решать задачи метрического синтеза механизмов.

Начиная с 40-х годов внимание исследователей все более привлекают проблемы теории пространственных механизмов. Существенные трудности решения этих задач обусловили появление целого ряда методов, основанных на геометрических и аналитических идеях. Геометрические методы развивались В. А. Зиновьевым, Ф. М. Диментбергом, позднее — П. А. Лебедевым. Аналитические методы применялись С. Г. Кислицыным, Ф. Л. Литвиным, М. Д. Злотопольским, Л. П. Рифтиным, Ю. Ф. Морошкиным и др.

В. А. Зиновьев в монографии «Пространственные механизмы с низшими парами, кинематический анализ и синтез» (1952 г.), а также в

ряде других работ распространил методы, разработанные им для плоских механизмов, на пространственные механизмы. Эти методы основаны на аппарате аналитической геометрии, и в частности на замкнутых векторных контурах в трехмерном пространстве. Ф. М. Диментберг разработал своеобразный метод исследования положений и перемещений пространственных механизмов, в основу которого положено применение формулы Родрига конечного поворота к бивекторам. Суть метода состоит в следующем. Задаются схема механизма, его линейные и угловые параметры и функции движения ведущих звеньев. Искомыми являются комплексные углы между звеньями, представляющие собой вещественные углы относительного поворота и относительное поступательное перемещение звеньев. Раздельно составляются уравнения замкнутости продольных осей симметрии звеньев, соединенных в кинематические пары, и уравнения, определяющие структуру геометрических связей звеньев.

Метод С. Г. Кислицына основан на теории винтовых аффиноров. В работе Кислицына, опубликованной в 1953 г., он применен для вывода уравнения теоретического профиля зуба, нарезаемого эвольвентной фрезой. Здесь связываются с различными звеньями механизма координатные системы, которые и преобразуются с помощью произведения аффиноров. Таким образом, в теории механизмов были применены методы тензорного и матричного исчислений. Это нововведение оказалось весьма плодотворным: в 50—60-х годах как в отечественной, так и в зарубежной науке методы тензорного и матричного исчисления получили широкое распространение. С. Г. Кислицын развил (1954—1956 гг.) их и применил для определения положения сложных пространственных механизмов.

Ф. Л. Литвин, М. Д. Злотопольский и Л. П. Рифтин применили (1953—1958 гг.) методы винтового, матричного и тензорного исчисления для исследования пространственных механизмов, в частности кулачковых (Л. П. Рифтин), и теории пространственных зацеплений (Ф. Л. Литвин, М. Д. Злотопольский). Ф. Л. Литвин применил матрицы 4-го порядка, используя возможности совмещенных операций сдвига и вращения координатных систем при преобразовании последних. Ю. Ф. Морошкин использовал (1952, 1954 гг.) аппарат матричного исчисления для анализа механизмов. В частности, он решил несколько конкретных примеров. Для определения параметров движения многозвенной кинематической цепи Морошкин составляет два матричных уравнения, которые он назвал основными уравнениями геометрии механизмов. Эти уравнения имеют вид

$$\alpha^{(0,n)} = \prod_{v=1}^n \alpha^{(v-1,v)},$$

$$x_0^{kn} = \sum_{v=1}^n \left(\prod_{v'=0}^1 \alpha^{(v'-1,v')} \right) x_{v-1}^{kv},$$

где $\alpha^{(-1,0)} = E$ — единичная матрица.

П. А. Лебедев предложил (1961—1963 гг.) аналитический метод исследования пространственных механизмов с низшими и высшими кинематическими парами. Метод состоит в том, что для каждой двухповодковой кинематической группы выбирается одна подвижная система координат. Тригонометрические функции преобразования координат из одной системы в другую выражаются алгебраически через параметры двух точек, определяющихся в подвижном и неподвижном пространствах. Все найденные по этому методу параметры движения механизмов выражаются алгебраическими уравнениями в параметрической форме.

Ряд работ посвящен вопросам проектирования механизмов, предназначенных для точного воспроизведения заданных кривых. В цикле статей (1951 г.) И. И. Артоболевский предложил механизмы для воспроизведения определенных математических зависимостей. Эти исследования были продолжены им (1955, 1956 гг.). В частности, он разработал некоторые новые точные направляющие механизмы.

Некоторые механизмы предложил (1957 г.) В. А. Шамбуров. Общая теория механизмов для образования плоских кривых разработана (1950 г.) В. В. Добровольским. Добровольский также занимался (1951 г.) отысканием новых механизмов подобного назначения. Вопросы точного воспроизведения заданного движения изучал Н. Г. Бруевич. Он определил понятие ошибок положения и перемещения механизма как разницу в положении и перемещении ведомых звеньев реального и идеального механизмов при одинаковых положениях и перемещениях ведущих звеньев. При этом ставилось условие, что первичные ошибки невелики, т. е. можно считать линейной зависимость ошибок механизма от его первичных ошибок. Оказалось, что тогда эту зависимость можно получить с помощью так называемого преобразованного механизма и картины малых перемещений. Так как величины первичных ошибок случайны, то разработка вопроса носит теоретико-вероятностный характер. Н. Е. Кобринский выполнил (1944—1946 гг.) исследования о кинематических и динамических ошибках механизмов.

Значительные работы посвящены изучению и развитию теории точности, а также анализу и синтезу счетно-решающих машин. Это исследование Н. А. Бородачева, И. С. Брука, Л. И. Гутенмахера, Н. Е. Кобринского, Л. А. Люстерника. Результаты исследований в области построения механизмов для воспроизведения определенных функциональных зависимостей изложены в монографиях В. В. Добровольского (1953 г.) и И. И. Артоболевского (1959 г.).

В 50—60-х годах в связи с созданием высокопроизводительных технологических машин автоматического действия в самых различных отраслях промышленности повысился интерес к теории кулачковых механизмов. Появилось много работ, посвященных изучению и проектированию кулачковых механизмов: работы И. И. Артоболевского (1946 г.), Л. Н. Решетова (1950, 1951, 1955 гг.), С. Н. Кожевникова (1949, 1954 гг.), Я. Л. Геронимуса, Н. И. Левитского (1954—1956, 1964 гг.), К. В. Тира (1958, 1960 гг.).

Синтезу механизмов посвящены монография С. А. Черкудинова «Синтез плоских шарнирно-рычажных механизмов» (1959 г.), где содержатся результаты автора по применению комбинированных методов геометрического синтеза и чебышевской теории приближения функций полиномами, исследование И. И. Артоблевского, Н. И. Левитского и С. А. Черкудинова «Синтез плоских механизмов» (1959 г.), в котором систематизированы основные результаты советских и зарубежных ученых в области синтеза плоских механизмов, монография Я. Л. Геронимуса «Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов» (1962 г.), в которой изложены элементы теории алгебраических кривых и проективной, дифференциальной и кинематической геометрии, применяющиеся в геометрических методах синтеза.



В. А. Гавриленко.

В решении задач анализа и синтеза механизмов значительную роль играют современные электронные цифровые машины. С их помощью удалось решить многие задачи и составить ряд справочных таблиц и номограмм для практического пользования. В этой области работали Н. И. Левитский (1963 г.), И. Б. Людмирская (с 1960 г.), К. Х. Шахбазян (1963 г.), Л. Б. Майсюк (1964 г.) и др. Н. И. Левитский получил общее решение задачи синтеза шарнирных механизмов, используя метод квадратического приближения функций и оригинальный способ составления аналитического выражения функции, характеризующей отклонение от заданной зависимости. Эти результаты были распространены им на многозвенные и пространственные механизмы, а также на механизмы с двумя степенями свободы, а с помощью названного метода рассчитаны и составлены таблицы для проектирования некоторых типов механизмов.

Советские ученые продолжали развивать теорию зубчатых зацеплений. Первоначальные исследования Е. А. Чудакова, Л. Н. Решетова, Н. И. Колчина, Х. Ф. Кетова и С. Н. Кожевникова были направлены на выяснение различных сторон кинематики зубчатых зацеплений. Исходной оставалась методика, разработанная в конце XIX в. Х. И. Гохманом. Я. С. Давидов (1950 г.), Ф. Л. Литвин (1953 г.) и В. А. Шишков (1951 г.) упростили ее и разработали кинематический метод исследования пространственных зацеплений. Для этого Литвин применил (1955 г.) винтовое и матричное исчисления. Винтовое исчисление применялось также М. Д. Злотопольским и другими учеными. В «Теории зубчатых зацеплений» (1960 г.) Ф. Л. Литвина изложены результаты автора, а также других исследователей, применяющиеся к пространственным зубчатым передачам.



М. А. Крейнес.

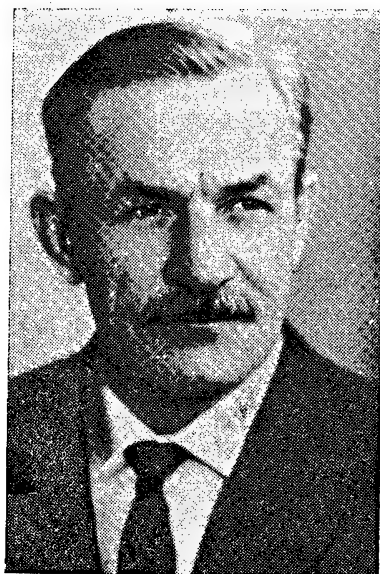
Классификация зубчатых передач была разработана В. А. Гавриленко. Он развивал вопросы геометрии зубчатых механизмов. В его монографиях (1949, 1956, 1962, 1969 гг.) геометрические методы исследования зубчатых механизмов нашли весьма полное отражение. Много работ посвящено теории передаточных зубчатых механизмов. М. А. Крейнес занимался вначале вопросами топологии и теории квазипериодических отображений, затем проблемами синтеза сложных зубчатых систем. Он выделил класс «регулярных зубчатых механизмов», между угловыми скоростями звеньев которых имеются лишь линейные соотношения, и разработал метод выбора схем подобных механизмов, а также схему решения задач о построении механизма, воспроизводящего некоторую систему линейных одно-

родных уравнений. При решении Крейнес пользовался геометрическими методами. Ряд работ посвящен исследованию и геометрическому расчету передач. М. А. Крейнесом и М. С. Розовским решены задачи синтеза планетарных механизмов. Их исследования сведены в монографии «Зубчатые механизмы. Математические основы выбора оптимальных схем» (1965 г.). Некоторые задачи теории зубчатых механизмов рассмотрены Л. Н. Решетовым (1935—1963 гг.), В. Н. Кудрявцевым (1940—1960 гг.) и Т. С. Жегаловой (1957 г.).

Начиная с 50-х годов особое значение приобретают вопросы динамики машин. Необходимость уточненного расчета схем механизмов обусловила появление исследований о механизмах, максимально приближающихся к реальным. С. Н. Кожевников, классифицируя соответствующие задачи теории механизмов, устанавливает, что их можно подразделить на три группы: 1) механизмы с твердыми и гибкими нерастяжимыми звеньями (они исследуются методами теоретической механики); 2) механизмы с твердыми и упругими звеньями (их движения исследуются с помощью методов теории упругости для учета деформации звеньев); 3) гидравлические и пневматические механизмы (для исследования применяются методы гидро- и аэродинамики).

Итак, при исследовании динамики машин применялись сначала несложные аналитические и геометрические методы. Весьма большое значение имели графо-аналитические методы. В связи с усложнением задач изменился и соответствующий исследовательский математический аппарат. В исследованиях применяются дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, методы теории колебаний, в том числе нелинейной механики, динамика тела переменной массы, функциональный анализ. Особое значение приобрели экспериментальные методы.

Разрабатывались вопросы режима движения машин под действием заданных сил. В. А. Зиновьевым (1948 г.) и М. А. Скуридиным (1951 г.) найдено приближенное решение задачи о движении машинного агрегата под действием сил, зависящих от положения, скорости и времени. И. И. Артоболевский обобщил (1951, 1952 гг.) эту задачу, получил общее уравнение движения машинного агрегата для таких сил и показал его существенную нелинейность. Совместно с Б. М. Абрамовым им была также найдена (1948 г.) новая форма уравнения машинного агрегата под действием сил, зависящих от положения и скорости. С. Г. Кислицын исследовал (1965 г.) установившееся движение машины при силах, зависящих от скорости и положения звена привода. В ряде работ было предложено решение уравнения движения машинного агрегата.



С. Н. Кожевников.

М. И. Бать, исследуя движения, зависящие от скорости и положения звена привода, решает это уравнение путем разложения в ряд по малому параметру, выполняя затем интегрирование с помощью степенных рядов. А. П. Бессонов разработал граничный метод решения этого же уравнения (1953 г.) и провел общее исследование уравнения качественным методом, изучив при этом его особые точки (1958 г.).

Характерной чертой исследований в области динамики механизмов начиная со второй половины 50-х годов является учет реальных условий работы машин, а также учет некоторых свойств звеньев машин и свойств связей, зависящих от соотношений звеньев. Повысилось значение экспериментальных методов, с одной стороны, и математического аппарата, — с другой.

Решались и специальные задачи. Так, динамическое исследование механизмов с двумя степенями свободы при всех жестких звеньях было выполнено (1939 г.) В. В. Добровольским. Он применил уравнения Лагранжа второго рода. Б. М. Абрамов при исследовании динамики плоских механизмов с двумя степенями свободы использовал (1951 г.) уравнения Аппеля.

Вибрационным и виброударным системам посвящены работы А. Е. Кобринского, В. О. Кононенко и их сотрудников.

Расширение фронта автоматизации технологических процессов в различных отраслях промышленности и стремление к максимальной интенсификации этих процессов выдвигают новые задачи в области динамики машин. Так, в самых различных отраслях промышленности встречаются механизмы, в состав которых входят звенья с переменными массами (в ряде случаев следует учитывать также обрабатываемый продукт). У этих звеньев меняются не только массы, но и момент инерции и положение центра тяжести. Для динамических расчетов таких



И. В. Мещерский.



А. П. Бессонов.

механизмов требуется изготовление потока математических моделей.

Основы динамики машин тела переменной массы были заложены И. В. Мещерским, а затем развиты А. А. Космодемьянским, Ф. Р. Гантмахером и Л. М. Левиным, В. С. Новоселовым и др. На необходимость учета изменения массы при динамическом расчете сельскохозяйственных машин указывал В. П. Горячкин. Было замечено, что это относится также к некоторым машинам горнодобывающей, металлургической, строительной, полиграфической и других отраслей промышленности.

Для учета изменений массы И. И. Артоболовский и А. П. Бессонов разработали (1962 г.) метод затвердевания систем. С помощью этого метода найдены возможности для использования приемов общей динамики (А. П. Бессонов, 1962, 1964 гг.). В. Т. Костицын предложил (1956 г.) графический метод решения задач этого типа. А. П. Бессонов и В. В. Дубровский (1965 г.), А. П. Бессонов и Э. Е. Сильвестров (1965 г.) исследовали колебания систем с переменной массой. Задача динамики тел переменной массы для машин швейного производства решена (1965 г.) В. О. Езинавили. Результаты исследований в этой области динамики за последние годы изложены в монографиях В. А. Зиновьева и А. П. Бессонова (1964 г.) и А. П. Бессонова (1967 г.).

А. П. Бессоновым разработан метод решения нелинейного дифференциального уравнения движения машинного агрегата в фазовых координатах. Он исследовал особые точки уравнения движения и про-

анализировал устойчивость равновесия механизмов. В работах по динамике тела переменной массы Бессонов использовал, в частности, идеи П. Л. Чебышева о наилучшем приближении функций.

Оказалось возможным применить к исследованию машин методы неголономной механики. Некоторые механизмы с неголономными связями изучены А. И. Кухтенко (1954, 1955 гг.), В. С. Новоселовым (1957 г.), Г. С. Погосовым (1962 г.).

Основной тенденцией развития современной динамики машин является исследование машин в действительных условиях. В этом направ-

лении работают С. Н. Кожевников, А. Н. Голубенцев, А. Е. Кобринский и др. С. Н. Кожевниковым составлены дифференциальные уравнения динамики машин с упругими звеньями, которые в настоящее время служат основой для расчета динамического режима машин. А. Н. Голубенцев предложил новую фундаментальную систему решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, не содержащих характеристических чисел. Решение дифференциальных уравнений при этом выражается через их коэффициенты. Такая система позволяет решать сложные задачи динамического синтеза машин. Переход к безразмерному времени и безразмерным коэффициентам дифференциальных уравнений динамики машин приводит к тому, что становится возможным многошаговый перебор на ЭВМ. Тем самым численно решается динамическая задача минимакса. Методы теории дифференциальных уравнений и дискретного анализа применяет в своих исследованиях в области теории механизмов с упругими связями А. Е. Кобринский.

Выше упоминались исследования Я. Л. Геронимуса в области применения теории полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, к задачам динамики машин. Эти методы были распространены им на задачи уравнивания вращающихся масс. Он применял к задачам динамики также методы римановой геометрии.

Одним из эффективных средств исследования динамики и транспортирования машин является метод моделирования проходящих в них процессов с помощью математических машин. Электронные моделирующие устройства их применены (1961, 1963 гг.) С. Н. Кожевниковым и его сотрудниками при исследовании динамики тяжелого металлургического оборудования. С. Н. Кожевников поставил (1965 г.) задачу о математическом описании динамики некоторых типов бесступенчатых передач в форме, пригодной для анализа на электронных моделирующих установках.

В области теории автоматов для исследования зависимости производственных автоматов от структуры линий были применены методы теории вероятности. В этом направлении работали А. Д. Епифанов (1964 г.), А. П. Владзиевский и Ю. Б. Эршмер (1968 г.).



А. И. Кухтенко.



А. Н. Голубенцев.

Применение теории функций комплексного переменного

Для аналитического исследования плоской фигуры в ее плоскости и плоского механизма обычно пользуются методом координат. Однако его применение связано со значительными трудностями. По кинематическим условиям задачи приходится составлять большое количество уравнений, из которых надо исключать все вспомогательные параметры, что не всегда просто. Для выражения с помощью шарнирных механизмов различных математических зависимостей требуется более строгий математический аппарат. Таким аппаратом является примененная впервые в начале XX в. Дарбу теория функций комплексного переменного. Дарбу использовал для исследования шарнирного четырехзвенника комплексные переменные с модулем, равным единице. В кинематике механизмов рассматривается целый ряд многозвенных механизмов, с помощью которых осуществляются элементарные конформные преобразования: перенос, аффинное преобразование, инверсия. Метод комплексного переменного является аналитическим методом, наиболее приспособленным для решения кинематических задач плоских механизмов и допускающим более широкую постановку вопроса.

В 20-х годах советские ученые начали разрабатывать методы применения комплексных переменных при решении задач кинематики плоских механизмов. В 1928 г. вышла работа Н. В. Оглоблина «Некоторые применения комплексных переменных в кинематике». Оглоблин ввел параметрические уравнения линий на плоскости $z = F(t)$ (где $z = x + iy$, t — вещественный параметр), рассмотрел движение неизменной плоской системы в ее плоскости, задав движение осей функциональной зависимостью $\xi = f(u)$. Кинематический характер движения проявляется, если известна зависимость u от времени. Оглоблин показал, что задача о построении механизма, воспроизводящего данную кривую, сводится к построению механизма, воспроизводящего зависимость между двумя комплексными переменными u и v . В работе подробно рассмотрены простейшие механизмы с точки зрения возможности построения зависимости между u и v .

Опубликованная в 1923 г. работа Н. В. Оглоблина «Применение комплексных величин к теории шарнирных цепей» содержит несколько конкретных задач о шарнирном четырехстороннике. Впервые было доказано, что шарнирную цепь с двумя степенями свободы можно использовать в качестве конформного трансформатора движения, которое описывается аналитической функцией $w = f(z)$. Доказано также, что шарнирная цепь с одной степенью свободы может давать лишь конформные трансформации вида $w = \beta z$ или $w = \frac{\beta}{z}$ (β — комплексная постоянная).

Н. В. Оглоблин в указанных работах не ставил своей целью практически использовать полученные результаты, но они содержали цен-

ные теоретические утверждения, вызвавшие целый поток интересных исследований по теории механизмов, в которых применялись комплексные переменные.

В 1923 г. были опубликованы работы Л. Г. Лойцянского «О конформных преобразованиях, которые осуществляются кинематической цепью с двумя степенями свободы» и «О некоторых механизмах с двумя степенями свободы, которые осуществляют конформные преобразования», где впервые ставилась задача о классификации механизмов с точки зрения возможности выполнения ими конформных преобразований.

Метод комплексного переменного применен Л. Г. Лойцянским при исследовании так называемых сопряженных кривых Уатта. Под движением Уатта подразумевается движение плоской фигуры, жестко связанной с шатуном шарнирного четырехсторонника, т. е. простейшая четырехзвенная цепь или механизм с двумя кривошипами. Лойцянский доказал следующее: если длина шатуна четырехсторонника равна длине одного из кривошипов, то при любых размерах других звеньев и движении любой точки на плоскости шатуна геометрическое место концов радиуса-вектора, равного сумме радиусов-векторов сопряженных точек, есть окружность. Рассматривая сопряженные точки в движении Уатта, он пришел не только ко всем возможным типам инверсоров, но и к новым «квазиинверсорам», получить которые чисто геометрическим путем было бы довольно сложно.

С помощью метода комплексного переменного Л. Г. Лойцянский исследовал формулы Родрига в теории конечного вращения твердого тела, приближенные конформные преобразования, установил закон для точечного преобразования, совершаемого диадой.

В 1925 г. вышла работа А. И. Лурье «К теории приближенных прямолинейно-направляющих механизмов». Прямолинейно-направляющие механизмы преобразуют вращательное движение в прямолинейное при наличии одних лишь шарнирных соединений механизма и отсутствии поступательных пар. Лурье подошел к вопросу о прямолинейно-направляющих механизмах путем разложения уравнений кривой



Н. В. Оглоблин.



Л. Г. Лойцянский.

в данном интервале в ряд по степеням малого параметра. Возможность такого разложения значительно облегчается благодаря применению комплексного переменного. В работе показано, что можно подобрать конструкцию механизма так, чтобы в довольно значительном интервале получались практически неощутимые отклонения от прямой линии.

Большой интерес представляет работа С. А. Гершгорина о механизмах для построения функции комплексного переменного. Им построены механизмы для воспроизведения зависимостей $w = z^2$, $w = z^3$, которые используются также для извлечения квадратных и кубических корней. Гершгорин показал, что с помощью шарнирных механизмов можно произвести любое из первых четырех действий, следовательно, можно построить выражение, содержащее любую последовательность этих действий над одной или несколькими комплексными переменными. Он сформулировал следующую теорему: всегда можно построить такой шарнирный механизм, который бы воспроизводил любую наперед заданную систему алгебраических зависимостей между произвольным конечным числом комплексных переменных, изображающих положение на плоскости некоторых определенных точек его. Нет необходимости строить механизм для каждой функции, можно построить механизмы для целых классов алгебраических функций. В более широкой форме общая теорема о построении любой алгебраической поверхности с помощью механизма была сформулирована Сильвестром, но в ней ничего не говорилось о возможности построения самого механизма. Гершгорин конкретизировал задачу для функций комплексного переменного. Позднее им были построены приборы для вычерчивания различных профилей Жуковского и Мизеса. Он первый построил модели приборов на основании применения к теории механизмов комплексных переменных. Эти приборы имели практическое значение.

Идеи применения комплексных переменных к теории плоских механизмов были использованы С. С. Бюшгенсом. В первой статье из этой серии его работ — «Аналитический метод исследования плоского движения» — он показал, как удобно использовать комплексные переменные для составления уравнения кривой по ее определению, данному в подходящей форме. Бюшгенс исследовал движение плоской фигуры, опираясь на теорему Шаля о том, что любое перемещение фигуры в плоскости из одного положения в другое можно получить с помощью поворота фигуры около некоторой неподвижной точки. Движение фигуры в плоскости вполне определено, если заданы две линии, по которым движутся концы некоторого неподвижного отрезка фигуры. Для наиболее общих случаев выведено уравнение относительно неподвижной системы координат геометрического места, описываемого какой-нибудь точкой, неизменно связанной с подвижной фигурой.

С. С. Бюшгенсу принадлежит монография «Метод комплексного переменного в кинематике плоских механизмов» (1939 г.), являющаяся обобщением исследований в этой области, выполненных до 1939 г., а также содержащая новые интересные результаты. В ней впервые была решена задача о качении со скольжением жесткого контура по двум неподвижным кривым. Этот случай — один из наиболее общих случаев

задания плоского движения. С помощью метода комплексного переменного Бюшгенс вывел уравнение шатунной кривой в параметрической форме $z = au + \zeta v$, где u и v — функции вспомогательного параметра. Используя это уравнение, он нашел максимальное количество двойных точек кривой и составил уравнение подвижной и неподвижной центроид четырехзвенного механизма.

Уравнение шарнирного четырехсторонника в комплексной форме к задачам по синтезу четырехзвенных механизмов применил (1937 г.) З. Ш. Блох. Он аналитически решил задачу об угле передачи, получил очень простым методом формулы для определения допустимых значений углов, которые можно использовать при проектировании четырехзвенных механизмов, исследовал мертвые положения механизмов, определил соотношения между размерами четырехзвенного механизма, полный размах коромысла которого соответствует половине оборота кривошипа.

Весьма важную роль в синтезе плоских механизмов играет восьмизвенная кинематическая цепь. З. Ш. Блох поставил задачу об определении размеров звеньев цепи P_8 , для которой заданы m ее положений на плоскости, и показал, что методом комплексного переменного эта задача может быть решена для трех, четырех и пяти заданных положений механизма. Нельзя достаточно строго решить задачу о шести заданных положениях. Задача о семи и более заданных положениях механизма указанным методом не решается вообще.

Для проектирования плоских механизмов с низшими парами З. Ш. Блох предложил (1939 г.) синтезировать два метода: графический и метод комплексного переменного. При этом главную роль в аналитических исследованиях играет комплексная матрица, определяющая кинематическую цепь. Так как геометрической интерпретацией комплексного определителя является замкнутый векторный многоугольник, можно получить простое графическое решение различных задач синтеза механизмов, которое является естественным дополнением аналитического решения. Графо-аналитический метод Блоха позволяет



С. А. Гершгорин.



З. Ш. Блох.

решать все задачи синтеза четырехзвенных механизмов, в которых число наперед заданных условий для одного звена не превышает пяти. Позднее этот метод с успехом разрабатывался немецким ученым Зикером и канадским специалистом по теории механизмов Розенауэром.

3

Применение методов нелинейной механики

Методы теории нелинейных колебаний применяются в самых различных областях физики и техники: в аэро- и гидромеханике, авиатехнике, астрофизике, биологии и др. Они нашли приложение также в теории машин и механизмов с упругими связями.

В многообразии методов решения задач о нелинейных колебаниях видное место занимают асимптотические методы, разработанные в трудах Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского. В своей непосредственной форме они были применены к некоторым задачам, связанным с колебаниями в машинах, а также послужили толчком к ряду исследований в этой области.

В. Я. Натанзон использовал (1948 г.) асимптотический метод для расчета крутильных колебаний коленчатых валов с нелинейными муфтами. Одним из первых эффективных применений асимптотических методов нелинейной механики при расчетах конструкций является расчет драглайна, выполненный С. А. Казаком («Колебания ковша драглайна», 1953 г.). Колебания ковша Казак рассматривает как колебания маятника переменной длины и немалой амплитуды. При медленном движении груза эта задача описывается дифференциальным уравнением с медленно изменяющимися коэффициентами.

С помощью одночастотного метода, предложенного в 1949 г. Н. Н. Боголюбовым, можно строить асимптотические разложения решения нелинейных систем со многими степенями свободы на основе исследования некоторой эквивалентной колебательной системы с одной степенью свободы. В монографии «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний» (1963 г.) Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский исследовали этим методом приведенную систему коленчатого вала, где между первой и второй массами существует нелинейная связь. Ю. А. Митропольский в монографии «Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний» (1964 г.) исследовал одночастотным методом крутильные колебания коленчатого вала авиационного двигателя при неустановившемся режиме. В этой же работе с помощью асимптотического метода им рассмотрены колебания гибкого вала, несущего на концах изменяющиеся в зависимости от времени массы.

В последние годы в связи с развитием роторных машин, увеличением мощности и быстроходности турбомашин все более актуальной становится проблема динамического расчета роторов. Решение ряда таких задач удалось построить на основе асимптотических методов нелинейной механики. Б. И. Мосеенков в работе «Поперечные колебания стержня двоякой жесткости в переходном режиме вращения»

(1957 г.) рассмотрел дифференциальное уравнение изгибных колебаний стержня двойкой жесткости с учетом собственного веса стержня и сил трения. Если главные моменты поперечного сечения стержня мало отличаются друг от друга, то задаче соответствует система дифференциальных уравнений, которая содержит малый параметр и которую можно приближенно интегрировать методами Крылова — Боголюбова. Параллельно изгибные колебания стержня двойкой жесткости изучал О. Н. Романив. Его результат, полученный методом Ван-дер-Поля, совпадает с первым приближением Мосеевкова. Изгибные колебания стержня с неодинаковой жесткостью рассматривались также Ф. М. Диментбергом и др.



Ф. М. Диментберг.

Фундаментальному исследованию изгибных колебаний валов быстроходных турбин посвящена монография В. А. Грובה «Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин» (1961 г.). В этой работе изложена разработанная автором методика расчета амплитуд как стационарных, так и нестационарных колебаний роторов турбомашин с учетом различных факторов. Рассмотрены колебания вала при переходе через критические числа оборотов, колебания вала с неуравновешенными дисками при учете гироскопического эффекта, нестационарные колебания гибкого вала неодинаковой жесткости, обусловленные действием собственного веса ротора, колебания соосных роторов и др. Решения этих задач построены на основе асимптотических методов нелинейной механики. Изгибные колебания, например валов, связанных с двигателем, при учете гироскопического эффекта выражены системой дифференциальных уравнений, которая в первом приближении при отсутствии внутреннего резонанса с помощью одночастотного метода и принципа усреднения Боголюбова была преобразована в следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= \mu A_1^{(k)}(\tau, a_k, \psi_k, \Omega), \\ \frac{d\psi_k}{dt} &= \lambda_k(\tau) - \Omega(\tau) + \mu B_1^{(k)}(\tau, a_k, \psi_k, \Omega), \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\mu}{I_0} \bar{F}(\tau, a_k, \psi_k, \Omega) + \Delta M(\Omega), \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

где a_k и ψ_k — соответственно амплитуда и фаза одночастотных колебаний, Ω — угловая скорость. Для определения a_k, ψ_k, Ω систему (149) следует численно проинтегрировать. В аналогичной постановке задачи о нестационарных колебаниях валов рассмотрели Е. Г. Голоскоков

и А. П. Филиппов («Нестационарные колебания механических систем», 1968 г.).

На современном этапе развития техники становится необходимым в динамических расчетах учитывать рассеяние энергии в материале при упругих колебаниях. Начиная с 1949 г. Г. С. Писаренко, а также его ученики и сотрудники исследуют упругие колебания винтовых пружин, валов, ступенчатых стержней, лопаток турбин, учитывая рассеяние энергии в материале за счет гистерезисных потерь. Выведены и с помощью асимптотических методов нелинейной механики проинтегрированы основные уравнения для таких задач. Учет энергетических потерь гистерезисного типа при расчете механических колебаний связан с введением в дифференциальные уравнения, описывающие колебательное движение, соответствующих членов, выражающих нелинейную зависимость между усилием и деформацией в соответствии с ветвями петли гистерезиса для восходящего и нисходящего движений. При этом из-за разных значений членов уравнения для верхней и нижней ветвей петли гистерезиса цикл колебаний описывается разными дифференциальными уравнениями движения в первом и втором полупериодах. Так как петля гистерезиса для реальных материалов весьма узкая, то дифференциальные уравнения для таких задач, составленные с учетом потерь энергии в материале, оказываются слабонелинейными.

Г. С. Писаренко и его ученики впервые разработали (1949 г.) методику расчета колебаний механических систем с учетом рассеяния энергии в материале, рассматривая эту задачу в нелинейной постановке в соответствии с физически обоснованной гипотезой о зависимости рассеяния энергии от амплитуды циклической деформации (а не от скорости). Эта методика была применена прежде всего к свободным и вынужденным колебаниям, описываемым соответственно уравнениями

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 [x + \varepsilon \vec{\Phi}(x)] = 0$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 [x + \varepsilon \vec{\Phi}(x)] = \varepsilon q \cos pt,$$

где $\varepsilon \vec{\Phi}(x)$ — функции деформации, значения которых для восходящего $\vec{\Phi}(x)$ и нисходящего $\vec{\Phi}(x)$ движений берутся в соответствии с уравнениями, описывающими контур петли гистерезиса (ε — малый параметр). При решении таких систем было доказано, что для инженерной практики достаточно ограничиться первым приближением, а это очень важно, так как методы малого параметра особенно эффективны, если обеспечивают достаточную точность уже в первом приближении.

Решены также некоторые задачи о колебаниях систем с двумя степенями свободы. Особое внимание при разработке теории расчета колебаний упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале было обращено на колебания механических систем с распределенными параметрами.

Асимптотические методы широко применяются при расчетах подъемного каната переменной длины. На необходимость динамического расчета канатов впервые указал (1915 г.) А. Н. Динник. С помощью метода, развитого С. Ф. Фещенко и его учениками на основе асимптотических методов нелинейной механики, под руководством Г. Н. Савина были составлены и приближенно проинтегрированы основные уравнения динамики неупругой нити, описывающие движение шахтных подъемных канатов с грузом на конце.

Методы нелинейной механики используются также при исследовании колебательных движений железнодорожного транспорта. Например, с помощью асимптотического метода Крылова — Боголюбова Т. А. Тибилев решил (1961 г.) дифференциальное уравнение движения локомотива.

Актуальные задачи о нестационарных колебаниях в различных механических системах с помощью асимптотических методов рассмотрел В. О. Кононенко. Наиболее полно он исследовал («Некоторые автономные задачи теории нелинейных колебаний», 1961 г., и другие работы) задачу о взаимном воздействии колебательной системы и так называемого неидеального источника энергии. Им показано, что такие колебательные системы описываются автономными дифференциальными уравнениями со слабой нелинейностью, которые можно проинтегрировать с помощью асимптотических методов. На основании решения этих уравнений можно судить, насколько существенно влияние неидеального источника энергии на поведение колебательной системы. В простейшем случае Кононенко свел задачу о взаимодействии к интегрированию системы двух дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx &= Q(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}), \\ I\ddot{\varphi} + H(\varphi) &= L(\dot{\varphi}) + R(\varphi, \dot{\varphi}, x, \dot{x}), \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

где x — координаты колебательной системы, m , β , c — параметры, φ — координаты источника энергии (двигателя с вращательным движением ротора), $L(\dot{\varphi})$ — движущий момент источника энергии, $H(\varphi)$ — заданный момент сил сопротивления вращательному движению, I — момент инерции ротора, $Q(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi})$ — воздействие источника энергии на колебательную систему, $R(\varphi, \dot{\varphi}, x, \dot{x})$ — воздействие системы на источник энергии.

Многие задачи о колебаниях упругих тел, например упругих валов, роторов турбомашин, приводят к нелинейным уравнениям в частных производных. Для исследования процессов в таких системах



В. О. Кононенко.

широко применяются методы нелинейной механики. Асимптотические методы исследования систем получили строгое обоснование в работах Ю. А. Митропольского, Б. И. Мосеевкова, Г. С. Писаренко, В. А. Гробова и др. С помощью метода усреднения в энергетической интерпретации Ю. А. Митропольский и Б. И. Мосеевков рассмотрели («Исследование колебаний в системах с распределенными параметрами», 1961 г.) ряд важных практических задач.

Методы нелинейной механики используются также в быстроразвивающейся теории автоматического регулирования. А. И. Лурье применил (1958 г.) одночастотный метод при исследовании автоколебаний и устойчивости в системах автоматического регулирования. В работах (1954, 1959 гг.) Е. П. Попова методы нелинейной механики распространены на системы высокого порядка вида

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t),$$

где $Q(p)$, $R(p)$ и $S(p)$ — многочленные операторы, $F(x, px)$ — нелинейная функция, $f(t)$ — медленно изменяющееся внешнее возбуждение. Некоторые задачи теории автоматического регулирования приводят к исследованию быстро возрастающих или быстро затухающих колебаний, т.е. колебаний вида

$$x = a_0 e^{-\xi_0 t} \sin \omega_0 t, \quad (151)$$

где a_0 — начальная амплитуда, ξ_0 и ω_0 медленно изменяются на определенном участке времени. К таким задачам асимптотические методы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова непосредственно неприменимы. Развивая эти методы, Е. П. Попов показал (1960 г.), что решение уравнения вида

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + c^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (152)$$

где ε — малый положительный параметр, b и c — вещественные числа, а $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ — заданная нелинейная функция, в первом приближении можно искать в виде

$$x = a \sin \psi,$$

причем a и ψ находятся из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -b + \varepsilon \frac{\beta(a)}{2a\omega_0}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= c^2 - b^2 + \varepsilon \gamma(a), \end{aligned} \right\}$$

где $\beta(a)$ и $\gamma(a)$ с точностью до ε^2 определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \beta(a) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi - ba \sin \psi) \cos \psi d\psi, \\ \gamma(a) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin \psi, a\omega_0 \cos \psi - ba \sin \psi) \sin \psi d\psi. \end{aligned}$$

Значительное развитие получили различные вибрационные машины. Одной из основных задач динамики таких машин является определение установившегося движения рабочего органа машины, находящегося под действием сил, как правило, нелинейных. В некоторых случаях при исследовании таких систем, например динамических систем с ударным воздействием или задач, связанных с вибропогружением, получить решение методом малого параметра невозможно, поскольку такие системы значительно отличаются от гармонических. Для исследования их можно использовать качественные методы теории дифференциальных уравнений, например метод точечных преобразований. С помощью этого метода А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин изучили работу простейшей динамической модели паровой машины («Теория колебаний», 1937 г.), А. А. Андронов, А. Г. Майер применили метод точечных преобразований при решении задачи Мизеса («Задача Мизеса в теории прямого регулирования и теории точечных преобразований поверхностей», 1944 г.). Этот же метод использован в работах А. В. Беспаловой (1960 г.), З. С. Баталовой (1963 г.), В. А. Брусина (1962, 1964 гг.), В. А. Горохова (1962 г.), М. И. Фейгина (1961 г.).

Вибрационные явления при вращении неуравновешенного ротора исследованы (1954 г.) И. И. Блехманом. Эти явления встречаются при работе многих вибрационных машин, например специального истирателя руды. После преобразований уравнение, описывающее этот процесс, принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + a \frac{d\psi}{dt} = \mu \Psi\left(\psi, \frac{d\psi}{dt}, \tau\right); \quad (153)$$

здесь ψ вводится следующим образом:

$$\varphi = \pm [\omega t + \psi(\omega t)],$$

где φ — угол поворота ротора, ω — частота вибраций, $\psi(\omega t)$ — периодическая функция с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\tau = \omega t$, μ — малый параметр. Полученное квазилинейное дифференциальное уравнение решается методом малого параметра Пуанкаре. Исследуя эту задачу, И. И. Блехман установил условия существования и устойчивости вращательных движений неуравновешенного ротора со средней угловой скоростью, равной частоте колебаний его оси.

В теории машин и механизмов с упругими связями часто встречаются квазигармонические колебательные процессы, описываемые дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. Например, колебания кривошипного механизма приближенно описываются уравнением Матье

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \rho^2(1 - \mu \cos 2\omega t)x = 0.$$

Уравнением такого же типа приближенно описываются колебания вала в шарикоподшипнике, если вал не отделяется от шариков. Квазигармонические колебания многоопорных коленчатых валов изучены

(1934 г.) Н. Е. Кочиным. Им подробно исследовано явление параметрического резонанса для таких систем. Для одноколенчатого вала полученное уравнение типа Хилла он исследовал методом малого параметра и методом бесконечных определителей. Аппарат теории квазигармонических колебаний использовал А. Е. Кобринский («Механизмы с упругими связями», 1964 г.) для исследования задач о движении механизма под действием пульсирующей силы, о движении механизма при вибрации стойки и др.

Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов с помощью разработанного ими для нелинейных систем символического метода исследовали (1937 г.) крутильные колебания роторов, связанных между собой, при условии, что один конец системы закреплен, а на другой действует крутящий момент $M(t)$.

При исследовании колебаний в машинах применяются также другие методы теории нелинейных колебаний, например метод начального параметра, предложенный А. Н. Крыловым, методы динамической жесткости и динамической податливости, развитые Я. Л. Нудельманом и Ф. М. Диментбергом, метод цепных дробей.

Методы нелинейного функционального анализа в механике

Методы функционального анализа широко применяются по существу во всех разделах механики. Спектральная теория и общая теория вполне непрерывных операторов, теория линейных и нелинейных интегральных уравнений, вариационные методы — далеко не полный перечень разделов функционального анализа, без которых трудно представить себе теорию колебаний, гидродинамику, теорию пластин и оболочек и другие области механики. Функциональный анализ все в большей мере становится языком теоретической механики; значительная часть работ по теоретической механике настолько тесно связана с функциональным анализом, что их можно отнести и к области функционального анализа. Поэтому изложить на нескольких страницах историю применения методов функционального анализа в механике невозможно. Мы остановимся лишь на некоторых методах функционального анализа, применяющихся в нелинейных проблемах механики.

Механика — это одна из наук, которые стимулировали возникновение и развитие самого функционального анализа. Возникавшие в различных областях механики задачи привели к развитию многих основных понятий функционального анализа, а созданные для решения этих конкретных задач методы стали важными разделами функционального анализа. В этой связи следует указать работы А. М. Ляпунова о фигурах равновесия вращающейся жидкости и А. И. Некрасова по теории волн на поверхности тяжелой жидкости. От этих фундаментальных исследований ведут свое начало такие разделы функционального анализа, как теория нелинейных интегральных уравнений и тео-

рия ветвления решений операторных уравнений. Работы Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова по теории динамических систем послужили отправным пунктом в создании ряда общих методов нелинейного функционального анализа. Исследования Б. Г. Галеркина, И. Г. Бубнова, Г. И. Петрова, Н. Н. Боголюбова, Н. М. Крылова, М. В. Келдыша по приближенным методам решения уравнений, описывающих различные механические явления, обусловили создание важной области функционального анализа — теории проекционных методов приближенного решения операторных уравнений.

В то же время развитие функционального анализа определялось потребностями самой математики. Возникший на стыке таких дисциплин, как дифференциальное, интегральное, вариационное исчисления, дифференциальные и интегральные уравнения, абстрактная алгебра и общая топология, вычислительная математика, функциональный анализ быстро превращался в одну из основных областей математики. В 20—30-е годы XX в. был разработан единый подход к исследованию нелинейных уравнений — метод неподвижной точки, созданы вариационные методы исследования нелинейных операторных уравнений, методы теории упорядоченных пространств и теории конусов, позднее — топологические методы исследования нелинейных уравнений, общая теория приближенных методов и др. В создании этих и других ветвей функционального анализа важную роль сыграли советские ученые П. С. Урысон, П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, А. Н. Тихонов, В. В. Немыцкий, Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, Н. Н. Боголюбов, С. Л. Соболев, Л. В. Канторович, И. М. Гельфанд, Н. Н. Назаров, М. Г. Крейн, М. А. Красносельский и др.

Одной из важных математических задач, решенных с помощью функционального анализа, является задача Эйлера о критических нагрузках при изгибе стержня переменной жесткости $\rho(s)$. Решение ее сводится к исследованию краевой задачи

$$\ddot{y}(s) + P\rho(s)y(s)\sqrt{1 - \dot{y}^2(s)} = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (154)$$

где $y(s)$ — функция, описывающая прогиб стержня, а P — сила, сжимающая стержень; эта сила служит параметром. При всех значениях P функция $y(s) \equiv 0$ является решением краевой задачи (154); это нулевое решение соответствует прямолинейному стержню. Интерес представляют значения параметра P , при которых стержень начинает изгибаться, т. е. значения P , при которых появляются малые ненулевые решения краевой задачи (154). Такие значения параметра P называются точками бифуркации, наименьшее значение P , при котором стержень начинает изгибаться, — критической нагрузкой Эйлера.

Обычным методом отыскания точек бифуркации является линеаризация соответствующих уравнений. Полученные результаты обычно хорошо согласуются с экспериментом. Попытка математического обоснования метода линеаризации была предпринята Ф. С. Ясинским. А. Ю. Ишлинский и М. Г. Крейн заметили (1949 г.), что в построениях Ф. С. Ясинского есть существенная ошибка. Для некоторых частных

случаев законность метода линеаризации была показана М. М. Фило-
ненко-Бородичем, А. И. Некрасовым, Н. Н. Назаровым и др. Общий
метод обоснования линеаризации в задаче о точках бифуркации, и в
частности в задаче о критической нагрузке Эйлера, разработан (1950 г.)
М. А. Красносельским на основе созданной им теории точек бифуркации
решений нелинейных операторных уравнений. Вместо краевой задачи
(154) он рассматривал нелинейное операторное уравнение $\varphi = \lambda A\varphi$
с действующим в пространстве C непрерывных функций вполне непре-
рывным оператором

$$A\varphi(s) = P\rho(s) \int_0^1 K(s, t) \varphi(t) dt \sqrt{1 - \left[\int_0^1 K'_s(s, t) \varphi(t) dt \right]^2}$$

($K(s, t)$ — функция Грина двухточечной задачи $\ddot{y} = -\varphi$, $y(0) =$
 $= y(1) = 0$) и показал, что каждое собственное значение линейной
задачи

$$\ddot{y}(s) + P\rho(s)y(s) = 0, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

является точкой бифуркации задачи (154).

М. А. Красносельским, И. А. Бахтиным, Я. Д. Мамедовым и дру-
гими учеными были получены важные теоремы о процессе изгибания
стержня. Для исследования задачи об изгибании стержня удобными
оказались методы теории вогнутых операторов, ведущие свое начало от
работ (1923 г.) П. С. Урысона.

Одной из важнейших областей нелинейной гидродинамики являет-
ся теория поверхностных волн. В классических исследованиях
А. И. Некрасова изучена задача о рождении малых волн на поверхно-
сти тяжелой жидкости. Некрасов установил (1922 г.), что форма рожда-
ющихся волн определяется решением $\varphi(s)$ нелинейного интегрального
уравнения

$$\varphi(s) = \frac{\lambda}{3} \int_0^{2\pi} K(s, t) \frac{\sin \varphi(t)}{1 + \lambda \int_0^t \sin \varphi(\tau) d\tau} dt, \quad (155)$$

где

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin ns \cdot \sin nt,$$

параметр λ определяется характеристиками потока жидкости. Нулевое
решение этого уравнения соответствует движению без волн, ненулевые
решения — движению с волнами. В работах Некрасова решения урав-
нения (155) конструируются в виде рядов по дробным степеням разности
 $\lambda - \lambda_0$, где λ_0 — бифуркационное значение параметра.

М. А. Красносельский для исследования решений уравнения (155)
применил (1956 г.) общую теорию точек бифуркации. Линеаризованное

уравнение (155) имеет вид

$$\varphi(s) = \frac{\lambda}{3} \int_0^{2\pi} K(s, t) \varphi(t) dt;$$

все характеристические числа $\lambda = 3n$ оператора, стоящего в правой части этого уравнения, простые. Таким образом, все значения параметра $\lambda = 3n$ являются точками бифуркации уравнения (155), или точками рождения волн. Красносельский исследовал также вопрос о количестве различных решений уравнения (155) при $\lambda \neq 3n$ и вопрос о поведении решений этого уравнения при малых возмущениях правых частей; на основании полученных результатов можно определить, каким ненулевым решениям уравнения (155) будут соответствовать реальные волны.

Другое уравнение, описывающее рождение волн на поверхности тяжелой жидкости, имеет вид

$$\varphi(s) = \frac{6\lambda}{\pi} \int_0^{\pi} K(s, t) e^{3C\varphi(t)} \sin \varphi(t) dt, \quad (156)$$

где C — оператор, ставящий в соответствие каждой функции функцию с сопряженным рядом Фурье. Как и в случае уравнения (155), нулевое решение уравнения (156) соответствует движению без волн, ненулевые решения — движению с волнами. Для исследования решений этого уравнения Ю. П. Красовский применил (1961 г.) теоремы о точках бифуркации. Дальнейшие результаты получены (1961 г.) П. П. Забрейко и М. А. Красносельским. Для исследования решений уравнения (156) ими применен алгоритм вычисления индексов особых точек вполне непрерывных векторных полей. В частности, они показали, что замена Девисом уравнения (156) некоторым другим (уравнением, отличающимся от (156) лишь членами третьего порядка малости), решения которого выписаны им в явном виде, приводит к качественно новым результатам.

Теория точек бифуркации дает возможность следить за волнами малой амплитуды. При исследовании уравнения (156) Ю. П. Красовский применил методы теории конусов и установил ряд теорем о волнах любой амплитуды.

Выше рассмотрены работы о периодических волнах на поверхности тяжелой жидкости. Другие типы волн — длинные и уединенные — долгое время не поддавались математическому исследованию. Первая теорема о существовании уединенной волны была доказана М. А. Лаврентьевым (1946 г.). Он рассматривает уединенную волну, возникающую как предел периодических волн, используя при этом установленные им ранее тонкие теоремы о конформных отображениях узких полос. Новый существенный вклад в теорию уединенных волн внес (1960 г.) А. М. Тер-Крикоров. Исходя из некоторых идей Фридрихса и Хайерса, он исследовал периодические волны, вырождающиеся в уединенную при неограниченном возрастании длины волны. Им установлено существование уединенных волн в завихренной и неоднородной жидкостях.

В. А. Треногин и А. М. Тер-Крикоров установили существование решений типа уединенной волны для широкого класса нелинейных задач математической физики.

Топологические и вариационные методы нелинейного функционального анализа для исследования тонких пластин и оболочек широко применял (начиная с 1953 г.) И. И. Ворович. Основные задачи для пластин и оболочек сводятся к краевым задачам нелинейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. Ворович показал способы сведения таких задач к эквивалентным операторным уравнениям $\varphi = A\varphi$ с вполне непрерывными операторами и для доказательства разрешимости этих уравнений применил общие теоремы: принцип Лерэ — Шаудера, теорию М. А. Красносельского о вращении векторных вполне непрерывных полей и др. Для приближенного построения решений операторных уравнений он использовал метод Галеркина, установив оценки его сходимости.

Специальному анализу подверг (1955 г.) И. И. Ворович формы потери устойчивости пластин. Он установил законность линеаризации для определения критических значений и исследовал поведение пластин в закритической области (основным аппаратом исследования была теория категорий Люстерника — Шнирельмана), показал устойчивость равновесия оболочек-мембран, изучил малые упруго-пластические деформации пластин и оболочек, исследовал так называемые нежесткие оболочки (важные дальнейшие результаты получил (1967 г.) Л. С. Срубщик), предложил и обосновал асимптотический метод интегрирования уравнений равновесия пластин и оболочек и др.

Методы функционального анализа, разработанные И. И. Воровичем для исследования поведения пластин и оболочек, нашли приложение и в других областях механики, например в гидродинамике. И. И. Ворович и В. И. Юдович доказали (1959 г.) разрешимость системы уравнений, описывающих общее стационарное движение вязкой жидкости, и исследовали гладкость решений этой системы. С помощью своего асимптотического метода Ворович исследовал равновесие жидкости с поверхностным натяжением.

И. И. Ворович рассматривал (1956—1967 гг.) также нестационарные задачи теории оболочек. Изучение этих задач сводится к исследованию дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A \frac{\partial u}{\partial t} + u = \text{grad } \Phi(t, u), \quad (157)$$

где A — положительно определенный самосопряженный оператор, а $\Phi(t, u)$ — слабонепрерывный функционал. Ворович доказал теорему существования обобщенного решения таких уравнений, исследовал его свойства, разработал приближенные методы (метод Галеркина) их отыскания и т. п.

Важные результаты по теории пластин и оболочек получены А. И. Кошелевым, В. А. Треногиным, Л. С. Срубщиком и др.

Применение нелинейного функционального анализа позволило существенно продвинуть исследование вопросов, связанных с нестаци-

онарными движениями жидкости. Методы функционального анализа к плоским и осесимметричным нестационарным движениям идеальной жидкости применил В. И. Юдович. Он доказал (1960 г.) нелокальную теорему существования движения жидкости при заданных начальных условиях.

Основное внимание ученых было направлено на изучение нестационарных движений вязкой жидкости. Исследование этих движений сводится к рассмотрению нелинейной системы дифференциальных уравнений Навье — Стокса

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \nu \Delta v(t, x) + (v(t, x), \nabla v(t, x)) (= -\operatorname{grad} p + f(t, x)), \\ \operatorname{div} v(t, x) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (158)$$

Система (158), с одной стороны, сложна тем, что содержит достаточно сильные нелинейности, с другой — тем, что даже в линеаризованном виде она не принадлежит к классу систем Коши — Ковалевской. В изучении системы значительный вклад принадлежит советским математикам. О. А. Ладыженская получила (1958 г.) в весьма общей форме теорему существования решений стационарной задачи и изучила ряд их свойств. И. И. Ворович и В. И. Юдович установили (1959 г.) теоремы о гладкости обобщенных решений задачи.

В исследовании нестационарных уравнений Навье — Стокса первые общие результаты принадлежат Лерэ. Он доказал локальную (по времени) теорему существования решения таких уравнений. Следующий существенный результат был получен Хопфом. Им установлено в общем случае существование слабого решения и для доказательства существования применен метод Галеркина, ставший затем одним из наиболее известных методов исследования нелинейных проблем. А. А. Киселев и О. А. Ладыженская применили (1957 г.) к уравнениям Навье — Стокса технику доказательства существования и единственности обобщенных решений, разработанную ранее Ладыженской для решения других задач. Эта техника основана на тонких априорных оценках. С помощью метода Галеркина получена нелокальная (по времени) теорема существования для плоского случая. Для трехмерного потока она справедлива лишь при условиях потенциальности объемных сил и достаточно большой вязкости.

Сведение решения уравнений Навье — Стокса к рассмотрению интегральных или операторных уравнений в соответствующих функциональных пространствах не является тривиальным в связи с упоминавшейся выше нестандартностью их линейной части. В ряде работ это осуществлялось с помощью нестационарных гидродинамических потенциалов, построенных и изученных Лерэ в двумерном случае и К. К. Головкиным и В. А. Солонниковым в трехмерном случае. С. Г. Крейн применил (1957 г.) для этого своеобразный метод проектирования, основанный на изучении разложений квадратично суммируемых векторных полей, которое было начато Вейлем и продолжено С. Л. Соболевым, Фридрихсом, С. Г. Крейном и др. Это позволило М. А. Красносельскому, С. Г. Крейну и П. Е. Соболевскому

использовать для исследования уравнений Навье — Стокса разработанную ими общую теорию нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве и установить новые локальные теоремы существования. П. Е. Соболевский применил метод дробных степеней операторов, что позволило ему доказать нелокальную теорему существования в трехмерном случае при начальном условии из L_3 . Им получены также теоремы о гладкости решений системы Навье — Стокса, устойчивости этих решений по Ляпунову и др.

Много усилий было приложено, чтобы доказать единственность слабого решения Хопфа нестационарной задачи. Однако эти усилия не увенчались успехом. Единственность удалось доказать лишь в двумерном случае (П. Е. Соболевский, Лионс, Проди и др.).

В. И. Юдович рассматривал периодические движения жидкости. Он обосновал (1960 г.) первый метод А. М. Ляпунова в теории гидродинамической устойчивости, а также исследовал вопросы потери устойчивости пространственно-периодического течения А. Н. Колмогорова, течения Куэтта и др. Для исследования этих вопросов им были применены теория точек бифуркации М. А. Красносельского, теория осцилляционных ядер Крейна — Гантмахера, методы ветвления решений Ляпунова — Шмидта. Юдович изучал также автоколебания в жидкости.

Остановимся на исследованиях, посвященных применению функционального анализа к теории колебаний. В первую очередь следует указать работы, связанные с обоснованием восходящего к Л. И. Мандельштаму и Н. Д. Папалекси метода усреднения Крылова — Боголюбова. Этот метод в работах Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова, а также их учеников и последователей Ю. А. Митропольского, О. Б. Лыковой, В. М. Волосова и других стал одним из универсальных методов исследования колебаний механических и электрических систем. Первые теоремы обоснования метода усреднения на конечных, но сколь угодно больших промежутках времени были установлены Н. Н. Боголюбовым. Применение простейших соображений, связанных с функциональным анализом, позволили И. И. Гихману (1952 г.), а затем Б. П. Демидовичу (1954 г.) дать простые доказательства теоремы Боголюбова и обобщить ее. М. А. Красносельский и С. Г. Крейн предложили (1955 г.) другой простой подход для обоснования метода усреднения и установили наиболее общий принцип усреднения на конечном промежутке времени. Дальнейшие результаты по применению функционального анализа для обоснования метода усреднения на конечном промежутке получены П. П. Забрейко и И. Б. Ледовской (1966 г.), В. В. Стрыгиным (1966 г.).

Более трудными являются теоремы об обосновании метода усреднения на бесконечном промежутке времени. Классические результаты получены Н. Н. Боголюбовым. Ю. А. Митропольскому и О. Б. Лыковой удалось существенно развить первоначальные теоремы Боголюбова об инвариантных многообразиях. В частности, ими установлены теоремы о двумерных инвариантных многообразиях, изучено поведение решений в окрестности инвариантного многообразия, исследованы системы с медленно изменяющимися параметрами.

В последние годы П. П. Забрейко, Ю. С. Колесов и М. А. Красносельский для обоснования метода усреднения на бесконечном промежутке применили теорию неявных функций. Это позволило им получить простое доказательство одной из основных теорем Боголюбова и ряд ее обобщений. Старшие приближения на бесконечном промежутке с помощью методов теории неявных функций изучила И. Б. Ледовская.

В 50-е годы М. А. Красносельский начал широко применять методы функционального анализа при исследовании периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Как известно, задача о периодических решениях для дифференциальных уравнений может быть сведена к задаче о неподвижных точках, либо для конечномерного оператора — так называемого оператора сдвига, либо для некоторого интегрального уравнения. Применив методы нелинейного анализа для исследования таких уравнений, Красносельский и его ученики установили многочисленные признаки существования периодических решений, получили оценки их числа, исследовали устойчивость этих периодических решений и т. п. В последние годы эта теория развивается в нескольких направлениях. М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц и В. В. Стрыгин установили (1963—1967 гг.) так называемые теоремы родственности, в которых выделены связи между различными топологическими характеристиками конечномерного векторного поля, построенного по оператору сдвига, и вполне непрерывного векторного поля, соответствующего интегральному уравнению, определяющему искомые периодические решения. Эти результаты в сочетании с обычными гомотопическими соображениями позволили в ряде новых случаев вычислить вращение векторных полей, связанных с периодическими решениями, и тем самым установить новые признаки существования устойчивых колебаний. Ю. С. Колесов и М. А. Красносельский для исследования устойчивости по Ляпунову колебаний применили (1962 г.) теорию конусов. Они выяснили связь устойчивости с такими характеристиками оператора сдвига, как его вогнутость и выпуклость. Т. Сабилов исследовал методами теории возмущений устойчивость по Ляпунову колебаний, возникающих в состоянии равновесия. Он открыл новые связи между устойчивостью этих колебаний и структурой матрицы монодромии, линеаризованной в точке равновесия системы. Методы теории интегральных уравнений для исследования периодических решений широко применялись Е. Н. Розенвассером, В. М. Фридманом и другими учениками А. И. Лурье. Ими установлены теоремы о принципе гармонической линеаризации, о резонансных явлениях, устойчивости колебаний и т. д.

Фундаментальные результаты получены при исследовании колебаний в системах с запаздывающим аргументом. Н. Н. Красовский свел (1956 г.) исследование линейных уравнений с запаздывающим аргументом к рассмотрению некоторого линейного уравнения в банаховом пространстве с неограниченным оператором и в ряде случаев исследовал порождение этим оператором полугруппы. Тем самым изучение периодических решений систем с запаздыванием удалось свести к исследованию неподвижных точек оператора сдвига, который, в отличие от случая

обыкновенных уравнений, действует уже в некотором бесконечномерном пространстве. Периодические решения уравнений с запаздыванием рассматривали Ю. Г. Борисович, В. В. Стрыгин, С. Н. Шиманов. Для исследования колебаний в системах с запаздыванием применимы также методы теории интегральных уравнений. Важные результаты в этой области принадлежат М. А. Красносельскому и В. В. Стрыгину. Ими использовались различные теоремы родственности. Значительные результаты в последнее время получил Е. А. Лифшиц. Он перенес на общие уравнения с запаздыванием многие результаты, известные ранее лишь для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Методы функционального анализа применяются для исследования почти периодических колебаний. Интересные теоремы о почти периодических колебаниях получены В. В. Жиковым, В. Ш. Бурдом, Т. Сабировым и др. В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов и М. А. Красносельский для исследования почти периодических колебаний использовали методы теории конусов. Они получили новые нелокальные теоремы существования почти периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений, исследовали их устойчивость, рассмотрели задачу о ветвлении почти периодических решений (в частности, в тех случаях, когда линеаризованное уравнение имеет непрерывный спектр).

ГЛАВА ПЯТАЯ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА

Кибернетика и математика

Современное развитие всех областей науки, в том числе и математики, связано с появлением и быстрым прогрессом электронных вычислительных машин. Известно, что непрерывное совершенствование электронных вычислительных машин вызвало быстрое развитие численного анализа. Это развитие заключается не только в резком увеличении количества новых численных методов, но и в коренном изменении точки зрения на их относительные и абсолютную ценности. Переоценка относительных ценностей численных методов связана с тем обстоятельством, что зачастую методы, удобные для ручного счета, оказываются малоудобными для использования их в ЭВМ, и наоборот.

Гораздо более глубокое значение, затрагивающее судьбы развития всей математики, имеет переоценка абсолютной ценности численных методов. В период домашней математики существовало резкое различие между численными и аналитическими методами решения задач. По существу это различие было настолько глубоким, что математик воспринимал задачу до конца решенной лишь в случае нахождения ее аналитического решения. Численное же решение, какова бы ни была его практическая ценность, в рамках «чистой» математики воспринималось как своего рода суррогат, с которым приходится мириться в случае невозможности нахождения «полноценного» аналитического решения.

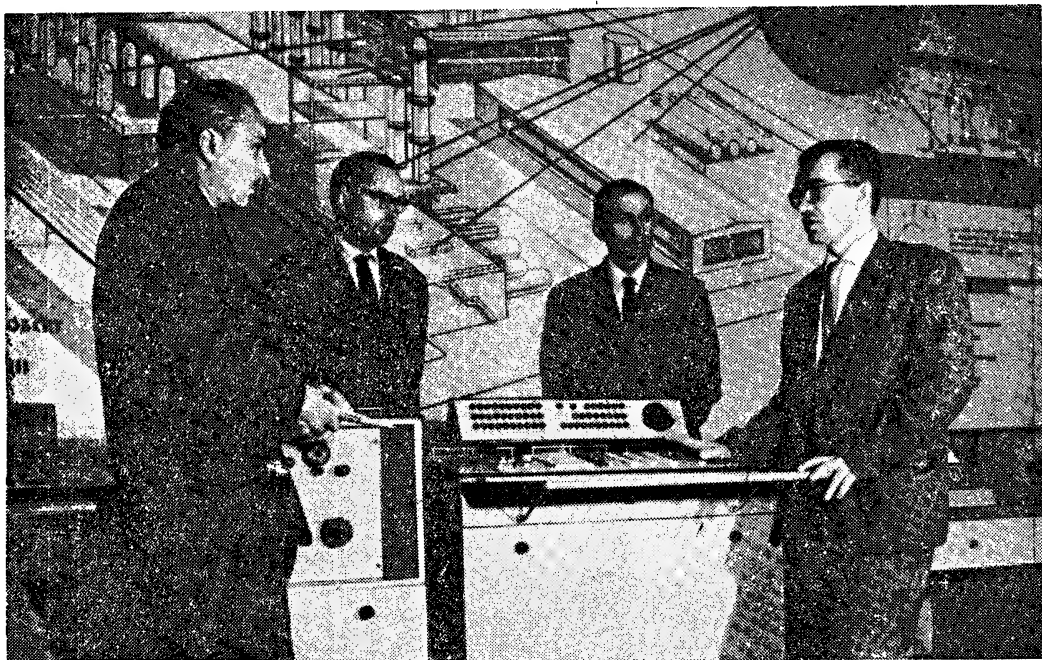
Развитие машинной математики со всей убедительностью показывает, что в действительности различие между численными и аналитическими методами носит не принципиальный, а временный, переходящий характер. В самом деле, попробуем ответить на вопрос, в чем заключается действительное преимущество аналитических решений перед численными. Разумеется, не в общности, как иногда еще думают математики, далекие от машин и машинных методов. Ведь ныне, как правило, никто не строит алгоритм (программу) для численного решения одной-единственной задачи. Так называемые стандартные и типовые программы рассчитываются обычно на решение целого класса

задач, порой весьма обширного. Не представляет, например, никакого труда построить стандартную программу, пригодную для численного решения любого алгебраического уравнения. В то же время известно, что аналитические методы решения алгебраических уравнений строятся лишь для уравнений низших степеней, причем отдельно для различных степеней.

Дело, таким образом, отнюдь не в степени общности. Действительная привлекательность аналитического решения по сравнению с численным для современного математика заключается в следующем. Во-первых, аналитические (формульные) решения записываются на гораздо более привычном для математиков языке и притом, как правило, в гораздо более сжатом виде, чем численные алгоритмы (программы). Во-вторых, благодаря хорошей изученности формульного языка запись решения на этом языке позволяет сравнительно просто по формулам изучать различные качественные особенности решения, например его асимптотическое поведение. В-третьих, для формульного языка алгебры и анализа созданы методы формальных преобразований (алгебра языка), позволяющие быстро переходить от одной формы представления решения к другой или находить решения других задач, близких к исходной, но отличных от нее (например, дифференцировать или интегрировать функцию, выражающую решение).

Все указанные преимущества аналитических решений несомненны. Но возникли они не сразу, а в результате определенного исторического процесса накопления и развития знаний. В начале XVII в., когда формальный язык алгебры и анализа еще не сложился, решения различного рода математических задач записывались словами. В то время, разумеется, не существовало и не могло существовать различия между численными и аналитическими методами. К концу века символический язык алгебры и анализа уже сложился, но он служил на первых порах в основном лишь цели упрощения записей и унификации методов решения задач, которые могли решаться и решались и без помощи этого языка. Не удивительно поэтому, что многие математики не чувствовали еще настоятельной необходимости в символической, не понимали важности сделанного математикой шага.

Лишь в XVIII в., когда бурно развивалась алгебра формальных преобразований аналитических выражений, стало возможным решать в новом языке принципиально новые задачи, решить которые, оставаясь на уровне старых словесных описаний, было бы практически невозможно. Формульный язык постепенно вошел не только в университетское и школьное образование, но и в бытовую лексику. Раньше за словесным описанием решения математики видели лишь решение данной конкретной задачи, за короткой же символической записью, например $y = \sin^2 x$, математики конца XVIII в. уже привыкли видеть не только эту запись, но и многое другое: иные возможные представления записанной функции (например, $y = 1 - \cos^2 x$, $2 \int \sin x \cos x dx$), производную и интеграл от нее, график функций, расположение ее максимумов и минимумов и т. п.



В. М. Глушков, Б. Н. Малиновский, В. И. Скурихин, Б. Б. Тимофеев (справа налево) на Выставке достижений народного хозяйства Украинской ССР. 1964 г.

Впечатление от могущества нового языка было столь велико, что выражение решения различных задач в явном аналитическом виде стало самоцелью многих поколений математиков, а возможность такого выражения считалась чуть ли не сама собой разумеющейся. Однако уже в XIX в. всемогущество формульного языка поколебалось. Было показано, что алгебраические уравнения общего вида степени выше четвертой не могут быть решены в радикалах, что существуют дифференциальные уравнения, которые не решаются в квадратурах. Попытки приложения языка алгебры и анализа в биологии, экономике и других науках показали, что, например, в отличие от механики, невозможно получить сколько-нибудь полное представление предмета этих наук в обычном формульном языке. Поэтому в XX в. в математике начал складываться новый, несравненно более могущественный символический язык алгоритмов. Первоначально этот язык возник в рамках математической логики и был далек как от приложений, так и от традиционного формульного языка, который в конечном счете представляет собой язык для записи одного специального частного класса алгоритмов.

Новым толчком развития общего алгоритмического языка явилось создание электронных вычислительных машин и кибернетики. В таких вариантах этого языка, как АЛГОЛ-60, ФОРТРАН и другие, обычный формульный язык (точнее, некоторый его фрагмент) включен в качестве одной из составных частей. В отличие от простого формульного языка современные алгоритмические языки с одинаковой

легкостью описывают не только задачи механики или физики, но и задачи эволюционной биологии, генетики, экономики или лингвистики.

История развития общих алгоритмических языков (в прикладном аспекте) насчитывает не более десяти лет. Не удивительно, что ни по завершенности, ни по степени изученности общие алгоритмические языки пока нельзя сравнивать с классическим формульным языком. Фактически то новое, что отличает, например, АЛГОЛ-60 от простого формульного языка, выражается в слегка сокращенной и стандартизированной, но все же словесной форме. Общепринятых сокращенных обозначений для процедур, отличных от хорошо известных процедур вычислений элементарных функций, пока еще нет. Таким образом, общие алгоритмические языки в современном их представлении не полностью решают даже задачу разумного сокращения записей представляемых ими процедур. Поэтому затрудняется решение таких задач, как возможность относительно простого изучения качественных свойств зависимостей, выражаемых алгоритмическими процедурами, и задачи формальных преобразований этих процедур.

По мере решения этих задач и проникновения общей теории алгоритмических языков в высшее и среднее образование разница между общими алгоритмическими и частными формульными языками по существу сотрется. «Численные» методы решения задач при этом уже не будут принципиально отличаться от аналитических, а новый привычный для всех математиков символический язык будет адекватно отображать не только предмет механики или физики, но и предмет биологии, экономики, лингвистики и других наук.

Важным принципиальным этапом в решении указанных проблем является начало развития алгебры алгоритмических языков, т. е. способов, позволяющих осуществлять формальные преобразования записей в этих языках. Построенная В. М. Глушковым теория (доклад на Международном математическом конгрессе, состоявшемся в Москве в 1966 г.) представляет собой один из первых шагов развития алгебры общих алгоритмических языков. Суть этой теории заключается в следующем. Как известно, общие алгоритмические языки отличаются от простого формульного языка прежде всего тем, что порядок выполнения операций в них не постоянен, а может изменяться в зависимости от результатов выполнения предшествующих операций. Общий алгоритмический язык задается некоторым множеством M (информационным полем), элементарными преобразованиями на этом множестве и элементарными условиями, определенными на нем. Алгоритм, задающий то или иное сложное преобразование на множестве M , определяется конечным числом действий, каждое из которых состоит из проверки того или иного условия и выполнения одной из элементарных операций, зависящей от результатов этой проверки.

Для построения алгебры алгоритмов определяются операции над выражаемыми ими преобразованиями. Если φ и ψ — преобразования, а α — условие, то α -дизъюнкцией преобразований φ и ψ является преобразование θ , совпадающее с φ на той части множества M , для которой выполняется условие α , и с ψ на той части M , для которой

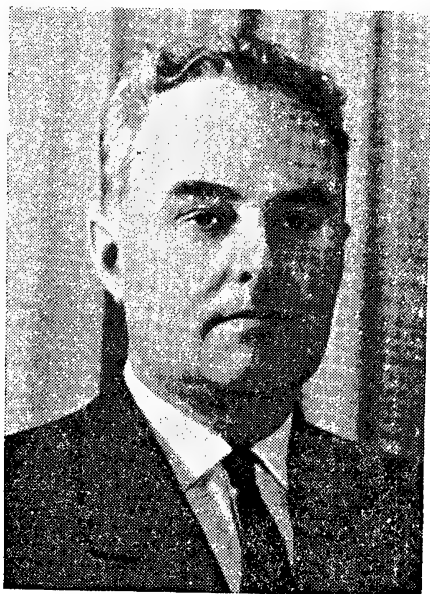
это условие ложно. Второй операцией является α -итерация преобразования. Примененная к преобразованию φ , эта операция дает преобразование τ , заключающееся в многократном выполнении преобразования φ до тех пор, пока условие α не будет выполнено. Операции указанных двух типов вместе с естественной операцией умножения преобразований задают алгебру преобразований $\mathcal{A}$. В качестве условий α для построения операций алгебры $\mathcal{A}$ выбираются элементарные условия и условия, получаемые из них с помощью обычных операций алгебры логики и умножения на преобразования из $\mathcal{A}$. Результат такого умножения дает условие, верное тогда и только тогда, когда верно исходное условие после применения соответствующего преобразования. Всякий алгоритм может быть выражен в алгебре $\mathcal{A}$ через образующие элементы



Г. Е. Пухов.

этой алгебры, в качестве которых выбираются элементарные преобразования множества M . Выписывая какую-нибудь систему определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}$ (не обязательно полную), можно осуществлять формальные преобразования указанных записей тем же способом, каким производятся преобразования формул в обычной алгебре (хотя соотношения в общем случае будут гораздо более сложными и многочисленными). С помощью этой теории удастся решать многие практические задачи по формальному преобразованию алгоритмов. Например, записав алгоритм умножения целых неотрицательных чисел в соответствии с его определением (как последовательное сложение), можно совершенно формальным путем преобразовать его к обычному виду поразрядного умножения в позиционных системах счисления.

Развитие общих алгоритмических языков и алгебры этих языков представляет собой важнейший, но далеко не единственный путь, по которому электронная вычислительная техника и кибернетика оказывают решающее влияние на развитие математики. Существенно изменяет лицо современной математики вызванное потребностями кибернетики и вычислительной техники развитие так называемой конечной, или комбинаторной, математики. Примером может служить задача дискретной экстраполяции. Речь идет, например, о том, чтобы, зная конечный отрезок той или иной числовой или буквенной последовательности, продолжить эту последовательность простейшим образом или по конечному числу примеров правильных переводов с одного языка на другой восстановить все другие правильные переводы (использующие тот же словарный запас и запас грамматических правил). Ранее подобные задачи решались индивидуально. Теперь наметилась возможность нахождения общих методов решения подобных задач в рамках абстрактной теории автоматов.



А. Г. Ивахненко.

Наконец, очень существенное влияние на математику будет иметь автоматизация доказательств теорем с помощью ЭВМ. В основу первых попыток такой автоматизации положены методологические предпосылки, заимствованные из математической логики в ее современной форме. Суть этой методологии заключается, во-первых, в разворачивании теории на базе минимального числа аксиом, во-вторых, в стремлении придать алгоритму доказательства также максимально простой вид, даже если бы при этом резко увеличивалось число элементарных шагов доказательства, и, наконец, в-третьих, стремление придать алгоритму вывода возможно более универсальный характер.

Благодаря такой стратегии автоматизации доказательств достигнуты некоторые успехи в автоматизации дедуктивных построений в рамках самой математической логики¹ (исчисление высказываний и отдельные фрагменты узкого исчисления предикатов). Однако вряд ли можно получить существенные результаты с помощью подобной стратегии автоматизации в сколько-нибудь сложных содержательных разделах математики. В самом деле, потребуются провести аналогию между автоматизацией доказательств и машинным решением задач численного анализа. Вряд ли у кого-либо из математиков возникнут сомнения в том, что первая проблема значительно сложнее второй. Между тем для решения второй задачи никто не пытается изобрести какой-либо простой универсальный метод. Более того, несмотря на наличие стандартных и типовых программ решения многих тысяч задач численного анализа, сколько-нибудь сложные практические задачи требуют обычно нового программирования (в машинном или проблемно-ориентированном языке), хотя при этом, разумеется, в строящейся программе могут широко использоваться имеющиеся стандартные программы. Иными словами, мы пока еще далеки от полной автоматизации решения задач численного анализа и решаем такие задачи на основе разумного разделения обязанностей между человеком и машиной.

Подобное положение будет в ближайшие годы в области автоматизации доказательств. Наиболее перспективны для обозримого будущего не универсальные доказывающие процедуры, а специальные системы программирования, ориентированные на совместную работу человека и машины. Представляется целесообразным прежде всего разработать специальный язык для записи доказательств, отвечающий требованиям современной теории проблемно-ориентированных языков. Можно предложить в качестве основы для построения такого языка понятие абстрактной конструкции. Конструкции служат для образо-

вания объектов, рассматриваемых в доказательствах. Типы объектов соответствуют различным математическим объектам, таким, как множество, элемент, алгебра, группа, функция и т. п. Конструкция определяет способ (не обязательно конструктивный в алгоритмическом смысле) построения того или иного конкретного объекта данного типа. В языке конструкции воплощаются в операторы присвоения, например $G :=$ группа; $A :=$ подгруппа группы G ; $e :=$ единица группы G . Первый из написанных операторов рассматривается как нульместная неоднозначная конструкция. В результате выполнения этого оператора идентификатору G присваивается значение «группа». Свойства предиката «быть группой» излагаются в описательной (информационной) части языка в виде теорем. Второй из описанных операторов задает одноместную неоднозначную, третий — одноместную однозначную конструкции.

В информационной части задаются свойства конструкций и объектов, выражаемых записанными на языке исчисления высказываний соотношениями между соответствующими предикатами, например A -подгруппа группы $G \Rightarrow A$ -группа. Второй способ задания свойств конструкций выражается специальной таблицей применимости конструкций. Например, конструкция «подгруппа» может быть применена к переменной типа «группа», но она неприменима к переменной типа «элемент». Разумеется, при этом не исключается случай, когда одна и та же переменная имеет несколько типов в различных аспектах ее рассмотрения (например, тип «группа» и тип «множество»).

Каждая теорема существования может использоваться для образования конструкций. Представляется, однако, целесообразным отличать подобные *произвольные* конструкции от стандартных конструкций, которые вводятся с помощью определений и получают при этом свои особые специальные названия. Например, теорема «в произвольной группе G для всякой ее подгруппы A существует единственная максимальная подгруппа B , в которую A входит в качестве нормального делителя», задает двухместную однозначную конструкцию $B = N(A, G)$. С помощью специального определения этой конструкции в теории групп присваивается название «нормализатор подгруппы A в группе G », после чего она зачисляется в разряд стандартных конструкций.

Система программирования, о которой шла речь выше, включает в себя два языка. Один язык — внешний — для записи теорем (вместе с их доказательствами) и определений в виде, подобном их обычному математическому представлению. Второй язык — внутренний — для представления этой информации внутри машины. Важной составной частью системы программирования являются трансляторы, позволяющие автоматически переводить информацию с внешнего языка на внутренний и наоборот. Эта часть системы позволяет осуществлять постоянное пополнение и обновление ее информационной части, т. е. теорем и определений, и в случае необходимости выводить тот или иной фрагмент накопленной информации в понятном для пользования виде.

Вторую часть системы программирования составляют программы логического вывода, позволяющие проверять свойства конструкций, строить сложные конструкции (деревья конструкций) из более простых,

проверяя условия их применимости. К этой части системы относятся программы операций со специальными конструкциями, дающие возможность осуществлять эквивалентные преобразования формул в тех или иных алгебрах (например, в алгебре целочисленных полиномов), а также средства интерпретации различного рода ограничений на строящиеся деревья конструкций, позволяющие исследователю программировать доказательства новых теорем. Основная доказывающая программа при этом служит лишь для формализации понятия очевидности. Эта программа в течение какого-либо заранее фиксированного интервала времени осуществляет попытку найти доказательство того или иного утверждения путем полного перебора (снизу) всех деревьев, строящихся из стандартных конструкций и конструкций, указанных в доказательстве. Если в течение заданного времени доказательство не найдено, то это означает, что рассматриваемое утверждение не очевидно и для его выполнения требуются дополнительные указания о применяемых конструкциях.

Наличие только одной такой программы позволило бы решить сразу несколько принципиальных для развития математики задач. Во-первых, эта программа формализовала бы понятие очевидности и тем самым установила бы стандарт на степень подробности изложения доказательств. Во-вторых, она позволила бы дать объективную оценку ценности новых теорем и конструкций. Ведь введение новых результатов в информационную часть, даже без изменения основной программы для логической очевидности, позволило бы сократить доказательства тех или иных известных теорем. Уменьшение объема памяти для хранения уже известных результатов, отнесенное на единицу информации (одну букву) в записи нового результата, можно было бы принять за одну из возможных (хотя и не исчерпывающих) объективных оценок ценности нового результата. В-третьих, постоянно пополняясь, информационная база системы могла бы оказывать непосредственную и все возрастающую помощь исследователю. Ведь даже просто установление известности того или иного факта (вместе с указанием источника) представляет для исследователя немалую ценность, а наша гипотетическая система дает много больше: она устанавливает все очевидные следствия из уже известных результатов. Наконец, наличие подобной системы не только позволит упростить поиски доказательств новых теорем путем их прямого программирования, но и даст стимул к совершенствованию алгоритмов установления очевидности. Эти алгоритмы будут, по-видимому, иметь распознающую часть для установления принадлежности сформулированного предложения к тому или иному классу. Для всякого класса будут фиксироваться те или иные специальные приемы, позволяющие ограничивать перебор при построении деревьев конструкций. Тем самым стандарт очевидности начнет расширяться, делая сегодня очевидными факты, которые не были очевидными вчера. При этом на него будет влиять не столько сам прогресс «чистой» математики, сколько прогресс в программировании и конструкции машин. Таким образом чистая математика практически полностью сольется с вычислительной.

Алгоритмические языки и программирование

Появление электронных вычислительных машин с программным управлением обусловило возникновение нового прикладного раздела современной теории алгоритмов — программирования. Этот раздел оформился в науку, изучающую средства автоматического решения задач самого различного характера, в частности средства общения человека с вычислительными машинами, сфера применения которых с каждым днем расширяется и охватывает все новые и новые области деятельности человека.

Теория алгоритмов, рассматривая класс объектов, удовлетворяющих некоторому точному определению понятия алгоритма, исследует задачи двоякого рода: во-первых, описывает индивидуальные элементы указанного класса, т. е. создает новые алгоритмы; во-вторых, доказывает положения, относящиеся к классу в целом. В теории алгоритмов предполагается, что понятие алгоритма не должно исчерпываться алгоритмами, содержание которых сводится к вычислениям над числами. Это понятие допускает естественные обобщения, поскольку с теоретической точки зрения нет никакой принципиальной разницы, например, между вычислениями арифметическими и алгебраическими и составлением графика движения поездов, если эта работа полностью формализована.

Понятия «алгоритм» и «программа» принадлежат к фундаментальным понятиям современной математики. Они являются синонимами и, как и другие первичные понятия, не определяются через более простые, а описываются на примерах. Под программой, так же как и под алгоритмом, понимается точное предписание о выделении в определенном порядке некоторой конечной совокупности правил действия для решения всех задач данного класса.

Это определение не является строгим математическим определением, так как в нем не определены такие понятия, как «точное предписание», «правила действия», «задачи данного класса». Тем не менее такое толкование смысла слова «программа» в общей форме отражает сложившееся и применяющееся в различных отраслях знаний понятие программы. Длительное время оно считалось удовлетворительным, поскольку, во-первых, речь шла о задачах, для которых удавалось рано или поздно построить конкретные программы их решения, во-вторых, само написание программ решения задач было ориентировано на их использование человеком (а не машиной), в-третьих, все утверждения о программах являлись фактически утверждениями о конкретных представителях понятия программы, и, таким образом, необходимость в рассмотрении самого понятия программы в качестве объекта математической теории не возникала. Впоследствии потребовались уточнения этих общих понятий и более глубокое их изучение в связи с использованием математической логики в вопросах обоснования математики, с одной стороны, и развитием вычислительной техники, —

с другой. Однако оказалось, что далеко не для каждого класса задач в принципе можно построить программу их решения. Для строгого доказательства данного утверждения понадобилось уточнить понятие алгоритма (программы). При этом исследователи исходили из разных способов формализации задач и процессов их решения, вследствие чего было выработано несколько различных определений понятия алгоритма: рекурсивные функции, финитные комбинаторные процессы Поста, машины Тьюринга, нормальные алгорифмы Маркова, алгоритмическая система Колмогорова — Успенского и др. Впоследствии выяснилось, что все эти уточнения равносильны и, следовательно, определяют одно и то же понятие, а это свидетельствует как раз о том, что выработанное определение удачно.

Любой алгоритмический язык, как средство точного описания вычислительных процессов и вовлекаемых в эти процессы объектов, следует рассматривать в качестве уточнения понятия программы, и наоборот, любое уточнение понятия программы — как алгоритмический язык. Указанные уточнения понятия программы (алгоритмических языков) являются теоретическими (абстрактными) алгоритмическими системами. Примерами алгоритмических систем, ориентированных на практические приложения, являются операторные алгоритмы Ляпунова — Ершова и адресные алгоритмы Королюка — Ющенко. Разумеется, это деление языков на теоретические и прикладные чисто условно, хотя бы потому, что первые из них зачастую исключительно удобны для описания отдельных классов практических задач и процессов их решения, а вторые нередко приводят к постановкам новых теоретических проблем и представляют собой удобный аппарат для их решения. С полным правом можно сказать, что в настоящее время алгоритмические языки составляют существенную часть теоретического фундамента кибернетики.

Абстрактные алгоритмические системы детально исследовались как советскими, так и зарубежными учеными. Получены фундаментальные результаты, опубликовано значительное количество оригинальных работ, обзорных статей и монографий (А. А. Марков, «Теория алгорифмов», 1954 г.; В. А. Успенский, «Лекции о вычислимых функциях», 1960 г.; А. И. Мальцев, «Алгоритмы и рекурсивные функции», 1965 г., и др.).

С общей точки зрения существующие алгоритмические языки представляют собой не что иное, как разрешимые множества операторов (программ), конструктивных как в смысле их областей определения и значения, так и в смысле задаваемого соответствия. Любой алгоритм, задающий интерпретацию алгоритмического языка L , т. е. алгоритм, который любой программе P , записанной в L , и любому элементу из области определения P (исходным данным для P) ставит в соответствие элемент, являющийся значением программы P на выбранном элементе (результат), называется алгоритмом выполнения, или интерпретатором, или универсальным алгоритмом языка.

Построение универсальных алгоритмов применительно к классическим алгоритмическим языкам имеет огромное теоретико-познава-

тельное значение. Эти универсальные алгоритмы были первыми интерпретаторами соответствующих алгоритмических языков и составили теоретический фундамент создания автоматов с программным управлением, представляющих собой технически реализованные интерпретаторы языков программирования — электронные вычислительные машины.

Одной из центральных проблем теории и практики программирования является проблема создания алгоритмических языков, удобных для формализации задач и процессов их решения, а также методов построения соответствующих эффективных интерпретаторов, удовлетворяющих определенным ограничениям, связанным с конечной скоростью работы машин, с конечностью их памяти и т. п. При рассмотрении классических алгоритмических языков проблема технической реализации их алгоритмов выполнения не ставилась (как и аналогичная проблема в отношении множества допустимых в них элементарных операций). Положение в корне изменилось в связи с технической реализацией интерпретаторов языков, ориентированных на практические приложения. Как выяснилось, при построении интерпретаторов их целесообразно рассматривать как композицию определенных алгоритмов перевода (трансляции) на некоторый промежуточный язык и интерпретации последнего. В частном случае композиция алгоритмов перевода может быть пустым оператором. Очевидно, что интерпретатор промежуточного языка в свою очередь может представлять собой композицию алгоритмов перевода на другой промежуточный язык и его интерпретатора и т. д. Последний в таком разложении называется алгоритмом непосредственной интерпретации (выполнения), а соответствующий язык — внутренним, или машинным, языком.

Проблема оптимального разложения алгоритмов выполнения программ, записанных на алгоритмических языках, в композицию алгоритмов перевода программ и алгоритмов непосредственного выполнения согласно заданному критерию — одна из наиболее фундаментальных и актуальных проблем теории программирования и вычислительных машин. В направлении решения этой проблемы сделаны лишь первые шаги. Они связаны с интуитивным подходом, который основан на качественном анализе результатов экспериментального характера, полученных в процессе технической реализации и эксплуатации различных систем программирования.

Под руководством С. А. Лебедева в СССР были построены первая «Малая электронная вычислительная машина» (МЭСМ) с программным управлением (Киев, 1951 г.) и «Быстродействующая электронная счетная машина» (БЭСМ) (Москва, 1952 г.). Основная проблема заключалась в создании начальной методики программирования во внутреннем языке этих машин с учетом ограниченности их памяти. В результате исследований появилась первая монография, посвященная этим вопросам, — «Решение математических задач на автоматических цифровых машинах» (1952 г., авторы — Л. А. Люстерник, А. А. Абрамов, В. И. Шестаков, М. Р. Шура-Бура). Работа в этот период была затруднена недостатком больших практических приложений. Она сводилась в основном к осмысливанию реальных возможностей машин на классе небольших



Е. Л. Ющенко.

практических задач и исследованию различных способов программирования.

Ввод в действие электронных вычислительных машин явился мощным толчком развития всего направления. В первый период освоения новых машин стояла задача составления программ для реализации сравнительно простых алгоритмов. Составление каждой такой программы рассматривалось как решение индивидуальной задачи. Авторы программы искали наиболее экономные решения, применяя остроумные приемы, неожиданно используя те или иные особенности машин. Возникали своеобразные соревнования по улучшению тех или иных программ. При переходе к решению более сложных задач выяснилось, что невозможно решать задачи программирования подобным образом. Возросший объем

программ и вычислений снижал ценность каждого остроумного решения частного вопроса и в то же время затруднял нахождение таких решений. Более важным свойством программы в этих условиях оказалась простота, если не в смысле объема, то в смысле однородности приемов программирования. В этот ранний период выкристаллизовались основные понятия и выработались приемы программирования. Основная работа велась в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР, Институте точной механики и вычислительной техники АН СССР (на базе быстродействующих вычислительных машин БЭСМ и «Стрела») и в Академии наук УССР. В дальнейшем, в связи с вводом в действие новых электронных вычислительных машин, исследования по программированию начали проводиться в Вычислительном центре АН СССР, Ленинградском отделении Математического института им. В. А. Стеклова и других научных учреждениях. Большую роль в распространении идей программирования и подготовке кадров программистов сыграли работы А. И. Китова и Н. А. Криницкого (1956, 1958, 1959 гг.) и книга Б. В. Гнеденко, В. С. Королюка и Е. Л. Ющенко (1961 г.).

Описание сколько-нибудь сложного алгоритма в мелких машинных операциях связано с огромными техническими трудностями, поскольку при непосредственном (ручном) программировании необходимо четкое представление как о размещении в памяти (как правило, многоступенчатой структуры) всех потоков информации на всех этапах работы программы, так и о сложных связях и соотношениях между отдельными командами программы. В связи с этим уже на заре машинной математики зародилась идея рационализации труда программиста, т. е. создания приемов и методов освобождения человека от трудоемкой и малопродуктивной работы — составления программ для конкрет-

ных машин. С развитием вычислительных машин в СССР и за рубежом начали создаваться и развиваться методы так называемого автоматического программирования. Первым шагом в этом направлении является применение подпрограмм и «псевдокодов». Введение подпрограмм и псевдокодов расширяет набор элементарных команд, допустимых в программе, не изменяя конструкции машины. Программирование проводится как бы для другой машины с более богатым набором операций. Хотя в принципе при наличии достаточно большого количества разнообразных подпрограмм с помощью этого метода в значительной степени решается задача программирования, практически он сохраняет специфические черты непосредственного программирования в машинном языке, правда, для значительно более совершенной машины. Метод подпрограмм и псевдокода применяется широко, особенно как составной элемент большинства систем программирования.



М. Р. Шура-Бура.

Однако автоматическое использование стандартных подпрограмм в пределах одной задачи связано с построением интерпретаторов (так называемых интерпретирующих систем) или специального вида трансляторов, компиляторов, представляющих собой алгоритмы компоновки программ из отдельных подпрограмм.

В 1955, 1956 гг. под руководством М. Р. Шуры-Буры была создана система стандартных подпрограмм (СП) для машины М-2. В 1956 г. Э. З. Любимским и Т. Г. Исаенко разработана обладающая большой универсальностью программа автоматического присвоения адресов (ПАПА). Реализованный в ней метод тесно связан с так называемым методом символических адресов и является, по существу, обобщением и расширением метода подпрограмм. Близки по своей идее к ПАПА разработанная для «Стрелы» Е. А. Жоголевым (1957 г.) стандартная составляющая программа (ССП) и программа для машины М-20 (В. В. Мартынюк, 1959 г.).

Оригинальный метод построения интерпретирующих систем, названных прорабами, разрабатывается под руководством Л. В. Канторовича (В. А. Булавский, Л. Т. Петрова, Т. Н. Первозванская, И. А. Пластунова, Т. Н. Смирнова, К. В. Шахбазян, М. А. Яковлев и др.) начиная с 1955 г. В качестве операндов в отдельных прорабах используются векторные, матричные и другие более сложной структуры совокупности данных, в связи с чем вводятся соответствующие классы операций.

Важное значение имеет интерпретирующая система ИС-2 для машин типа М-20 (М. Р. Шура-Бура, 1959 г.). Она положена в основу

большинства систем автоматического использования библиотечных подпрограмм (В. Ф. Ляшенко — для машин М-20, 1962 г.; Е. Т. Гавриленко — для машин типа «Урал», 1961 г., и др.).

Указанные методы упрощали и облегчали задачу составления программ, их создание и применение было существенным продвижением в технике программирования. Однако в основу этих методов был положен язык, принципиально мало отличающийся от языка соответствующих машин. Каждый из таких языков создавался и приспособлялся к какой-либо конкретной машине, несмотря на общие принципы, на которых основаны все подобные языки. Кроме того, эти методы из-за отсутствия средств подготовки информации в удобном алфавите опирались на цифровое кодирование, существенно снижавшее их ценность. В силу этих особенностей указанные языки не могли способствовать преодолению трудностей программирования, которые все возрастали в связи с увеличением количества и разнообразия машин, а также их мощностей и сложности задач.

Уже в ранний период развития программирования на опыте решения сложных задач выявились большие трудности в создании программы без предварительного составления так называемой схемы-программы того или иного описания алгоритма в терминах достаточно крупных операций. Решение задачи программирования довольно четко разделилось на два этапа: первый — выбор алгоритма и описание его в терминах достаточно крупных операций, т. е. составление схемы-программы, второй — расписывание крупных операций выбранного алгоритма в терминах элементарных операций машины.

Возникла проблема построения такой алгебры программ, в которой операции представляли бы собой абстрактное выражение наиболее существенных и чаще всего встречающихся на практике композиций программ. Существенный шаг в направлении решения этой проблемы был сделан А. А. Ляпуновым. Фундаментальные идеи, изложенные им в работе «О логических схемах программ» (1958 г.), связаны в первую очередь со схемой построения таких алгебр и эффективных интерпретаторов алгоритмических языков, предложениями которых являются элементы этих алгебр. А. А. Ляпунов сформулировал метод описания программ с помощью операторной схемы. Этот метод благодаря алгебраизации записи оказался значительно более удобным по сравнению с применявшимся ранее методом блок-схемы и был положен в основу развития идей советской школы программирования. В дальнейшем идеи Ляпунова углублялись и развивались как советскими, так и зарубежными учеными.

Первоначально метод операторного программирования служил лишь удобным средством описания программ или эскизным планом их составления. В дальнейшем уточнение понятия оператора и четкое выделение основных типов операторов, применение которых может обеспечить составление хорошей программы для подавляющего числа задач, позволили использовать операторную схему как основное средство автоматизации программирования. В результате были созданы первые трансляторы: под руководством М. Р. Шуры-Буры — программирую-

щие программы (ПП) для машины «Стрела» (Э. З. Любимский, С. С. Камынин и др., 1955 г.), под руководством А. П. Ершова — для БЭСМ (Л. Н. Королев и др., 1956 г.). Так было положено начало развитию автоматического программирования в СССР на основе метода трансляции.

Составление транслятором программ с помощью машины было первым серьезным использованием машин в «неарифметических» целях. Исследования по автоматизации программирования позволили по-новому осознать возможности машин и не только послужили толчком к постановке и решению вопросов о других неарифметических их использованиях, но и оказали влияние на характер вычислительных программ, которые все чаще и чаще оказываются в значительной мере неарифметическими. Успех этих первых трансляторов стимулировал создание аналогичных программ для других вычислительных машин. Так, в 1956—1959 гг. программирующие программы были разработаны для машин типа «Стрела» (А. М. Бухтияров, Е. А. Жоголев, Н. А. Крицкий, В. М. Курочкин, В. Д. Поддерюгин, И. В. Поттосин, Н. П. Трифонов и др.). Однако языкам первых программирующих программ присущи в той или иной степени черты языков конкретных ЭВМ и поэтому они являлись в известной степени машинно-ориентированными языками.

К работам А. А. Ляпунова в идейном плане примыкают также исследования киевских математиков, начатые в 1955 г. главным образом в связи с математической разработкой и построением в Академии наук УССР большой по тому времени вычислительной машины «Киев». В 1955—1957 гг. при Институте математики АН УССР (Лаборатория вычислительной техники, позднее преобразованная в Вычислительный центр АН УССР, а затем в Институт кибернетики АН УССР) работал семинар, участниками которого был предложен ряд способов записи алгоритмов и методов программирования: метод граф-схем (Л. А. Калужнин, 1959 г.), метод специализированных программирующих программ (В. М. Глушков, 1959 г.) и метод адресного программирования (В. С. Королюк и Е. Л. Ющенко, 1956—1967 гг.).

Метод граф-схем получил распространение как общий метод подготовки математических и логических задач для их решения на ЭВМ и оказал большое методологическое влияние на развитие теории программирования. Метод специализированных программирующих программ, по своей идее приближающийся к методу прорабов Л. В. Канторовича, получил развитие и практическое применение в работах А. А. Стогния, Е. Л. Ющенко и других, в частности при составлении библиотек стандартных программ для машин «Киев», «Урал», М-20 и в дальнейшем при разработке малых вычислительных машин с развитой системой непосредственной интерпретации «Промінь» и «Мир».

Однако наибольшее внимание в исследованиях киевских математиков уделялось разработке так называемого адресного алгоритмического языка, методам составления трансляторов и их созданию для ряда отечественных машин. Идея построения адресного языка, в основу которого положены понятия косвенной адресации и ранга адреса, принадлежит

(1957 г.) В. С. Королюку и Е. Л. Ющенко. В дальнейшем этот язык был разработан и внедрен в практику программирования под руководством Е. Л. Ющенко (Л. П. Бабенко, М. М. Бушко-Жук, В. П. Семик и др.). Работа над созданием адресного языка оказала определенное влияние на выбор параметров для новых вычислительных машин, в частности для машин «Киев», «Днепр-1», «Промінь», «Днепр-2».

В дальнейшем адресный язык начали применять как входной язык систем автоматического программирования для ряда отечественных машин («Киев», «Урал-1», «Урал-2», М-20, «Днепр-1», «Минск-12», «Минск-14») и как язык для описания трансляторов. Накопленный опыт использования адресного языка отражен в ряде учебников и монографий (Е. Л. Ющенко, «Адресное программирование и особенности решения задач на машине «Урал», 1960 г.; Б. В. Гнеденко, В. С. Королюк, Е. Л. Ющенко, «Элементы программирования», 1961, 1963 гг.; В. М. Глушков, Е. Л. Ющенко, «Вычислительная машина «Киев», 1962 г.; Л. А. Калужнин, В. С. Королюк, «Алгоритмы и математические машины», 1964 г.; учебное пособие «Элементы программирования», издано на немецком, венгерском и французском языках).

За рубежом исследования по автоматизации программирования, ведущиеся также с начала 50-х годов, развивались в том же направлении, что и в нашей стране, т. е. по пути автоматизации использования библиотек СП, построения машинно-ориентированных языков типа автокодов, а также таких проблемно-ориентированных языков, как ФОРТРАН (корпорация ИБМ), ЮНИКОД (компания Ремингтон РЕНД Юнивак), ФЕРРАНТИ (фирма Ферранти) и др. Всего таких систем к 1960 г. за рубежом насчитывалось более 100. Вместе с тем обилие систем приводило к обособлению коллективов, работающих на различных системах, и затрудняло процесс обмена алгоритмами. Поэтому возникла идея создания универсальных проблемно-ориентированных языков.

Наглядным примером преимущества такого подхода является успех языка ФОРТРАН, разрабатывавшегося первоначально применительно к машинам типа ИБМ. Этот язык не отличался существенным богатством изобразительных средств и построен на тех же принципах операторного программирования, однако он имел преимущество, состоявшее в пренебрежении ко многим особенностям конкретных машин, и мог благодаря этому быть с успехом использован на многих других машинах, что, кстати, со временем и произошло. Последнему благоприятствовало наличие на зарубежных вычислительных машинах алфавитных вводных — выводных устройств.

Применение универсального языка программирования снимает задачу перевода программ с одной машины на другую, дает возможность избежать дублирования работ по составлению программ для различных машин и существенно облегчает обмен информацией между отдельными группами, работающими в области программирования.

Универсальность языка и вытекающий из нее отказ от учета особенностей машины в некоторых случаях приводит к тому, что получающиеся в результате перевода программы обладают худшими парамет-

рами в смысле расхода памяти или времени, чем программы, полученные каким-либо другим путем, где использовались некоторые приемы, учитывающие те или иные особенности машины. Однако не следует этого бояться, поскольку рост быстродействия машин и их количество делают эту потерю малоощутимой по сравнению с выгодами, которые дают универсальные языки.

Работа по созданию достаточно удобного и стройного универсального языка (прежде всего, для описания алгоритмов решения задач вычислительного характера), который мог бы стать международным, началась в значительной степени по инициативе ряда зарубежных ученых. Результатом этой работы и обсуждений, проводившихся в течение почти полутора лет, явился проект международного языка программирования АЛГОЛ-60.

Первоначальное описание АЛГОЛа-60, появившееся впервые (1960 г.) в форме приложения к «АЛГОЛ-бюллетеню», стало предметом многих исследований, посвященных изучению и развитию универсальных языков программирования. Важные исследования по расширению АЛГОЛа-60 были выполнены в Институте математики СО АН СССР и Институте кибернетики АН УССР.

С появлением АЛГОЛа-60 наступил новый этап в развитии теории и автоматизации программирования, возникли новые идеи и методы. Прежде всего программирование стало по-настоящему международной наукой не только в связи с использованием АЛГОЛа в качестве языка публикаций, но и благодаря повышению общей значимости результатов, связанных с обсуждением или построением эффективных интерпретаторов АЛГОЛа. Кроме того, богатство изобразительных средств, сравнительная сложность реализации интерпретаторов, общий логический уровень языка, в особенности описание его синтаксиса, резко повысили роль теоретических исследований в конструировании трансляторов.

В первом цикле работ рассматривались вопросы реализации интерпретаторов языка. Были предложены универсальные алгоритмы общей обработки АЛГОЛОВских программ (Э. Дейкстра) и программирования процедур (П. Ингерман, М. Р. Шура-Бура и В. И. Собельман). Некоторые вопросы реализации исследованы в связи с конкретными трансляторами.

Большую роль в распространении АЛГОЛа в СССР сыграло создание трансляторов ТА-1 (В. Н. Попов, В. А. Степанов и др., 1964 г.), ТА-2 (М. Р. Шура-Бура, Э. З. Любимский и др., 1964 г.) и АЛЬФА-транслятора (А. П. Ершов, Г. И. Кожухин, Ю. М. Волошин, 1964, 1965 гг.) для машин типа М-20. Практическая реализация этих трансляторов потребовала разработки оригинальных методов программирования. Так, в ТА-2 реализован табличный метод построения машинных команд и разработан метод моделирования страничной структуры при динамическом распределении памяти. Кроме того, в ТА-2 включены алгоритмы динамического использования памяти, позволяющие, в известном смысле, «расширить» оперативную память машины (М. Р. Шура-Бура, В. В. Мартынюк, 1964 г.). В АЛЬФА-трансляторе реализован ряд алгоритмов оптимизации рабочих программ, позволяю-



А. П. Ершов.

ших получать рабочие программы высокого качества, соответствующего в среднем качеству массовой продукции квалифицированного программиста при приемлемой скорости трансляции.

АЛГОЛ, обладая развитой структурой, имеет сравнительно бедный запас элементарных вычислительных действий. В то же время анализ алгоритмов и изучение методики крупноблочного программирования показали, что в развитом входном языке желательно иметь векторно-матричную символику. В связи с этим А. П. Ершовым была предложена система обозначений и операций, позволяющая включить во входные языки для трансляторов действия над многомерными величинами. Эта система «вписана» в АЛГОЛ-60 во входном языке транслятора. Одновременно в язык были введены другие

удобные расширения — действия над комплексными числами, цепочки неравенств, описания начальных значений, функции-выражения, верхние индексы и др.

Во всяком алгоритмическом языке можно выделить две самостоятельные части. Первая предназначена для описания объектов перерабатываемой информации (исходных, промежуточных, окончательных результатов), вторая представляет собой набор средств для описания процессов переработки этих данных. В зависимости от ориентации языка обе части могут быть более или менее развиты. Так, в языках, предназначенных для решения научно-технических задач вычислительного характера (например, в АЛГОЛе), первая часть языка, как правило, незначительна и состоит из описания типов числовых данных (целые, вещественные, булевские), иногда дополняющегося описанием некоторых других величин (векторных, строчных и др.), а вторая часть значительно развита за счет суперпозиций произвольной глубины над базисными операциями, являющимися в основном обычными арифметическими операциями и отношениями, а также элементарными функциями математического анализа.

Языки, ориентированные на обработку данных, имеют более развитый аппарат, предназначенный для описания объектов перерабатываемой информации. Данные в задачах, связанных с их обработкой, как правило, представляют собой совокупность объектов сложной структуры. Под сложностью структуры данных подразумевается представление их в виде дерева, количество ярусов которого может практически достигать нескольких десятков, а каждый из ярусов может иметь, вообще говоря, большое количество вершин. При этом каждая из вершин дерева представляет собой объект, наделенный некоторым многообразием свойств. Таковы, например, размер (количество символов или знаков,

составляющих его), разновидность представления, данного в машинном коде (двоичное, двоично-десятичное, p -разрядное, плавающее или фиксированное и др.), его позиция в памяти и др. Выбор средств, предназначенных для описания процессов переработки данных,— операторов языка в значительной мере определяется ориентацией языка на класс задач и формой задания данных.

В связи с расширением области использования машин первого поколения в соответствующих алгоритмических языках получили широкое развитие средства описания собственно вычислительных процессов, возникла необходимость в существенном расширении указанного аппарата в направлении развития средств для обработки объектов сложной структуры. К последним относятся: аппарат, допускающий эффективное обращение к произвольной вершине дерева данных; работа с большими массивами информации; взаимные перемещения вершин дерева данных, имеющих различные форматы; возможность изменения структуры дерева; построение новых деревьев, вершины которых удовлетворяют некоторым отношениям, в частности переупорядочение строк в массивах по признаку возрастания или убывания (так называемые задачи сортировки); построение новых массивов, определенные элементы которых удовлетворяют заданным свойствам, и др. Специфика этих задач и обусловила работу по созданию специальных языков для обработки данных.

Одним из развитых в этом отношении и получивших признание среди данного класса проблемно-ориентированных языков является КОБОЛ. В этом языке допускается описание алгоритмов, оперирующих элементами информации сложной структуры, с помощью сравнительно простых операторов (типа операции поиска как адресного, так и ассоциативного, т. е. по совокупности некоторых признаков, засылки, сортировки, редактирования и др.). Таким образом, КОБОЛ представляет собой язык, позволяющий выразить основные понятия проблемы, на которую он ориентирован, и в то же время обладающий аппаратом, направленным на эффективное использование наиболее характерных особенностей современных ЭВМ. Благодаря принятой в КОБОЛе форме описания данных, естественно отражающей природу объектов и их взаимосвязей, он и получил распространение, и основы его аппарата были включены в другие языки (например, в АЛГЭК, PL-1). Расширение этим аппаратом адресного языка, предложенное (1965 г.) Л. П. Бабенко, еще больше увеличило возможности языка для описания алгоритмов трансляции, структуры памяти и логики ЭВМ, сложных схем фиксации данных (магазинов, списков и т. д.). В адресном языке были описаны алгоритмы транслятора с языка КОБОЛ, разработанного в Институте кибернетики АН УССР.

Использование ЭВМ позволило поставить более тонкие и глубокие исследования и тем самым привело к необходимости решения задач, компактное описание которых выходит за рамки одного проблемно-ориентированного языка. Так, в процессе обработки экономической информации появилась необходимость выполнения сложных вычислений (связанных с исследованием операций, линейным программированием,

статистическими предсказаниями), а при проведении научно-инженерных расчетов — необходимость в языке, удобном для представления различных сообщений, сортировки, редактирования данных и пр.

В связи с этим был создан авторский коллектив по разработке алгоритмического языка для описания экономических задач, который разработал (1966 г.) язык АЛГЭК (М. А. Королев, К. С. Кузьмин, С. С. Лавров, А. А. Летичевский, Г. К. Столяров, М. Р. Шура-Бура).

В основу АЛГЭКа положен язык АЛГОЛ-60, частично сокращенный за счет некоторых особенностей, не имеющих четкого толкования или вызывающих значительные трудности при разработке эффективных трансляторов. С другой стороны, для отражения специфики экономических задач в язык введены дополнительные средства, хорошо разработанные в языке КОБОЛ и позволяющие описывать документы сложной структуры и их массивы (таблицы, ведомости, наряды, картотеки), процессы выборки и переработки содержащейся в этих документах информации, а также обрабатывать информацию текстового характера.

В последние годы успешно разрабатываются и другие проблемно-ориентированные языки. Из них прежде всего заслуживают внимания языки, предназначенные для описания алгоритмов, связанных с проектированием вычислительных машин и систем. Например, языки АЛЮС (В. М. Глушков, А. А. Летичевский, 1966 г.); ЛЯПАС (А. Д. Закревский, 1966 г.) и ОПАЛ (Ю. М. Баяковский, 1966 г.), транслятор с которого на М-20 используется в ряде организаций; язык для описания геометрических объектов, построенный на базе языка АЛГОЛ-60 и предназначенный для описания задач, связанных с проектно-конструкторскими и технологическими работами (Г. С. Бегунков, С. С. Лавров, И. Е. Педанов, В. А. Степанов, 1966 г.); язык машины для инженерных расчетов (В. М. Глушков, А. А. Летичевский, А. А. Стогний, 1965 г.) и др.

В дальнейшем задачи разработки языков послужили толчком к созданию новых вычислительных комплексов ЭВМ и систем с многоканальным вводом — выводом, с возможностью параллельного выполнения нескольких программ, с разветвленной системой диспетчеризации, содержащих наряду с несколькими цифровыми аналоговые машины, обеспечивающих реализацию вычислений в реальном масштабе времени и др.

Из получивших признание языков ни один не охватывает возрастающих возможностей комплексов. В связи со все возрастающими возможностями ЭВМ и расширением круга решаемых на них задач в принципе невозможно создать фиксированный язык, удовлетворяющий на обширный период времени всем запросам практики и не содержащий аппарата для своего расширения. Одним из путей разработки такого аппарата является создание языка, основанного на модульной структуре, т. е. языка, в котором выделены его различные фрагменты, удобные для применения в определенных областях, и такого, практическое применение которого позволяет программисту не знать тех его возможностей, которые им не используются.

Существенным шагом в направлении создания языка с широко раз-

витой модульностью, обладающего средствами описания одновременного выполнения двух или нескольких заданий, средствами описания работы в реальном масштабе времени, средствами управления работой транслятора с целью создания им эффективных рабочих программ, допускающего в качестве данных массивы сложной структуры, является один из новейших языков программирования — язык PL-1, положенный корпорацией ИБМ в основу операционной системы для серии машин ИБМ-360.

Вопросам создания новых более или менее специализированных языков посвящено большое количество работ. В настоящее время зарегистрировано свыше 1700 языков программирования, использующихся для «связи с машиной» при решении задач в 700 областях. Разработка новых языков интенсивно продолжается. Вместе с тем, несмотря на несомненный прогресс в области технической реализации и создания машин с более сложными и совершенными формами представления данных и с более высоким уровнем непосредственной интерпретации, разрыв между языками программирования и внутренними языками машин удается ликвидировать лишь частично и главным образом на проблемно-ориентированных машинах.¹

Гибкость и жизнеспособность системы математического обеспечения на ЭВМ и их комплексах достигается с помощью обширных библиотек стандартных и обслуживающих программ и транслирующих систем с класса алгоритмических языков, позволяющих, в частности, выявлять синтаксические и некоторые семантические ошибки в программах, оптимизировать программы на уровне алгоритмических языков за счет включения в систему соответствующих блоков и т. п.

При решении проблемы выбора класса входных языков транслирующей системы, наряду с охватом языков с высокой степенью модульности, необходимо предусмотреть ступенчатую организацию системы входных языков, включающую языки нескольких уровней. Ступенчатая система автоматизации программирования широко применяется на современных машинах, где в качестве входных языков используются проблемно-ориентированные языки нескольких уровней. Эффективность системы с несколькими входными языками очевидна, так как для алгоритмизации той или иной задачи можно выбрать наиболее удобный из языков. Наличие же в системе языков, близких к внутреннему, дает возможность строить эффективные программы массового потребления (отладочные, стандартные, трансляторы и др.).

Применение проблемно-ориентированных языков (ФОРТРАН, АЛГОЛ, КОБОЛ, АЛГЭК и др.) — существенный шаг в развитии программирования. При этом

1) решается задача совместимости программ для различных машин, т. е. можно ставить одну и ту же программу, описанную в языке (иногда с небольшими изменениями), на различных машинах;

¹ Основные исследования в этом направлении в СССР ведутся в Институте кибернетики АН УССР под руководством В. М. Глушкова (машины «Промінь», 1961 г.; «Мир», 1965 г.; «Мир-2», 1969 г.).

2) упрощается общение человека с машиной, так как упрощается процесс написания и отладки программ, обучение программированию;

3) создается возможность стандартизации в области приложений посредством повышения стандартизации в самом языке;

4) создается база для строгой документации программ.

В основу построения первых трансляторов была положена идея компоновки рабочей программы из программ, соответствующих отдельным операторам исходного алгоритма. Трансляторы такого рода были многоходовыми, т. е. трансляторами, при работе которых запись обрабатываемого алгоритма или его эквивалента просматривается несколько раз. Так, при одном из просмотров могут обрабатываться все описательные части записи алгоритма, в которых приводятся характеристики обрабатываемых объектов информации, при другом — переводятся в промежуточный язык арифметические операторы и т. д. и, наконец, осуществляется общее распределение памяти и присвоение истинных адресов.

В последнее время получили широкое распространение и признание методы трансляции, основанные на синтаксическом управлении, т. е. методы, в которых анализ обрабатываемой программы осуществляется на основе синтаксиса исходного алгоритмического языка. Первые существенные результаты в этом направлении в Советском Союзе были получены М. Р. Шурой-Бурой при реализации ТА-2 (1964 г.) и развиты далее Е. А. Жоголевым (1965 г.).

Синтаксически управляемый транслятор по своей структуре представляет собой совокупность управляющей программы и ряда семантических подпрограмм, обеспечивающих замену синтаксического разложения программы ее семантическим эквивалентом в выходном языке транслирующей системы, в частности в машинном языке. Транслятор обрабатывает исходную информацию, посимвольно просматривая ее в порядке записи. Очевидно, что программа обработки каждого отдельно взятого символа определяется, вообще говоря, не только этим символом, но и содержащей его синтаксической структурой.

Некоторые символы на данном уровне анализа невозможно обработать, и они засылаются в память особой структуры — магазин или стек, работающий по принципу «последний занесенный в магазин элемент выбирается первым». В дальнейшем при углублении анализа такие символы становятся недоступными, и они обрабатываются лишь при возврате к предыдущему уровню. Таким образом, процесс перевода с одного языка на другой распадается на две зачастую выполняющиеся одновременно фазы:

1) синтаксическое разложение исходной записи программы, т. е. перевод ее в точный язык с тривиальным синтаксисом или, точнее, с тривиальным синтаксическим анализом, — проблема анализа; 2) замена элементов разложения их семантическими эквивалентами в выходном языке, в частности машинном. Как правило, при этом перевод распадается на цепочку указанных фаз, связанную с использованием одного или нескольких промежуточных языков (посредников). Возникает ряд общих проблем, не относящихся к входным — выходным языкам, по-

сколько трудности перевода обуславливаются не столько избранными языками, сколько грамматиками, задающими эти языки. Поэтому проблема конструирования синтаксически управляемых трансляторов, ориентированных на широкий класс грамматик и содержащих аппарат для своего расширения, стимулировала новые исследования по формализации синтаксиса и семантики языков программирования. Последние основаны на наиболее естественном и фактически применяемом методе задания семантики посредством семантической индукции по синтаксической структуре предложений языка. В связи с этим к проблеме формализации алгоритмического языка добавляется проблема формализации его синтаксического и семантического описаний. Эта проблема решается путем создания метаязыка для описания синтаксиса и на его основе метаязыка для описания семантики алгоритмических языков.

Проблема разработки метаязыков для описания синтаксиса и семантики алгоритмических языков, удобных как с теоретической, так и с практической точки зрения, а также на их основе метатрансляторов, которые по заданию семантики одного алгоритмического языка относительно семантики другого дают транслятор с первого языка на второй, представляет собой новую центральную область теории программирования.

В. Н. Редько предложен (1968 г.) параметрический метод построения интерпретирующих и транслирующих систем, ориентированных на широкий класс языков. Метод базируется на эффективном решении проблемы синтаксического анализа алгоритмических языков. В качестве метаязыков для описания алгоритмических языков, на которые ориентированы эти системы, выбраны разработанные В. Н. Редько общие метаязыки, основанные на так называемых беступиковых грамматиках, рекурсивно полных относительно конечных языков и бинарных отношений, в частности бинарных отношений рекурсивного типа. Общие метаязыки, во-первых, позволяют сравнительно просто описывать широкие классы алгоритмических языков, включающие, например, АЛГОЛ, КОБОЛ и другие, во-вторых, эффективны с точки зрения построения алгоритмов интерпретации и трансляции языков, описанных в этих метаязыках, в-третьих, тесно связаны с другими, получившими распространение и признание метаязыками, что дает возможность в значительной мере автоматизировать переход от описания в последних к описаниям в общих метаязыках. Параметрический метод положен в основу разрабатываемой в Институте кибернетики АН УССР транслирующей системы, ориентированной на класс языков, который включает, например, в качестве выходных языков АЛГОЛ и КОБОЛ.

Составлением транслирующих систем в значительной мере решается важная проблема автоматизации или, точнее, рационализации самого процесса конструирования трансляторов, этого в настоящее время наиболее узкого места в цепи человек — машина. Первые результаты в СССР в решении этой проблемы получены (1965 г.) Е. Л. Ющенко и ее учениками.

Задачам теории формальных языков, связанным с вопросами построения трансляторов, посвящена статья А. А. Летичевского «О после-

довательном расширении формальных языков» (1967 г.). В работе В. Н. Редько, Е. Л. Ющенко «Алгоритмические языки и транслирующие системы» (1967 г.) дан краткий обзор исследований в этом направлении.

Одним из эффективных направлений построения трансляторов и метатранслирующих систем является создание промежуточного языка (языка-посредника), удобного как для перевода на него с других (входных) языков, так и для описания алгоритмов перевода (трансляторов). Существенные результаты в этом направлении получены в исследованиях по адресному языку, выполненных под руководством Е. Л. Ющенко, а также С. С. Камыниным и Э. З. Любимским, разработавшими универсальный машинно-ориентированный язык АЛМО (1966 г.).

Следующей проблемой в использовании ЭВМ явилась разработка их систем и комплексов, создание программного (математического) обеспечения для которых приобретает особую важность.

Известно, что быстродействие ЭВМ существенно ниже быстродействия отдельных их устройств. Прежде всего быстродействие снижается вследствие несоответствия скоростей работы собственно процессоров и устройств ввода — вывода. Известная потеря скорости происходит в результате пересылок между памятьми разных уровней, использования компиляторов и т. п. Названные недостатки, а также тот факт, что производительность вычислительных систем растет существенно быстрее их стоимости (зависимость эта близка к квадратичной), стимулировали исследования по созданию мощных и сверхмощных вычислительных систем — машин третьего поколения. Характерной чертой этих машин является схемная и программная реализация совместимого ряда машин с различной производительностью, гибкой блочной структурой и широким набором устройств, имеющих стандартный способ подключения и, следовательно, удобных для подбора комплекта, оптимально выгодного для того или иного предприятия или учреждения в данный момент. При этом, как правило, обеспечивается возможность обработки информации в заданное время, повышение производительности оборудования и эффективности использования ЭВМ за счет организации системы одновременной работы устройств и одновременного решения многих задач (мультипрограммной работы), выполнение операций над словами переменной длины (что позволяет эффективно решать как информационно-логические, так и научно-технические задачи), высокая скорость выполнения программ и удобство программирования.

Наличие системы защиты программ друг от друга, датчика времени, аппаратуры сопряжения с каналами связи и пультов операторов для связи с машиной позволяет строить системы обработки данных коллективного пользования, работающие в режиме разделения времени. Высокая степень унификации элементов, блоков, устройств обеспечивает высокую надежность работы систем.

Определенный состав математического обеспечения становится в данном случае неотъемлемой частью машины. Наиболее сложные функции управления вычислительным процессом, такие, как одновре-

менная работа устройств, многопрограммная работа, распределение памяти в динамике решения задач, работа в режиме разделения времени, обеспечиваются совокупностью схем реализации и системой математического обеспечения. Последняя включает, наряду с набором входных языков, соответствующих трансляторов и интерпретаторов, а также библиотек стандартных, типовых и обслуживающих программ (и внутреннего языка), соответствующую систему диспетчеризации. Основное назначение системы диспетчеризации состоит в организации управления потоками задач, рациональном распределении загрузки процессоров системы и обеспечении взаимодействия пользователей оборудованием, входящим в ее состав. Система диспетчеризации должна упрощать связь человека с машиной и содержать средства, удобные для пользователей и для создания новых ее компонентов или других частей математического обеспечения.

Организованные совокупности приемов и процедур для работы на машинах получили название операционных систем. Операционные системы включают в себя средства обмена человека с машиной и комплексы управляющих программ, объем которых составляют десятки (а для больших машин — сотни) тысяч команд. В настоящее время без операционной системы немыслима приемлемая эффективность работы вычислительных машин. В свою очередь реализация операционных систем предъявляет ряд требований к схемным и конструктивным решениям, связанным с проектированием вычислительных машин и их устройств. На вопросах разработки операционных систем в последнее время сконцентрировано внимание ряда ведущих коллективов и организаций Москвы, Новосибирска, Киева, Минска, Дубны, Северодонецка и других научных центров страны.

Одним из подходов к нахождению процесса, порождающего множество эквивалентных реализаций, является построение (при заданном определении эквивалентности) исчисления или системы преобразований, полных в том смысле, что свободное применение их к исходному алгоритму позволяет трансформировать его в любой другой эквивалентный ему алгоритм. Ю. И. Яновым описано (1957 г.) исчисление, которое давало полную систему эквивалентных преобразований для так называемых схем алгоритмов. А. П. Ершову удалось перенести (1966 г.) результаты Ю. И. Янова непосредственно на граф-схемы Л. А. Калужнина и тем самым существенно упростить изложение. Используя идею сведения формально логических преобразований граф-схем алгоритмов (в частности, их минимизацию по операторам действия) к аналогичной задаче для некоторых автоматов Мура, В. М. Глушков, В. Н. Редько и Е. Л. Ющенко существенно упростили и обобщили (1965 г.) результаты Ю. И. Янова.

Построение полной практически удобной системы преобразований возможно, по-видимому, только для весьма узкого определения эквивалентности. Например, в теории операторных схем Янова преобразуется только структура логических условий, обеспечивающих сохранение одного и того же порядка выполнения операторов. Важные результаты в направлении учета структуры операторов действия получены (1959 —

1968 гг.) Н. А. Криницким. Им найдена полная система эквивалентных преобразований применительно к более широкому понятию эквивалентности, чем у Ю. И. Янова. Однако на практике программист, находясь в рамках еще более широкого определения эквивалентности и не ставя вопрос о полной системе преобразований, стремится осуществить более глубокое преобразование программ. В этом случае задача ставится по-другому: даны некоторые средства преобразований программ, требуется найти допустимые условия, обеспечивающие сохранение эквивалентности. С. С. Лавровым (1961 г.), А. П. Ершовым и В. В. Мартынюком (1961 г.), Г. И. Кожухиным (1962 г.) исследована в такой постановке задача об экономии памяти для одного вида операторных схем.

К этим исследованиям по эквивалентным преобразованиям алгоритмов в идейном плане примыкают работы А. А. Летичевского (1958, 1967 гг.), Р. И. Подловченко (1962 г.), В. П. Семика (1963 г.), Р. Н. Тонояна (1963 г.), В. Н. Поршневой (1965 г.), В. И. Малиновского (1967 г.), Г. Д. Фролова (1967 г.) и др.

В. М. Глушковым в работах «Теория автоматов и формальные образования микропрограмм» (1965 г.), «К вопросу о минимизации микропрограмм и схем алгоритмов» (1966 г.) предложен формальный аппарат, являющийся абстрактным выражением существенных связей теории алгоритмов с теорией автоматов и современной абстрактной алгеброй. На базе этого аппарата разработан принципиально новый подход к решению проблем блочного проектирования вычислительных машин, в частности проблем, связанных с эквивалентными преобразованиями алгоритмов и программ и их минимизацией согласно тому или иному критерию. Этими работами положено начало направлению, которое должно привести к существенному сдвигу в автоматизации программирования и проектирования вычислительных машин.

Большую роль в деле координирования исследований и взаимодействия отдельных коллективов в области программирования сыграла Первая всесоюзная конференция по программированию «Системы автоматизации программирования для ЭВМ» (Киев, 1968 г.). Конференция ставила своей целью подведение итогов и определение путей дальнейшего развития в теории программирования и практике построения систем математического обеспечения ЭВМ, координацию исследований ученых, работающих в данной области, ликвидацию разрыва между теоретическими исследованиями, разработками и внедрением результатов в практику. В ее работе приняло участие свыше 1500 делегатов из 85 городов Советского Союза. Важное значение для работы конференции имела предварительная публикация докладов (11 сборников общим объемом 60 л.). Всего было зачитано 100 докладов и сообщений.

На пленарных заседаниях было заслушано восемь докладов. В докладе В. М. Глушкова и А. А. Летичевского «Алгебраические и автоматные методы в теории программирования» подведены итоги теоретических исследований, проводившихся в направлении применений алгебраических и автоматных методов в теории программирования, в частности в направлении разработки методов оптимизации алгоритмов и упрощения алгоритмов трансляции. А. П. Ершов в докладе «Програм-

мирование-68» дал анализ современного состояния этого направления в СССР.

С. С. Лавров сделал доклад о проекте языка АЛГОЛ-68 и о дискуссии, развернувшейся вокруг этого проекта на конгрессе Международной федерации по обработке информации (ИФИП, Эдинбург, 1968 г.). АЛГОЛ-68, в котором сосредоточивается значительное количество новых идей как по своим изобразительным возможностям, так и по способам описания, рядом с языком ПЛ-1 рассматривается как претендент на роль универсального языка программирования нового поколения, идущего на смену АЛГОЛу-60, ФОРТРАНу, КОБОЛу. Хотя работа над языком еще не закончена, его проект привлек к себе внимание и подвергся тщательному обсуждению на последнем конгрессе ИФИП, а также на заседаниях рабочей группы, в которой объединены ученые 13 стран.

В. Н. Редько подвел итоги исследований, проведенных в направлении создания теории построения систем программирования, ориентированных на классы внешних и внутренних языков программирования. С. С. Камынин и Э. З. Любимский в докладе «Универсальные системы программирования на базе машинно-ориентированных языков» дали обзор работ по созданию многоязыковых систем программирования для ряда моделей машин на базе предложенного ими универсального машинно-ориентированного языка АЛМО. И. В. Поттосин в докладе «Операционные системы» рассмотрел вопросы о структуре операционных систем, об организации информации от абонентов и организации потока задач, а также важные для современных вычислительных комплексов вопросы построения операционных систем для разделения времени. В докладе А. П. Ершова, С. С. Лаврова, А. Д. Смирнова, Б. Г. Тамма, А. Н. Томилина «ИФИП-68» дан обзор работы последнего конгресса ИФИП, на котором около 100 докладов (из 240) было связано с программированием и близкими к нему направлениями. На заключительном пленарном заседании был заслушан доклад М. Р. Шуры-Буры «Перспективы развития программирования».

Кроме трех пленарных на конференции было проведено 10 тематических заседаний, посвященных обсуждению вопросов теории программирования, архитектуры вычислительных систем, систем программирования, техники трансляции, операционных систем, программирования для специальных применений, разработки систем математического обеспечения, исследования вычислительных и операционных систем, а также заседаний, на которых обсуждались специализированные языки программирования и новые работы по трансляторам.

В работе по программированию безусловно благоприятствующим является и тот факт, что в этой области существуют некоторые организационные формы международного сотрудничества ученых. Международная федерация по обработке информации создала ряд органов, объединяющих ученых нескольких стран, в том числе и СССР. Технический комитет ИФИП по программированию организует рабочие конференции. Такие конференции проводились в Австрии (1964 г.), Италии (1966 г.), Норвегии (1967 г.), Англии (1968 г.).

Итак, резюмируя, можно сказать следующее: разработка и внедрение систем программирования, базирующихся на алгоритмических языках, — это типичный пример комплексной проблемы, связанной в равной мере с решением математических, лингвистических, инженерных и административных вопросов. В связи с расширением круга применения машин и появлением вычислительных систем помимо разработки алгоритмических языков повышается интерес к так называемым неалгоритмическим языкам, которые могут обеспечить наиболее эффективную оперативную и постоянную связь человека с машиной через индивидуальный пульт в режиме «разговорного программирования». Возникают новые важные проблемы и направления, которые существенно дополняют достижения теории и практики программирования, базирующихся на алгоритмических языках.

Моделирование и аналоговая вычислительная техника

Моделирование широко применяется в различных научных исследованиях при решении инженерных и других практических задач. Метод моделирования в самом широком смысле представляет собой основу познания окружающей действительности. Вполне очевидно, что любое знание о каком-либо предмете — не что иное, как модель этого предмета, сложившаяся в воображении исследователя. Процесс углубления знаний о предмете сопровождается процессом уточнения модели. Поскольку процесс познания абсолютной истины может длиться бесконечно, то и процесс уточнения моделей различных явлений теоретически может оказаться бесконечным. Несмотря на это, метод моделирования широко применяется, так как сведения, которые необходимо иметь об исследуемом явлении или предмете, достаточно получать с определенной, заранее известной и далеко не абсолютной точностью. Почти всегда из практических соображений можно допустить ряд погрешностей в модели, существенно не влияющих на результаты исследования исходного явления или предмета.

Если существует два явления, сходных между собой по каким-либо признакам, то одно из них можно считать объектом исследования, а другое — моделью этого объекта. Поскольку к моделям прибегают в тех случаях, когда необходимо более удобно, наглядно и при меньшей затрате труда получить сведения об объекте, чем это можно сделать, исследуя сам объект, естественно, что модель должна воспроизводить то из подобных явлений, которое более доступно для восприятия его исследователем. Под моделированием понимается как процесс создания модели, так и процесс получения от модели сведений об исследуемом объекте после того, как модель уже построена.

Задача построения модели даже для какого-либо отдельно взятого явления или предмета не однозначна, поскольку среди бесконечного количества явлений существует множество таких, которые в определен-

ных отношениях подобны между собой. Причем абсолютное подобие явлений вовсе не обязательно, ибо обычно исследуются только какие-нибудь определенные стороны явлений, а значит, достаточно построить модель, только частично подобную предмету исследования. Неоднозначность синтеза моделей расширяет возможности для научного поиска с целью развития и совершенствования методов моделирования. Методам моделирования посвящены значительные исследования в различных областях современной науки и техники. Существуют многочисленные формы моделирования (логическое, геометрическое и др.). Мы остановимся лишь на тех, которые связаны с современной так называемой аналоговой вычислительной техникой, т. е. на тех формах моделирования, которые связаны с техническими средствами решения различных математических и инженерных задач.

Первой ступенью в любой из форм моделирования почти всегда является устное или письменное описание некоторого количества известных признаков явления или предмета. Такое представление уже можно считать моделью, и оно может принести определенную пользу исследователю. Например, подобные описательные модели широко применяются при изучении социальных, биологических и других явлений. По-видимому, описательные модели могут быть применены также для изучения различных физических явлений, но вполне очевидно, что в настоящее время более совершенным является математическое описание физических явлений.

Современный математический аппарат представляет собой доведенную до высокой степени совершенства форму описательного моделирования. Описание физического явления в виде математических символов — уже математическая модель этого явления. Методы математического моделирования исключительно богаты. Многие естественные науки достигли высокого уровня развития благодаря их математизации. Математическое моделирование как метод исследования начинают широко применять для исследования в таких, казалось бы, далеких от математики отраслях науки, как биология, медицина, социология, не говоря уже об экономике и управлении производством. Однако с помощью одного лишь математического описания не всегда можно решить задачу исследования. Оно представляет собой обычно удобную и компактную постановку задачи, путь решения которой лежит через решение соответствующих математических уравнений. Задача же решения математических уравнений оказывается часто не менее, а иногда и более трудной, чем задача их составления. В тех случаях, когда не существует приемлемых аналитических методов решения уравнений, прибегают к вспомогательным вычислительным устройствам, в том числе цифровым вычислительным машинам и различного рода моделирующим устройствам. При этом стремятся либо вообще избежать формального применения математических уравнений, либо в какой-то мере автоматизировать решение уравнений, если они все же применяются.

Цифровые вычислительные машины применяются в основном для решения уравнений с помощью численных методов, а моделирующие

устройства используются как для исследования явлений без формального предварительного математического описания, так и для получения результатов решения математических уравнений в форме каких-либо физических величин, распределенных в пространстве или изменяющихся во времени.

Для исследования явлений без формального решения математических уравнений применяется физическое моделирование. Эта форма моделирования характеризуется тем, что моделируемое явление исследуется посредством явлений такой же физической природы (называемых моделирующими), однако более доступных для исследования и достаточно легко воспроизводимых. Технические устройства, воспроизводящие моделирующие явления той же природы, что и моделируемые явления, называются физическими моделями. Примерами физических моделей могут служить модели конструкций самолетов, выполненные в уменьшенном масштабе, маломощные электрические цепи, применяющиеся для исследования сложных и мощных энергосистем, а также модели различных гидротехнических сооружений, выполненные в лабораторных условиях.

Метод физического моделирования имеет важное достоинство, заключающееся в том, что среди воспроизводимых на физических моделях сторон исследуемого явления есть такие, которые по той или иной причине невозможно учесть в математическом описании. Поэтому физическое моделирование позволяет получить весьма достоверные сведения об объекте исследования. Однако и в этих случаях возможны затруднения, связанные с невысокой универсальностью сведений. Действительно, для каждого исследуемого явления должна быть построена самостоятельная модель и переход к другому физическому явлению требует замены всей модели. Изучение влияния отдельных параметров на ход исследуемого процесса также требует замены модели или существенной ее переделки. Если учесть, что к моделированию прибегают при исследовании весьма сложных процессов, то становится очевидным, что построение каждой новой модели требует затраты немалых средств. Эти затруднения в значительной мере можно преодолеть, если воспользоваться подобием явлений различной физической природы. В основе такого подобия лежит изоморфизм математических уравнений, описывающих явления различной физической природы, а это значит, что, для того чтобы установить подобие явлений, необходимо составить математические уравнения, описывающие эти явления, и сравнить их. Однако если для каких-либо двух явлений или исследуемых систем на основании сравнения математических описаний составить правила, по которым можно установить систему соответствий между отдельными сторонами моделируемого и моделирующего воздействий, то в дальнейшем становится возможным моделировать различные сочетания сторон моделируемого явления такими же сочетаниями соответствующих сторон моделирующего явления без математического описания этих сочетаний.

Таким образом, становится возможным выбирать моделирующие явления, воспроизводящиеся посредством моделей, которые легче син-

тезировать, чем физические модели. Эту форму моделирования называют моделированием по системе аналогий. К числу известных систем аналогий относятся аналогии между гидравлическими и электрическими, механическими и электрическими, тепловыми и механическими явлениями.

Свойства подобных явлений, в том числе и явлений различной физической природы, а также методы установления подобия изучаются специальной отраслью науки — теорией подобия. На основании теорем теории подобия устанавливаются соотношения между параметрами подобных явлений или на основании известных соотношений между параметрами делается заключение о подобии явлений. В теории подобия три основные теоремы. Первая и вторая основаны на предположении о том, что сравнимые явления подобны и потому позволяют определить величины параметров одного из явлений с целью моделирования другого. Третья теорема определяет пути реализации подобия при построении моделей.

Сущность всех трех теорем сводится к следующему. Согласно первой теореме у подобных явлений существуют определенные сочетания параметров — критерии подобия, имеющие одинаковые значения. Согласно второй теореме всякое полное уравнение физического процесса, записанное в определенной системе единиц, может быть представлено в виде зависимости между критериями подобия, т. е. безразмерных соотношений, составленных из входящих в уравнение параметров. Суть третьей теоремы подобия состоит в том, что необходимыми и достаточными условиями для создания подобия являются пропорциональность сходственных параметров, входящих в условие однозначности, и равенство критериев подобия изучаемого явления. Под условием однозначности понимается задание тех параметров и соотношений между ними, которые определяют какой-либо единственный ход процесса из всего класса возможных процессов, описываемых каким-либо уравнением.

В основе установления подобия явлений лежит подобие их математических описаний. Даже для физических моделей, построенных без привлечения математических уравнений, должно выполняться условие математического подобия, т. е. при физическом моделировании неявно применяется математическое моделирование. При моделировании по системе аналогий уравнения, описывающие отдельные элементы модели, должны быть также подобны уравнениям, описывающим сходственные элементы моделируемого явления, и только после того, как это подобие установлено, модель-аналог можно строить путем составления из отдельных элементов, не прибегая формально к математическому описанию этих сочетаний. Поскольку и в том и в другом случае уравнения моделирующего и моделируемого явлений одинаковы или подобны, а процессы, протекающие в моделях, соответствуют решению описывающих их уравнений, то и физические модели и модели-аналоги можно рассматривать как физически реализованные математические модели. Исходя из этого, можно перейти от моделирования путем построения модели всего явления и от моделирования путем построения моделей отдельных элементов моделируемого явления и составле-

ния из них модели всего явления к моделированию отдельных математических операций, составляющих уравнение моделируемого явления. В этом случае моделируемым объектом становится математическое описание, а элементами моделей — элементы, моделирующие операции сложения, вычитания, умножения и деления, интегрирования и дифференцирования, нелинейного преобразования. Вполне очевидно, что, имея в распоряжении указанные элементы, способные производить операции над какими-либо физическими величинами, можно моделировать исходные уравнения по операциям, составляя из элементов определенный набор, последовательность выполнения операций в котором та же, что и в моделируемом уравнении. В результате получится физически реальная математическая модель. Эту форму моделирования можно назвать математическим операционным моделированием.

Для построения операционных моделей можно использовать решающие элементы различной физической природы. Например, можно построить модели, состоящие из механических решающих элементов, гидравлических, электрических и др. Поскольку в операционных моделях решаются исходные уравнения уже в достаточно явной форме, хотя получающиеся результаты представляют собой не числа, а значения физических величин, можно считать их математическими машинами. Именно поэтому получили широкое распространение такие названия моделей этого класса, как «математические машины непрерывного действия» и «аналоговые вычислительные машины» (АВМ). На таких машинах классифицировать исследуемые явления удобнее не по виду или физической природе их, а по типу описывающих их математических уравнений, например алгебраических, обыкновенных дифференциальных, интегральных и т. д. Отсюда же вытекает и специализация аналоговых машин по типам решаемых уравнений.

Аналоговые вычислительные машины отличаются более высокой степенью универсальности по сравнению с физическими моделями и моделями-аналогами, поскольку огромному множеству различных физических явлений соответствует сравнительно небольшое количество классов математических уравнений. Так как для измерения и конструирования весьма удобны электрические элементы, устройства и цепи, то АВМ в большинстве своем представляют собой электрические и электронные цепи, хотя разработаны и успешно применяются механические, гидравлические, пневматические моделирующие устройства.

С развитием теории и практики моделирования определилась область науки, называемая электронным математическим моделированием, или электронным моделированием. В ней используются теория электрических и электронных цепей, теория подобия, теория автоматического регулирования и управления, многие области математики; она включает синтез цепей, являющихся в определенном смысле моделями различных объектов, математических операций и уравнений, теоретические вопросы построения соответствующих вычислительных и управляющих электронных установок, машин и устройств, а также методы решения с их помощью разнообразных задач.

Основой технических средств электронного моделирования являются моделирующие цепи, т. е. электрические или электронные цепи, в которых распределение токов или напряжений, или каких-либо других величин находится в определенном соответствии с математическими зависимостями, служащими для описания стационарных или нестационарных процессов, происходящих в изучаемом объекте. Моделирующие цепи строятся путем установления аналогий между уравнениями объекта и уравнениями самой цепи. Аналогии могут быть простыми и сложными. Простые аналогии часто называют прямыми, а сложные — квазианалогиями. Состояние моделирующих цепей, построенных на основе прямых аналогий, описывается уравнениями, подобными уравнениям объекта, а состояние квазианалоговых цепей — некоторыми другими уравнениями, эквивалентными первым в отношении получаемого результата. Поэтому говорят, что моделирующее устройство прямой аналогии строится на основе принципа подобия, а квазианалоговое — на основе принципа эквивалентности.

Квазианалоговые модели каких-либо уравнений (А) — это модели прямой аналогии каких-либо уравнений (Б), хотя бы частично не подобных уравнениям (А) и таких, чтобы при выполнении условий эквивалентности все или некоторые из неизвестных уравнений (Б) совпали с точностью до постоянных множителей с неизвестными исходных уравнений (А). Условия эквивалентности могут быть такими, что для их реализации в моделирующей цепи не потребуется использование получаемых в ней величин. Такие модели по своим свойствам не отличаются от моделей прямой аналогии. Они названы квазианалоговыми моделями первого рода, или неуправляемыми (неуравновешиваемыми) моделями. В общем случае условия эквивалентности таковы, что для их реализации необходимо использовать полученные в моделирующей цепи величины. Поскольку последние заранее неизвестны, для реализации условия эквивалентности следует организовать определенный процесс управления (уравновешивания). Сами модели в этом случае называются квазианалоговыми, или управляемыми (уравновешиваемыми).

Модели прямой аналогии и неуправляемые квазианалоговые модели относятся к категории устройств, не охватываемых обратными связями. Модели второго рода состоят из двух основных частей: квазианалога и устройства управления, осуществляющего обратные связи между получаемыми в квазианалоге и вводимыми в него управляющими величинами.

Известно несколько видов аналоговых и квазианалоговых математических машин. К одному из них относятся аналоговые машины, предназначенные для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Обыкновенные дифференциальные уравнения играют важную роль в современной механике, физике и других науках, но особенно большую роль они сыграли в развитии современной теории автоматического управления. С определенной точки зрения теорию автоматического управления можно считать одной из главных областей приложения

теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений применяется при описании и анализе процессов в системах автоматического регулирования, а также в развитии многочисленных методов синтеза управляющих систем. Поскольку методы аналитического решения обыкновенных дифференциальных уравнений оказываются подчас весьма сложными, особенно при решении уравнений и систем высокого порядка, в том числе и нелинейных, трудно переоценить значение аналоговых вычислительных машин, с помощью которых не только получают решение уравнений при гораздо меньшей затрате труда, но и проводят инженерный анализ моделируемых автоматических систем с несложным исследованием многочисленных вариантов решения. Действительно, после того как модель какого-либо уравнения построена, не составляет труда оценить влияние различных значений коэффициентов моделируемых уравнений и различных внешних возмущений. Для этого необходимо лишь определенным образом изменить параметры модели, которым соответствуют такие элементы, как электрические сопротивления, емкости, индуктивности, или изменить входные воздействия в модели, которым соответствуют изменяемые по заданным законам напряжения или токи в определенных точках электрической цепи модели.

Другую группу аналоговых вычислительных машин составляют устройства для решения дифференциальных уравнений в частных производных. К ним относятся различные модели на сплошных средах, например модели на электропроводной бумаге и электролитические ванны, а также многочисленные типы сеточных электроинтеграторов, предназначенных для решения дифференциальных уравнений в частных производных в их разностной постановке. Среди сеточных электроинтеграторов наибольшей универсальностью отличаются квазианалоговые интеграторы, с помощью которых стало возможным решать уравнения наиболее широкого класса.

Специальные аналоговые машины применяются для решения систем алгебраических уравнений. К ним относятся электронные модели на постоянном токе, обычно с усилителями, имеющими большие коэффициенты усиления, а также модели переменного тока, в которых кроме сопротивлений используются индуктивности и емкости.

Существует большое количество более специализированных АВМ, например для моделирования стержневых систем и конструкций, для решения задач теплопереноса и фильтрации, для статистического анализа систем и объектов управления.

В последнее время разработаны методы моделирования и построены соответствующие машины, с помощью которых можно решать краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также машины для решения задач линейного программирования. АВМ постоянно совершенствуются: повышается качество решающих элементов, для чего, например, создаются операционные усилители с широкой полосой пропускания, технически совершенствуются модели с периодизацией решения, разрабатываются новые принципы модели-

рования и синтеза моделей. Расширяются также области приложения аналоговой техники.

Важную роль в развитии теории подобия, методов моделирования, а также в создании образцов моделирующих устройств сыграли отечественные ученые.

Применение моделей, главным образом для технических целей, можно проследить начиная с очень давних времен. Использование моделей обычно связывалось с крупными разработками такого плана, как строительство жилых и производственных сооружений, различного вида дорожных сооружений. В период промышленного подъема в России в XVIII—XIX вв. развивается инженерное дело, сопровождающееся разработкой и применением самых разнообразных физических моделей при строительстве дорог, мостов, фабрик, при проектировании паровых машин и т. п. К наиболее известным моделям этого периода относятся построенные в 1775, 1776 гг. выдающимся русским изобретателем И. П. Кулибиным модели проектируемого арочного моста через Неву. Им впервые было правильно определено соотношение между линейными размерами модели и действующими в ней усилиями. Полученные И. П. Кулибиным из этих соотношений условия подобия были проверены и одобрены Л. Эйлером.

Практикой применения моделей установлено, что простое повторение форм моделируемого объекта в модели не всегда позволяет получить правильные результаты. Поэтому для эффективного внедрения методов моделирования в технику потребовалось разработать некоторые общетеоретические положения, развившиеся в дальнейшем в теорию подобия. Основы теории подобия заложены Фурье, Бертраном и В. Л. Кирпичевым. В 1874 г. Кирпичев опубликовал свою первую работу об упругих явлениях в геометрически подобных телах. Позднее он сформулировал условия подобия упругих тел, установил закон механического подобия при упругих деформациях. Из развитых им теоретических положений были выработаны правила моделирования для артиллерийского дела и строительства. Теоретические положения Кирпичева развивали другие русские ученые, в частности Т. А. Афанасьева-Эренфест и Н. Г. Чеботарев.

Широкая математизация проектных работ во второй половине XIX в. и связанное с ней увеличение объема вычислений заставили ученых обратить серьезное внимание на механизацию и автоматизацию вычислительных работ. Самыми распространенными вычислительными приборами в это время были механические арифмометры (далекие от совершенства), а также логарифмические линейки. Ученых увлекают мысли о создании вычислительных устройств, которые могли бы выполнять более сложные математические операции и за более короткое время. Еще в 1887 г. А. Н. Крылов перевел на русский язык и опубликовал главу из книги Томсона и Тэта «Курс натуральной философии» (ч. 1) под названием «О вычислительных машинах». В 1904 г. в «Известиях Академии наук» была напечатана его работа «Об интеграторе обыкновенных дифференциальных уравнений», сыгравшая чрезвычайно важную роль в развитии математического моделирования. В этой работе

впервые предлагался принцип последовательного интегрирования, по которому можно построить математическую машину для решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного вида с переменными коэффициентами, приведена кинематическая схема и намечена конструкция такого механического устройства. Предложенный Крыловым принцип положен в основу построения всех разработанных позднее, в том числе и современных, аналоговых вычислительных машин для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

В 1911 г. была издана книга А. Н. Крылова «Лекции о приближенных вычислениях», в которую вошла также названная выше работа с «Прибавлением». В «Прибавлении» описывается конструкция построенного под руководством автора механического интегратора для решения уравнений до четвертого порядка включительно. Однако в связи с началом первой мировой войны отладка и доводка машины Крылова не была закончена. В дальнейшем А. Н. Крылов неоднократно возвращался к вопросам создания вычислительных устройств и всемерно содействовал развитию этого направления в СССР.

Еще в XIX в. было положено начало развитию метода электрогидродинамических аналогий (ЭГДА). Электрогидродинамической аналогии посвятил отдельную главу в «Лекциях по гидромеханике» (1887 г.) Н. Е. Жуковский. Но особенно большую роль в развитии метода ЭГДА сыграл Н. Н. Павловский. Основные результаты его исследований (1918—1922 гг.) изложены в докторской диссертации «Теория движения грунтовых вод под гидромеханическими сооружениями и ее основные приложения» (1922 г.; изд. 2-е — 1956 г.). В этой работе теоретические разработки Павловского были завершены созданием конструкции модели ЭГДА, ее схемы и методики решения задач напорной фильтрации.

Развитие метода ЭГДА и расширение его приложений продолжалось П. Ф. Фильчаковым (1949 г.), В. И. Панчишиным (1953 г.), Н. И. Дружининым (1954 г.) и др. Методы моделирования объемных задач на сплошных средах разрабатывались А. Г. Угодчиковым (1955 г.), В. В. Ницецким (1956 г.), О. В. Тозони (1956 г.).

Важное значение для разработки методов моделирования имели исследования С. А. Гершгорина. Ему принадлежат разработки весьма сложных и оригинальных решающих механизмов. Так, в 1925 г. он впервые предложил механизм для интегрирования дифференциального уравнения Лапласа и подробно описал этот прибор, а в 1926 г. доказал теорему о том, что всегда можно построить шарнирный механизм, реализующий любую алгебраическую зависимость комплексного переменного. Но наибольшая заслуга Гершгорина состоит в том, что он первый предложил (1929 г.) метод сеточного электрического моделирования для решения дифференциальных уравнений в частных производных, осуществив тем самым физическую реализацию конечноразностных аппроксимаций и положив начало новому научному направлению.

Советские ученые продолжают развивать теорию подобия. В работе (1931 г.) М. В. Кирпичева и А. А. Гухмана сформулирована тре-

тья теорема подобия, устанавливающая необходимые и достаточные условия для обеспечения подобия двух явлений. М. В. Кирпичевым, М. А. Михеевым, П. К. Конаковым разрабатывались (30-е годы) вопросы применения теории подобия в теплотехнике. В работах (1935 — 1937 гг.) К. М. Поливанова и С. М. Брагина освещается применение методов теории подобия к задачам электротехники.

Новые положения о подобии сложных и нелинейных систем разрабатывались (начиная с 1940 г.) В. А. Вениковым. В качестве критерия подобия нелинейных систем он предлагает требование одинаковости относительных характеристик протекающих в них процессов. Разработанные Вениковым критерии полного подобия основных электромагнитных и электромеханических явлений, а также критерии подобия цепей положены в основу развития (1949 г.) физического моделирования энергосистем и электрических машин.

Теории подобия посвящены работы Л. И. Седова (1943 г.), Л. С. Эйгенсона (1945 г.), И. М. Кирко (1954 г.), В. Б. Геронимуса (1961 г.).

В конце 30-х годов появились первые работы по моделированию Л. И. Гутенмахера. Он развивает (1940 г.) методы, предложенные С. А. Гершгориним, и разрабатывает новые направления, относящиеся к применению моделирующих цепей с электронными усилителями, значительно расширяющими возможности методов электро моделирования. На основе усилителей Гутенмахер построил (1946 г.) матричные модели систем алгебраических и дифференциальных уравнений, разработал модели многомерных систем. Кроме того, он предложил модели на переменном токе с реактивными проводимостями и применил для моделирования методы конформных преобразований. Предложенные Гутенмахером принципы матричных моделей нашли удачное приложение в разработках (1947 г.) Г. А. Полисара. Методы сеточного моделирования развивались позднее (50—60-е годы) В. Е. Дьяченко, И. М. Белашом, Б. А. Волыньским, В. Е. Бухманом.

В 30-х годах было разработано много новых моделирующих устройств и методов моделирования. Так, в 1932 г. на основе ферродинамических и магнитоэлектрических приборов, снабженных контактной следящей системой, Ю. М. Стадницкий сконструировал универсальное устройство для решения алгебраических уравнений и их систем. В 1933 и 1936 гг. А. В. Михайловым были предложены способы решения алгебраических и дифференциальных уравнений. В 1935 г. под руководством В. С. Лукьянова начали разрабатывать гидроинтеграторы для решения уравнений в частных производных. Эти устройства основаны на гидравлических аналогиях и применялись для решения уравнений Фурье, а также более общих уравнений.

Исследования А. Н. Крылова по механическим вычислительным машинам развивал (1937 г.) Н. Г. Бруевич. Он разработал новые принципы решающих механизмов, в том числе принципы составления схем и построения машин для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, а также машин для решения алгебраических уравнений. Бруевич развил теорию точности математических машин и счетно-решающих механизмов («Точность механизмов», 1946 г.). После-



Н. Е. Кобринский.

дующие его работы относятся к теории вычислительных машин, как аналоговых, так и цифровых. Вопросы точности моделирующих устройств разрабатывались позднее Б. Г. Доступовым (начиная с 1950 г.), М. Л. Быховским (1952, 1958 гг.) и др.

В 1939 г. была введена в эксплуатацию построенная под руководством И. С. Брука машина с механическими интеграторами для решения дифференциальных уравнений до шестого порядка, а также систем уравнений этого же порядка. Брук предложил (1946 г.) зубчато-рычажный механизм для интегрирования дифференциального уравнения Лапласа. Он одним из первых предложил также методику решения систем алгебраических уравнений и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящую

в минимизации суммы модулей невязок посредством электронных моделей с дополнительным устройством.

Усовершенствованию моделирующих механизмов, а также разработке электромеханических решающих устройств посвящены работы А. Н. Лебедева (начиная с 1947 г.), Н. Е. Кобринского (1954 г.), В. К. Тигова (1953 г.), Я. В. Новосельцева (1954 г.) и др.

В 40-х и особенно в 50-х годах интенсивно развиваются, совершенствуются и получают широкое распространение электрические модели-аналоги, расчетные столы, специализированные электрические модели, электронные математические машины на постоянном токе, а также модели на переменном токе, в том числе с вращающимися трансформаторами. Немалую роль в этом сыграли работы И. М. Тетельбаума по электрическому моделированию изгибных колебаний, крутильных колебаний валов и развитию более общих методов (1959 г.).

Вопросами моделирования процессов регулирования в автоматических системах занимался (1958, 1963 гг.) Б. Я. Коган. Он разработал методику исследования систем автоматического регулирования посредством современных аналоговых вычислительных машин, предложил схемы основных решающих элементов этих машин, исследовал точность моделирования.

Исследованию систем управления методами моделирования, а также разработке нелинейных и других решающих элементов посвящены работы (50—60-е годы) А. А. Фельдбаума, С. А. Гинзбурга, Л. Н. Фицнера, Ф. Б. Гулько, М. В. Рыбашова. Изучением проблем устойчивости аналоговых машин с операционными усилителями постоянного тока занимался (1959 г.) Н. Н. Ленев. Он предложил схемы моделей, обладающих высокой устойчивостью. Математические вопросы теории аналоговых вычислительных машин для решения дифферен-

циальных уравнений рассмотрены (1957 г.) И. И. Этерманом.

Многочисленные исследования в области аналоговой вычислительной техники были обобщены (начиная с 1957 г.) в трудах киевской школы электро моделирования (Г. Е. Пухов, Б. А. Борковский, В. М. Самусь, А. Е. Степанов, В. В. Васильев, А. Ф. Верлань, Г. И. Грездов и др.). В результате этих исследований были созданы новые принципы синтеза моделей и разработан целый ряд современных электронных математических машин. Так, Г. Е. Пухов предложил (1961, 1964 гг.) для построения моделирующих устройств более общий, по сравнению с критериями подобия, принцип эквивалентности, благодаря которому стало возможным создание квазианалоговых (в том числе неуправляемых и управляемых) моделей, разработал вопросы моделирования краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Им также предложены схемы обратимых электронных решающих элементов и методика построения обратимых моделей, разработан новый метод так называемого динамического моделирования.

И. М. Витенберг исследовал (начиная с 1952 г.) вопросы построения машин с периодизацией решения и их применения для решения краевых задач и интегральных уравнений, а также вопросы анализа и повышения эффективности аналоговых машин.

В разработке методов моделирования, а также в построении и применении современных аналоговых машин важные исследования выполнены В. А. Трапезниковым, В. Б. Ушаковым, Г. М. Петровым, Д. Е. Полонниковым, Н. С. Николаевым, Э. С. Козловым, А. А. Венгеровым, Н. Н. Михайловым, Е. И. Ламиным.

Специальные вопросы моделирования, относящиеся к цифровым дифференциальным анализаторам и импульсным моделям, отражены в работах (50—60-е годы) В. Б. Смолова, Ф. В. Майорова, А. В. Каляева, К. С. Неслуховского, Г. И. Тахванова, А. В. Шилейко.

Современное состояние теории моделирования характеризуется применением новейших математических методов исследования и быстрым расширением круга их приложений. Перед аналоговой вычислительной техникой открываются большие возможности в связи с развитием и применением вычислительных сред, а также взаимопроникновением принципиальных и технических разработок аналоговых и цифровых машин.



В. А. Трапезников.

Теория автоматов

Теория автоматов была создана в начале 50-х годов в результате практики проектирования вычислительных машин, а также разработки математических моделей высшей нервной деятельности биологических организмов. Математическое понятие абстрактного автомата, введенное Мили и Муром, составляет основу для одновременного исследования различных устройств переработки дискретной информации независимо от внутренней природы. Поскольку для приложений основную роль играет понятие конечного автомата, естественно, что теория конечных автоматов была развита раньше других областей теории автоматов.

В основе абстрактной теории конечных автоматов лежит теорема Клини, характеризующая события, представимые в конечных автоматах. Первоначальная теорема Клини оказалась слишком сложной для дальнейших применений, и, кроме того, она была основана не на понятии абстрактного автомата, а на понятии идеализированной нервной сети. Советский математик Ю. Т. Медведев упростил (1956 г.) теорию Клини. Однако и это упрощение было далеким еще от возможности приложений его в области синтеза схем вычислительных машин. Построение теории, удобной для практических применений, принадлежит В. М. Глушкову. Им усовершенствован (1960 г.) язык регулярных выражений, построены новые алгоритмы анализа и синтеза автоматов. Алгоритм синтеза Глушкова положен в основу этапа абстрактного синтеза при проектировании схем и устройств вычислительных машин. В дальнейшем Глушков разработал полную методику синтеза схем дискретных устройств преобразования информации, охватывающую основные этапы синтеза формальными методами. Его монография «Синтез цифровых автоматов» (1962 г.) сыграла большую роль в распространении формальных методов синтеза вычислительных и управляющих машин.

Несколько в другом направлении задача абстрактного синтеза изучалась Б. А. Трахтенбротом. В качестве языка для описания функционирования конечных автоматов Трахтенброт предложил (1958 г.) использовать расширенное исчисление одноместных предикатов с ограниченными предметными кванторами (так называемую слабую арифметику второго порядка). Эти его исследования, а также работы, связанные с синтезом автоматов, позволили получить новые результаты и в математической логике. Важную роль в развитии теории автоматов сыграла монография Н. Е. Кобринского и Б. А. Трахтенброта «Введение в теорию конечных автоматов» (1962 г.). Проблемы абстрактного синтеза и анализа конечных автоматов исследовались (1960—1965 гг.) также учениками В. М. Глушкова (В. Г. Боднарчуком, Ю. В. Капитоновой, А. А. Летичевским, А. А. Стогнием), М. А. Спиваком и Б. Г. Миркиным, М. А. Айзерманом и др. В. Г. Боднарчук предложил (1963 г.) метод анализа конечных автоматов, основанный на решении систем уравнений вида $x_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ в алгебре регулярных событий. Дальнейшие результаты по теории уравнений такого вида нашли приложение в теории контекстно-свободных языков.



Акад. В. М. Глушков читает лекцию в Киевском университете. 1967 г.

В теории синтеза автоматов важную роль играет задача минимизации числа состояний автомата. В случае частичных автоматов она связана с большими алгоритмическими трудностями. Поэтому основной упор в этой области делается на разработку практически удобных методов минимизации (работы 1960—1967 гг. В. М. Глушкова, В. Г. Лазарева, Е. И. Пийль, А. Д. Закревского, А. А. Летичевского).

Основы теории структурного синтеза автоматов были заложены в рамках теории релейно-контактных схем значительно раньше возникновения самой теории автоматов. Вклад советских ученых в развитие этого направления весьма значителен. Еще в 1938 г. В. И. Шестаков (одновременно с американским ученым К. Шенноном) для решения задач синтеза релейно-контактных схем применил аппарат булевой алгебры. Большую роль в дальнейшем развитии теории релейно-контактных схем сыграла монография М. А. Гаврилова «Теория релейно-контактных схем» (1950 г.). Методы синтеза и упрощения релейно-контактных схем разрабатывались (начиная с 1950 г.) А. Г. Лунцем, Г. Н. Поваровым, В. Н. Рогинским, А. Д. Харкевичем, А. Ш. Блохом.

Развитие электронной вычислительной техники дало возможность построить общую теорию логических сетей, положенную затем в основу структурной теории автоматов. Общей теории логических сетей посвящена известная работа Н. Е. Кобринского и Б. А. Трахтенброта



С. В. Яблонский.

«О построении общей теории логических сетей» (1959 г.).

Одна из важных проблем теории логических сетей состоит в изучении сложности сетей в зависимости от реализуемых ими операторов. Исследования в этом направлении связаны с изучением асимптотических закономерностей, которые проявляются при больших значениях параметров, характеризующих операторы, реализуемые в сетях. Такой подход был впервые применен (1949 г.) Шенноном для реализации булевых функций релейно-контактными схемами. Окончательное решение задачи, сформулированной Шенноном, получено (1958 г.) О. Б. Лупановым. Им обобщена эта проблематика и на схемы других типов. Важные результаты, связанные с этим направлением, получены (начиная с 1959 г.)

также С. В. Яблонским, Р. Е. Кричевским, В. В. Глаголевым, А. Д. Коршуновым, Ю. Л. Васильевым, Э. И. Нечипоруком. Б. А. Трахтенброт распространил (1959 г.) методы, разработанные О. Б. Лупановым и его учениками для оценок сложности схем, на логические сети общего вида (с обратными связями). Для этого случая он установил соответствующую предельную теорему.

Результаты исследования сложности схем, реализующих булевы функции, показывают, что почти все функции заданного числа переменных реализуются самым сложным образом. Поэтому возникает вопрос об отыскании классов функций, допускающих более простую реализацию по сравнению с общим случаем. Существенным продвижением в исследовании этого вопроса является принцип локального кодирования, разработанный (1961 г.) О. Б. Лупановым.

Алгоритмы и методы синтеза оптимальных схем обычно отличаются большой трудоемкостью и связаны с перебором. С. В. Яблонский показал (1959 г.), что при решении некоторых задач, связанных с синтезом схем, невозможно обойтись без полного перебора всех булевых функций заданного числа переменных. Ю. И. Журавлев исследовал (1960—1962 гг.) алгоритмы построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм булевых функций. В частности, рассматривал вопросы, связанные с построением алгоритмов минимизации, дающих наилучшие результаты при заданных ограничениях на сложность алгоритма.

Важное значение в структурной теории автоматов имеет проблема полноты систем автоматов. Для автоматов без памяти в двоичном структурном алфавите решение проблемы полноты получается из известной теоремы Поста о функциональной полноте в двузначной логике. Исследованию проблемы полноты в многозначных логиках посвящены работы (начиная с 1953 г.) С. В. Яблонского. В частности, им по-

лучено окончательное решение проблемы полноты для трехзначной логики.

В. Б. Кудрявцев рассматривал (1960 г.) критерии полноты для некоторых классов сетей без обратных связей. А. А. Летичевский нашел (1961—1963 гг.) критерии полноты систем автоматов Мура при условии, что имеется полный набор автоматов без памяти. М. И. Кратко установил (1964 г.) алгоритмическую неразрешимость проблемы распознавания полноты системы автоматов при самой общей постановке вопроса.

Абстрактная теория автоматов имеет глубокие связи с более развитыми областями общей алгебры, в частности с теорией полугрупп. В алгебраическом аспекте теория автоматов рассматривалась (1961 г.) В. М. Глушковым. Ю. И. Соркин изучал (1961 г.) задание автоматов с помощью определяющих соотношений. Им, в частности, решена проблема изоморфизма автоматов, заданных конечным числом определяющих соотношений. Применению теории бинарных отношений к решению задач теории автоматов посвящена работа (1964 г.) М. А. Спивака. Л. А. Калужнин ввел (1965 г.) понятие казуальностей, с помощью которых можно описывать классы автоматов. Изучение этого понятия привело к интересным постановкам задач, подобных тем, которые рассматриваются в теории моделей. Дальнейшее развитие это понятие получило в работах (1965 г.) Капхенгста (ГДР). В. Н. Редько исследовал (1964 г.) события, представимые в конечных коммутативных автоматах. Оценкам числа классов изоморфных автоматов и фактическому построению с помощью вычислительной машины представителей этих классов для небольших значений числа состояний посвящены работы (1965 г.) Ю. В. Капитоновой. Некоторые асимптотические оценки числа классов изоморфных автоматов получены (1966 г.) Э. М. Лившицем. Периодические свойства отображений, реализуемых конечными автоматами, исследовал (1964 г.) Ю. И. Любич. Он нашел также (1964 г.) интересное применение теории матриц с неотрицательными элементами для решения задачи оптимальной детерминизации автомного автомата.

Алгебра регулярных событий играет важную роль в абстрактной теории автоматов. Интересные результаты в этой области получены (1962, 1964 гг.) В. Н. Редько и Ю. И. Яновым. Редько показал, что алгебра регулярных событий имеет бесконечно много независимых тождественных соотношений. В то же время подалгебра алгебры регулярных событий, состоящая только из таких событий, каждое из которых содержит пустое слово, как показал Янов, имеет лишь конечное число тождеств. Янов исследовал также свойство инвариантности операций над событиями и показал, что этим свойством обладают лишь операции, производные от основных операций алгебры событий.

Исследованию экспериментов с конечными автоматами посвящены работы А. А. Карацубы (1960 г., оценка длины эксперимента, определяющего заключительное состояние автомата) и Ю. М. Бородянского (1965 г., оценка длины эксперимента, определяющего автомат с точностью до изоморфизма). М. А. Спивак предложил трактовку



Б. Н. Малиновский.

эксперимента, отличную от трактовки Мура, и исследовал (1966 г.) свойства множества экспериментов конечного автомата. Интересные результаты по теории экспериментов получены (1968, 1969 гг.) Я. М. Барздинем.

В последние годы центр тяжести в исследованиях по теории автоматов постепенно переносится на автоматы с бесконечным числом состояний. Это направление тесно связано с проблематикой теории алгоритмов и, по-видимому, приведет к более подробной по сравнению с классической теорией классификации алгоритмов, что особенно важно для приложений.

Одним из важных направлений в теории бесконечных автоматов является теория растущих автоматов. А. Н. Колмогоров предложил (1960 г.) некоторый подход к определению расущего автомата и сформулировал ряд результатов, полученных в этой теории им и его учеником Ю. О. Офманом. Я. М. Барздинь получил (1964 г.) интересные результаты по характеристике универсальных элементов, из которых строится растущий автомат, а также по моделированию одних автоматов на других. К этому направлению тесно примыкают исследования (1965—1967 гг.) Б. А. Трахтенброта по оценкам сложности алгоритмов, реализуемых машинами Тьюринга с различными ограничениями.

Другое направление в теории бесконечных автоматов связано с теорией формальных языков. Поскольку формальный язык определяется как множество слов некоторого алфавита, естественно рассматривать автоматы, которые распознают или порождают языки, принадлежащие к тем или иным классам. В частности, можно выделить класс регулярных языков, т. е. языков, представимых в конечных автоматах. А. В. Гладкий установил (1964 г.) связь между языками непосредственно составляющих и языками, распознаваемыми с помощью недетерминированных автоматов с линейно растущей памятью. А. А. Летичевский исследовал (1965 г.) вопросы представления контекстно-свободных языков в автоматах с памятью типа push-down.

Новое понятие бесконечного автомата было предложено (1965 г.) В. М. Глушковым. Оно связано с применением теории автоматов для формализации методов проектирования вычислительных машин. Основная идея, на которой строится теория Глушкова, заключается в представлении электронной вычислительной машины в виде композиции двух автоматов — операционного и управляющего. Управляющий автомат — это конечный автомат, реализующий микропрограмму управления машиной. Операционный автомат рассматривается как бесконечный автомат специального типа — многорегистровый автомат. Глушков разработал (1965 г.) систему микропрограммных алгебр, с

помощью которой можно построить достаточно сильную систему формальных преобразований микропрограмм в виде соотношений в микропрограммных алгебрах. С помощью этих преобразований удастся, например, получить формальным путем оптимальные алгоритмы умножения и деления чисел, исходя из естественного, но не оптимального определения микропрограмм этих операций. Некоторые результаты в этом направлении, связанные с исследованием эквивалентности микропрограммных автоматов, получены (1966, 1967 гг.) А. А. Летичевским.

Методы и результаты теории автоматов оказались весьма плодотворными для некоторых смежных областей теоретической кибернетики. Примером может служить применение теории автоматов в теории кодирования сообщений (1961, 1962 гг.; В. И. Левенштейн, Ю. В. Глебский, А. А. Марков).

Важные результаты получены советскими математиками в теории вероятностных автоматов. Особенно плодотворным оказалось направление, связанное с исследованием оптимального поведения автоматов в случайных средах и изучением игр автоматов (начиная с 1961 г., М. Л. Цетлин и его ученики). Р. Г. Бухарев рассматривал (1965, 1966 гг.) общие вопросы теории вероятностных автоматов. В его работах сделана попытка перенести некоторые результаты и понятия классической теории автоматов на вероятностные автоматы.

Экономическая кибернетика

Экономическая кибернетика изучает общие законы преобразования информации в системах управления экономикой. Научные основы применения математических методов и ЭВМ в планировании и экономическом анализе были заложены в работах (1958—1964 гг.) В. С. Немчинова.

В Советском Союзе основные исследования по развитию математического аппарата экономической кибернетики сосредоточены в Институте кибернетики АН УССР, Институте математики СО АН СССР, Вычислительном центре и Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР, а также в Центральном экономико-математическом институте АН СССР, созданном в 1963 г.

Математические исследования, относящиеся к экономической кибернетике, связаны с развитием и использованием математических методов и электронной вычислительной техники для решения экономических и технико-экономических задач, а также создания автоматизированных систем планирования и управления. Их можно подразделить на следующие направления: теорию оптимальных решений, моделирование экономических и производственных процессов, математические методы машинной обработки больших массивов информации, разработку алгоритмических языков для описания экономических задач и построения алгоритмов их решения.

Для решения задач управления экономическими объектами и процессами необходима оптимизация тех или иных показателей, харак-



В. С. Немчинов.



Н. П. Федоренко.

теризующих состояние объекта или протекание процесса в условиях ограниченности ресурсов. Математическая формализация таких задач привела к постановкам задач на условный экстремум функций и функционалов, не всегда охваченным известными ранее методами математического анализа и вариационного исчисления. В связи с большой размерностью этих задач и необходимостью применения для их решения ЭВМ центр тяжести исследований переместился: хотя вопросы существования оптимального решения, разработки необходимых и достаточных условий оптимальности остаются в поле зрения математиков экономико-математического направления, основное внимание уделяется разработке эффективных алгоритмов решения задач оптимизации.

Принципиальное значение для развития этого направления имели работы Л. В. Канторовича по линейному программированию, в которых был развит аппарат исследования и решения задач оптимизации линейного функционала при линейных ограничениях. Этот класс задач Канторович выделил еще в конце 30-х годов в результате анализа ряда конкретных производств. Позднее для задач линейного программирования был сформулирован принцип двойственности и дана его экономическая трактовка, показана необходимость алгоритмических подходов при построении методов их решения (невозможность чисто аналитических способов решения), произведена оценка сложности решения в зависимости от размерности задач (Л. В. Канторович, 1959 г.; Г. Ш. Рубинштейн, Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн, 1961 г.). Далее теория

линейного программирования развивалась в направлении создания эффективных численных методов для решения задач большой размерности. Это работы по созданию эффективных алгоритмов решения специальных задач линейного программирования (Г. Ш. Рубинштейн, 1960 г.; М. К. Гавурин, 1961 г.; С. С. Сурин, 1963 г.; В. А. Булавский, 1964 г.; В. В. Шкурба, 1965 г.), исследования по итеративным методам решения задач линейного программирования (В. А. Булавский, 1961 г.; Н. З. Шор, 1962 г.; В. А. Волконский, 1966 г.).

Задачи линейного программирования можно рассматривать с

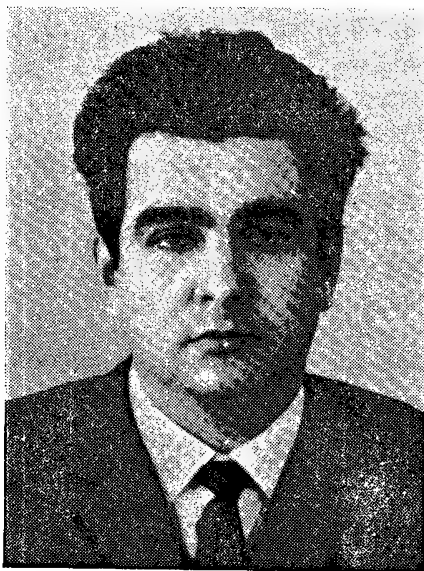
общих позиций теории линейных неравенств, развитой в работах С. Н. Черникова (1968 г.). В математическом плане сходные постановки и методы развивались в теории чебышевских приближений (Е. Я. Ремез и С. И. Зуховицкий). Результаты в этом направлении подытожены в монографии Е. Я. Ремеза «Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Задачи с линейно входящими вещественными параметрами» (1957 г.). Заметим, что исследование принципа двойственности в бесконечномерных пространствах проводилось в рамках теории линейных операторов (М. Г. Крейн, М. А. Рутман, 1948 г.).

Интенсивно разрабатывались численные методы решения задач нелинейного программирования: метод возможных направлений (С. И. Зуховицкий, Р. А. Поляк, М. Е. Прима, 1963 г.), метод обобщенного градиентного спуска для минимизации недифференциальных выпуклых функций (Н. З. Шор, 1964 г.; Б. Т. Поляк, 1967 г.), методы решения систем выпуклых неравенств (И. И. Еремин, 1965 г.), методы градиентного типа с ускоренной сходимостью (Б. Т. Поляк, Б. Н. Пшеничный, М. Д. Маергойз и др., начиная с 1965 г.), методы релаксационного типа (И. М. Глазман, Ю. И. Любич, начиная с 1965 г.), методы решения ряда специальных нелинейных задач на графах (Ю. М. Ермольев, И. М. Мельник, 1968 г.), методы для решения задач минимаксного типа (В. Ф. Демьянов, начиная с 1965 г., и др.). Большой интерес представляет метод поиска минимума функций с «овражными» особенностями, предложенный (1962 г.) И. М. Гельфандом и М. Л. Цетлиным.

Важным этапом в развитии математического аппарата оптимизации явились работы Л. С. Понтрягина и его учеников по теории оптимального управления динамическими системами (1961 г.). Хотя формализация таких задач в основном была связана с исследованием технических объектов, построенная в результате исследований теория имеет существенное значение для анализа макроэкономических процессов (например, перспективное планирование; Л. В. Канторович, В. Л. Макаров, А. М. Рубинов, А. Г. Аганбегян, 1965 г.). Другими методами



С. И. Зуховицкий.



А. Г. Аганбегян.



В. С. Михалевич.



Б. Н. Пшеничный.

асимптотическое поведение динамических моделей рассматривали (1965 г.) И. В. Романовский, Б. Г. Питтель.

В последние годы начаты исследования по определению необходимых условий экстремума для общих классов задач оптимизации (А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин, 1965 г.; Б. Н. Пшеничный, 1965 г.; В. И. Аркин, 1967.; В. Ф. Демьянов, 1965 г.). Эти условия имеют принципиальное значение не только при исследовании экстремальных свойств экономических процессов, но и при построении эффективных численных методов оптимизации.

При анализе экономических процессов и создании автоматизированных систем планирования и управления важен учет случайных факторов. Это обусловило развитие теории стохастического программирования (В. С. Михалевич, Ю. М. Ермольев, 1965 г.; Д. Б. Юдин, 1968 г.), методов случайного поиска экстремумов (Л. А. Расстригин, 1965 г.), общей теории оптимального управления случайными процессами (А. Н. Ширяев, 1965 г.).

Важную область экономической кибернетики составляет построение общих алгоритмических схем оптимизации. Созданы метод последовательного анализа вариантов (В. С. Михалевич, Н. З. Шор, 1961 г.), оказавшийся весьма эффективным при численном решении разнообразных задач оптимального планирования, управления и проектирования, в частности задач оптимального календарного планирования и сетевого планирования и управления (В. В. Шкурба, Т. П. Подчасова, А. Н. Пшичук, Л. П. Тур, 1966 г.), метод вариации в пространстве состояний (Н. Н. Моисеев, И. А. Крылов, Ф. Л. Черноусько, 1966 г.), так называемые эвристические

методы программирования для сложных многоэкстремальных задач (И. Б. Модкус, 1967; В. Н. Бурков и др., 1966 г.).

Значительное развитие получили исследования по дискретному программированию. Последовательный алгоритм оптимизации для важного класса комбинаторных задач предложен (1962 г.) В. П. Черениным. Большое количество работ опубликовано по развитию метода Гомори и метода ветвей и границ (Ю. Ю. Финкельштейн, 1965 г., и др.).

Интересные результаты получены (1968 г.) В. А. Трубиным по алгоритмам решения задачи выбора. Исследованы методы решения задач об оптимальных допустимых путях на графах (Ю. М. Ермольев, 1965 г.), «локальные алгоритмы» дискретной оптимизации (Ю. И. Журавлев, 1962 г.). Общая теория игр развивается (начиная с 1960 г.) в работах Н. Н. Воробьева, Ю. Б. Гермейера и др. Алгоритмы решения игр разрабатывались в общем потоке исследований по линейному и нелинейному программированию.

Развитие математических методов оптимизации применительно к решению задач экономической кибернетики тесно связано с созданием общего аппарата исследования сложных систем (Б. Н. Петров, Г. С. Поспелов, 1966 г.; А. И. Кухтенко, 1966 г.). Исследование сложных экономических процессов и систем, как и исследование сложных физических процессов, возможно на основе создания и анализа математических моделей. Электронные цифровые вычислительные машины позволяют создавать статистические модели, имитирующие функционирование самых различных систем. Общая методика статистического моделирования была разработана (1964 г.) Н. П. Бусленко. Эта методика эффективно используется при исследовании конкретных производственных процессов и экономических систем, например при создании систем сетевого планирования и управления (Д. И. Голенко, 1968 г.). Близким является направление вероятностно-автоматного моделирования (Н. В. Яровицкий, 1966 г.).

При обработке экономической информации, особенно в автоматизированных системах планирования и управления, возникают специфические математические задачи, относящиеся к обработке больших массивов информации и связанные с рациональным кодированием. А. М. Брехов рассмотрел (1967 г.) задачи машинной обработки информации применительно к построению сложных многоцелевых систем сетевого планирования и управления.

Для повышения эффективности процессов алгоритмизации и программирования экономических задач, особенно при создании автоматизированных систем планирования и управления, важное значение имеет разработка и создание алгоритмических языков и соответствующих трансляторов. Разработан алгоритмический язык АЛГЭК для алгоритмизации задач обработки данных экономического характера (М. А. Королев и др., 1966 г.), созданы язык СЛЭНГ и соответствующая транслирующая система для моделирования сложных систем (Л. А. Калинин, Т. П. Марьянович, 1967 г.). Одной из главных задач экономической кибернетики является разработка теории и методов создания Единой государственной сети вычислительных центров для обработки плано-экономической информации (В. М. Глушков, Н. П. Федоренко, 1964 г.).

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Введение

Настоящая глава состоит из трех разделов, отличающихся не только по характеру трактующего в них материала, но и по стилю его изложения. Первый раздел — «Дескриптивная теория множеств», строго говоря, более естественно примыкает по своему содержанию к главе, посвященной теории функций действительного переменного, или к главе о топологии (теоретико-множественной), нежели к собственно основаниям математики. Однако следует иметь в виду, что в 20—30-е годы XX в. — период наиболее интенсивной деятельности московской математической школы Н. Н. Лузина, достижениям которой посвящен в основном этот раздел, — роль оснований математики, во всяком случае в нашей стране, играла в значительной степени именно канторовская теория множеств как таковая (а собственно дескриптивная теория множеств выступала в качестве оснований анализа, теории функций и топологии). Размежевание интересов математиков, занимающихся проблемами обоснования (в том числе и по линиям, противостоящим «классическому» теоретико-множественному направлению, — см. разд. 2 и 3), отчетливо проявилось позднее, особенно в послевоенные годы (хотя, как показано в разд. 3, и собственно логическая проблематика начала разрабатываться в нашей стране значительно раньше). Кроме того, именно принципиальные трудности, возникшие при попытках решения ряда проблем теории борелевских, аналитических и проективных множеств, навели, как известно, Н. Н. Лузина на мысль обратиться к методам математической логики, развитию которых в дальнейшем и были посвящены исследования многих его учеников. Наконец, развитый в работах по дескриптивной теории множеств аппарат и накопленный в ней материал подсказал настолько глубокие и плодотворные параллели между теоретико-множественными, теоретико-алгоритмическими и собственно логическими проблемами, что, несмотря на относительно специальный характер многих рассматриваемых в первом разделе вопросов, определяющую роль исследований по дескриптивной теории множеств для становления отечественной школы математической логики в целом и теории алго-

ритмов и рекурсивных функций в частности трудно переоценить.

Совершенно другой характер носит взаимоотношение материала второго и третьего разделов. С одной стороны, теория алгоритмов и рекурсивных функций начала развиваться в русле идей математической логики и многими поныне воспринимается как ее составная часть. С другой — идеи и методы теории алгоритмов уже давно и далеко переросли свою «служебную» роль орудия исследования проблем оснований математики и логики, так что, хотя эта роль сегодня еще значительнее, чем 30 лет назад, теория алгоритмов, с ее многочисленными выходами в самые различные разделы «теоретической» и «прикладной» математики, теоретическую кибернетику и программирование, по праву может рассматри-



И. И. Жегалкин.

ваться в наши дни как самостоятельная и чрезвычайно важная математическая дисциплина. Так или иначе, но «логический» и «алгоритмический» аспекты проблем, излагающихся во втором и третьем разделах, настолько тесно переплетаются, что единственным правильным, на наш взгляд, решением является сознательный отказ от попыток четкого разграничения проблем оснований математики, математической логики и теории алгоритмов. Поэтому второй и третий разделы весьма значительно пересекаются по своей тематике. Сама же возможность различных аспектов ее рассмотрения (в еще большей мере, чем явственное для читателя различие установок авторов этих разделов) свидетельствует, конечно, не только и не столько о трудности «классификационных» проблем, связанных с отнесением ряда важнейших математических проблем к логике или теории алгоритмов (в конце концов, это не более чем псевдопроблемы), сколько о единстве предмета математики, которое, естественно, особенно отчетливо должно проявиться именно в главе, посвященной общим проблемам оснований математики, рассмотрение которых, в свою очередь, имеет ряд совершенно конкретных выходов, например в алгебру и теорию чисел, и само широко использует алгебраические, топологические и другие «традиционно математические» методы.

Дескриптивная теория множеств

Основное содержание классической дескриптивной теории множеств, развивавшейся в рамках канторовской концепции множества, — изучение связи между способами конструирования множеств (или классов множеств) и внутренними свойствами этих множеств

(классов). Рассматриваются некоторые классы операций над множествами, затем берется некоторый исходный класс множеств и строится минимальный класс, содержащий его и инвариантный относительно выбранных операций. При этом естественно возникает классификация множеств, входящих в расширенный класс. Начальным является исходный класс, а каждый следующий класс получается применением некоторых из изученных операций к множествам из предыдущих классов.

Далее возникают вопросы, касающиеся свойств полученных классов. Прежде всего — вопрос об их непустоте (точнее, об их расширении, т. е. о наличии в каждом классе множеств, не входящих в предыдущие классы), отделимости множеств, принадлежащих к какому-либо классу, множествами более простых классов, об инвариантности классов относительно различных операций, об условиях вырождения результатов операций (т. е. условиях, при которых применение некоторой операции к множествам некоторого класса оказывается множеством более низкого класса, чем это должно было бы следовать из общих соображений) и др.

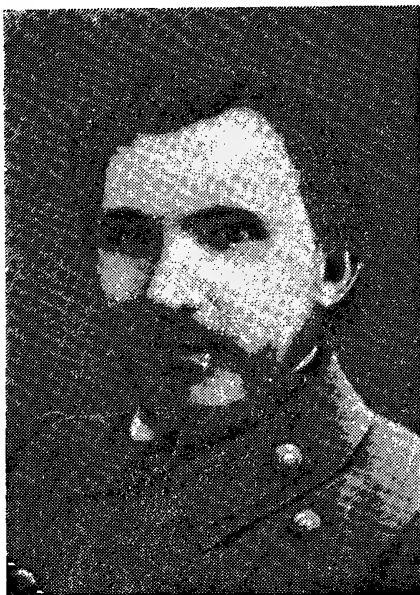
Затем появляются вопросы, касающиеся структурных свойств индивидуальных множеств, принадлежащих к изучаемой классификации. Разумеется, эти свойства зависят от того, что представляет собой начальный класс множеств. Если речь идет о подмножествах некоторого топологического пространства, то в качестве начального класса выбирается класс открытых, замкнутых или открыто-замкнутых множеств этого пространства. Возникают вопросы о мощности множеств, топологической инвариантности соответствующих классов, о наличии канонических топологических типов множеств определенных классов, а также о наличии у этих множеств определенной дескриптивной категории или так называемого свойства Бэра. Наконец, если речь идет о пространствах с мерой и в качестве нулевого класса выбираются некоторые измеримые множества, то возникает вопрос о том, являются ли множества построенной классификации измеримыми.

Первый цикл исследований по дескриптивной теории множеств относится к концу XIX — началу XX в. Он был проведен в связи с проблемой измеримости множеств и функций, решение которой имеет большое значение для различных разделов математики, особенно для математического анализа. Борель определил (1898, 1906 гг.) B -множества, получаемые из открытых или замкнутых множеств топологических пространств с помощью B -операций, т. е. счетно-кратного применения операций объединения и пересечения счетных множеств. Бэр дал (1905 г.) трансфинитную классификацию разрывных функций, которые можно получить, отправляясь от непрерывных функций, счетно-кратным применением операции перехода к пределу. Лебег доказал (1905 г.), что множества $\{x | f(x) \in F\}$ и $\{x | f(x) \in G\}$ (F — класс замкнутых, G — класс открытых множеств), названные впоследствии его именем, для функций $f(x)$ классификации Бэра являются B -множествами, что классы B -множеств совпадают с классами множеств соответствующих функций классификации Бэра, а также что классы B -множеств (B -функций) K_α при $\alpha < \Omega$ существенно расширяются, и построил, не при-

меня аксиому выбора, пример функции, не входящей в классификацию Бэра, а следовательно, и пример множества, не измеримого B .

Значительные исследования по изучению эффективных множеств, т. е. множеств, которые можно построить без применения аксиомы выбора, выполнены московскими математиками под руководством Н. Н. Лузина. П. С. Александровым была введена (1916 г.) так называемая A -операция, дающая возможность построить любое B -множество, отправляясь от интервалов. С помощью этой операции им решен вопрос о мощности B -множеств: всякое несчетное B -множество содержит совершенное подмножество, т. е. имеет мощность континуума. М. Я. Суслин, пользуясь A -операцией, построил (1917 г.) класс A -множеств, более широкий, чем класс B -множеств. Эти множества также играют существенную роль в некоторых вопросах анализа. Особенно важно, что A -множества являются непрерывными образами B -множеств и что они B -аппроксимируемы (Н. Н. Лузин, 1930 г.). Из B -аппроксимируемости следует, что они абсолютно измеримы и обладают свойством Бэра. Обратное же неверно. А. В. Гладкий, опираясь на гипотезу континуума, построил (1957 г.) пример множества, обладающего свойством Бэра, абсолютно измеримого, но не B -аппроксимируемого. Всякое несчетное A -множество содержит совершенное ядро, а значит, имеет мощность континуума (П. С. Александров, 1918 г.). В полном метрическом пространстве со счетной базой два непересекающихся A -множества всегда отделимы B -множествами (первая теорема отделимости, Н. Н. Лузин, 1930 г.). Установлены признаки, при которых A -операция над интервалами приводит к B -множествам: 1) если дополнение к некоторому A -множеству есть A -множество, то оба они суть B -множества (М. Я. Суслин, 1917 г.); 2) если A -множество получено A -операцией над B -множествами с непересекающимися слагаемыми, то оно есть B -множество (Н. Н. Лузин и Серпинский, 1923 г.). Установлено также, что существуют A -множества, дополнения к которым уже не являются A -множествами (М. Я. Суслин, 1917 г.). Дополнения к A -множествам названы CA -множествами. Их можно получить, исходя из интервалов, с помощью операции, дополнительной к A -операции, названной Γ -операцией (П. С. Александров, 1924 г.). Класс CA -множеств также B -аппроксимируем. Вопрос же о мощности CA -множеств в классической дескриптивной теории множеств не решен (и, как мы увидим далее, не может быть решен ее средствами).

Для более детального изучения A -множеств Н. Н. Лузиным была введена (1930 г.) специальная операция решета, определены трансфи-



М. Я. Суслин.

нитные индексы решет, ставшие мощным орудием изучения строения A -множеств и их дополнений. Он доказал (1930 г.) следующее: 1) для того чтобы некоторое A -множество было B -множеством, необходимо и достаточно, чтобы у решета, его определяющего, внешние индексы были ограничены некоторым числом $\alpha < \Omega$, 2) всякое A -множество, а также всякое CA -множество, является объединением семейства мощности $\aleph_1$ попарно не пересекающихся B -множеств (называемых его конституантами).

В ряде случаев объединение счетного семейства конституант CA -множеств является носителем основных свойств этого множества. Так, Н. Н. Лузин доказал (1930 г.), что 1) если A -множество содержится внутри некоторого CA -множества, то оно содержится внутри счетного числа его конституант; 2) если некоторое CA -множество имеет положительную меру, то найдется счетное число его конституант, объединение которых имеет эту же меру; 3) если CA -множество — второй категории, то это обусловлено счетным числом его конституант. Из первого свойства следует, что если CA -множество имеет совершенное ядро, то оно имеет конституанту с совершенным ядром. Свойства A -множеств в значительной степени обусловлены объединением счетного семейства их конституант (Е. А. Селивановский, 1933 г.). С природой конституант CA -множеств связан ряд вопросов, близких к вопросу о мощности CA -множеств. Известны примеры CA -множеств, у которых классы конституант неограниченно растут (Н. Н. Лузин, 1933 г.), но остается открытым вопрос, существуют ли CA -множества, у которых все конституанты имеют ограниченные классы. При исследовании этого вопроса получены редукции проблемы о мощности CA -множеств: из наличия у всякого несчетного CA -множества хоть одной конституанты, содержащей более одной точки, вытекает наличие совершенного ядра у всякого несчетного CA -множества (П. С. Новиков, 1937 г.); из существования CA -множества с несчетным числом замкнутых конституант следует существование CA -множества без совершенного ядра (А. А. Ляпунов, 1939 г.).

П. С. Новиков установил (1931, 1937 гг.) принцип сравнения индексов решета: если $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x)$ — два индекса решета, составленного из B -множеств, то множество всех точек, где $\beta_1(x) \geq \beta_2(x)$, является A -множеством. С помощью этого принципа доказывается, что если у двух A -множеств удалить их общую часть, то оставшиеся части отделимы друг от друга CA -множествами (вторая теорема отделимости; первое доказательство — Н. Н. Лузин, 1930 г.), и что существует два непересекающихся CA -множества, не отделимых B -множествами (П. С. Новиков, 1931 г.). Затем П. С. Новиковым (1934 г.) и его учениками (А. А. Ляпуновым, 1934, 1936, 1939 гг.; З. И. Козловой, 1940 г.; Ружевиным, 1935 г.) были установлены теоремы о так называемой кратной отделимости и неотделимости для A - и CA -множеств.

Теоремы отделимости и неотделимости A - и CA -множеств позволили выяснить взаимоотношения между некоторыми множествами и их непрерывными образами. Из результатов Н. Н. Лузина 1915 г. следовало, что проекция равномерного вдоль оси OY B -множества на ось

OX всегда является B -множеством и что всякое B -множество является проекцией равномерного G_δ . В дальнейшем было установлено, что если на всякой параллели оси OY B -множество имеет не более чем счетное число точек, то его проекция на OX есть B -множество (П. С. Новиков, 1931 г.). Н. Н. Лузин, пользуясь этой теоремой (известной ему до публикации), показал (1930 г.), что такое B -множество можно расщепить на счетное число равномерных B -множеств. Если плоское B -множество пересекается всеми параллелями оси OY по компактным множествам, то его проекция на OX есть B -множество (П. С. Новиков, 1939 г.). Вместо компактных множеств здесь можно рассматривать множества типа F_σ — результат остается в силе (В. Я. Арсенин, 1940 г.). Н. Н. Лузин доказал (1930 г.), что, каково бы ни было B -множество E , лежащее в плоскости OXY , множество всех точек x , через которые проходят параллели оси OY , несущие в точности по одной точке множества E , является CA -множеством. В этой теореме параллели, несущие по одной точке множества E , могут быть заменены параллелями, несущими не более чем счетное число точек (Браун), а также параллелями, несущими компактные множества (П. С. Новиков, 1934 г.), и параллелями, несущими множества типа F_σ (В. Я. Арсенин, 1940 г.). Некоторые из этих задач были решены японским математиком Кунугуи, который также опирался на кратную отделимость. Теорема о расщеплении плоского B -множества на равномерные B -множества была уточнена А. А. Ляпуновым (1934 г.) и З. И. Козловой (1940 г.) для случаев, когда данное плоское множество пересекается всякой параллелью оси ординат по множествам некоторой специальной природы, в частности вполне упорядоченным, приводимым, рассеянным. Плоские B -множества, пересекающиеся параллелями оси ординат по множествам абсолютно первого класса и подкласса не выше $\alpha < \Omega$, можно расщепить в трансфинитную сумму плоских B -множеств, пересекающихся с данными параллелями по компактным множествам (З. И. Козлова, 1951 г.). Е. А. Щегольковым рассмотрен (1959 г.) случай, когда плоское B -множество, пересекаемое прямыми, параллельными данному направлению, по множествам типа F_σ , расщепляется на плоские B -множества, пересекающиеся прямыми этого же направления по замкнутым множествам.

Другой цикл результатов связан с распространением непрерывных отображений. Если дано некоторое непрерывное отображение какого-либо множества, обладающего каким-либо специальным свойством, то в каких случаях его можно распространить до непрерывного отображения другого множества, возможно более простой природы, с сохранением указанных специальных свойств. В случае гомеоморфного отображения исчерпывающий результат получен (1924 г.) М. А. Лаврентьевым: гомеоморфное соответствие между любыми двумя множествами распространяется на содержащее их G_δ . С помощью этой теоремы установлена топологическая инвариантность классов B -множеств (начиная со второго), A -, CA -множеств и других более сложных классов множеств. Оказывается, что, переходя к отображениям более сложной природы, необходимо накладывать ограничения на природу отображаемых множеств. Например, непрерывное и взаимно однозначное

отображение A -множества всегда можно распространить до непрерывного и взаимно однозначного отображения содержащего его B -множества; однако этот результат не верен, если вместо A -множества рассматривается CA -множество (В. И. Гливенко, 1929 г.). Вместо взаимно однозначного отображения можно рассмотреть такое однозначное отображение, при котором прообраз каждой точки не более чем счетен. В этом случае теорема для A -множеств остается в силе (Н. Н. Лузин, 1930 г.). Из этого результата и из теоремы о расщеплении B -множеств следует, что данное A -множество можно представить как объединение счетного числа A -множеств, на каждом из которых отображение взаимно однозначно. Теорема для A -множеств остается в силе и в случае, когда прообраз каждой точки есть множество упорядоченное, приводимое, рассеянное, абсолютно первого класса (ограниченного индекса), компактное (З. И. Козлова, 1940, 1950 гг.). Содержащее его B -множество обладает этими же свойствами.

В связи с этими задачами возникает в некотором смысле противоположный вопрос: дано непрерывное отображение некоторого множества, требуется выделить у данного множества подмножество возможно более простой природы так, чтобы отображение на нем было взаимно однозначным и чтобы образ этого подмножества совпадал с образом всего множества. Такое подмножество называется униформизирующим. В этом направлении получены следующие результаты. 1. Всякое B -множество имеет униформизирующее CA -подмножество, но, вообще говоря, может не иметь никакого униформизирующего A -подмножества (Н. Н. Лузин, 1930 г.). 2. Если при отображении B -множества прообраз всякой точки не более чем счетен, то оно всегда имеет униформизирующее B -подмножество (П. С. Новиков, 1931 г.). Это свойство остается в силе, если прообраз каждой точки есть замкнутое множество (П. С. Новиков, 1939 г.) и множество типа F_σ (Е. А. Щегольков, 1948 г.). 3. Всякое плоское A -множество униформизируется множеством, входящим в B -тело, построенное на A - и CA -множествах (Н. Н. Лузин, 1930 г.; В. Янков, 1941 г.). 4. Всякое плоское CA -множество униформизируется CA -множеством (М. Ковдо, 1937, 1938 гг.). Аппарат для решения этого вопроса подготовлен П. С. Новиковым (Н. Н. Лузин и П. С. Новиков, 1935 г.). Он обратил внимание на процесс эффективного выделения точки в непустом CA -множестве и метод выделения у плоского CA -множества точек минимальной конституанты на всякой прямой, параллельной данному направлению, доказав, что это множество есть CA -множество.

Результаты, полученные в области исследования свойств B -, A - и CA -множеств, позволили решить до конца некоторые вопросы, относящиеся к изучению природы основных объектов математического анализа. П. С. Новиков полностью решил (1931 г.) проблему о взаимоотношении явных и неявных B -функций.

Пусть уравнение $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ — B -функция, определяет y как неявную функцию от x ; пусть E — множество тех значений x , для которых эта неявная функция определена. Лебег полагал, что всегда существует явная B -функция $y = \varphi(x)$, определенная всюду

на E и удовлетворяющая данному уравнению. П. С. Новиков показал, что в общем случае это неверно. Но если для каждого x существует не более чем счетное множество значений y , удовлетворяющих уравнению $F(x, y) = 0$, то действительно существует B -функция $y = \varphi(x)$, всюду определенная на E и удовлетворяющая этому уравнению.

Методы исследования свойств A -множеств в сочетании с топологией позволили более глубоко проникнуть в изучение свойств B -множеств. В каждом классе B -множеств выделены так называемые элементы. Всякое множество класса α является объединением счетного семейства попарно непересекающихся элементов этого же класса. Эти объединения могут быть своеобразным способом вполне упорядочены, так что каждое слагаемое отделимо множеством более низкого класса от всех последующих. Наименьшая возможная длина такой трансфинитной строки называется подклассом данного множества. Разбиение классов на подклассы изучено (1925 г.) М. А. Лаврентьевым. В частности, доказано, что в каждом классе существует несчетное число непустых подклассов. В дальнейшем для подклассов были установлены некоторые теоремы отделимости (А. А. Ляпунов, 1937 г.). Множества, дополнительные к элементам, названы множествами, достижимыми снизу. Н. Н. Лузин показал (1930 г.), что для элементов класса α справедливы теоремы отделимости, аналогичные теоремам отделимости для A -множеств, но в то же время существуют непересекающиеся достижимые снизу множества класса α , не отделимые множествами низших классов. Для элементов класса α и их дополнений справедливы теоремы кратной отделимости и неотделимости (П. С. Новиков, 1934 г.; А. А. Ляпунов, 1935, 1936 гг.; З. И. Козлова, 1940 г.; Ружевич, 1935 г.). В каждом классе B -множеств выделен также в некотором смысле основной топологический тип элементов. Для нулевого класса открыто-замкнутых множеств пространства Бэра таким топологическим типом является порция. Для множеств первого класса топологическими типами являются точка и совершенное множество, нигде не плотное в пространстве Бэра, для второго класса — само пространство Бэра. Точнее, всякое множество G_δ является объединением не более чем счетного семейства множеств не выше первого класса и одного канонического множества G_δ , гомеоморфного пространству Бэра (П. С. Александров и П. С. Урысон, 1927 г.). Л. В. Келдыш показала (1934 г.), что в третьем классе также существует основной топологический тип — так называемый бэровский элемент третьего класса. Позднее (1944 г.) ей удалось доказать существование таких топологических типов во всех классах B -множеств, детально выяснить их строение и построить арифметические примеры этих множеств. Главные результаты Л. В. Келдыш состоят в следующем. Элемент класса α называется универсальным, если из него можно высечь гомеоморф любому другому элементу класса α или B -множеству более низкого класса с помощью совершенного множества; во всяком классе α существуют универсальные элементы. Элемент класса α называется каноническим, если он обладает свойствами: 1) всякая его порция также является элементом класса α ; 2) он первой категории на своем замыкании, 3) он универсален. Оказалось, что

во всяком классе α существует канонический элемент, что всякие два канонических элемента класса α между собой гомеоморфны и что всякий элемент класса α есть объединение одного канонического элемента класса α и счетного числа множеств низших классов. Этими результатами полностью решен вопрос о существовании единственного основного топологического типа элементов во всяком классе α .

Получены и другие интересные результаты, относящиеся к B -множествам и B -функциям. Еще Бэр доказал, что всякая монотонная убывающая последовательность замкнутых множеств непременно стационарна. Н. Н. Лузин показал (1934 г.), что это верно и для последовательности множеств типа F_σ , если только предельным ординальным числам соответствует в точности пересечение множеств, соответствующих всем предыдущим числам. В. И. Гливенко и Е. В. Колесова исследовали (1929 г.) строение неявных функций, определенных с помощью непрерывных функций. А. Л. Брудно изучил (1940 г.) строение функций, получаемых из непрерывных предельным переходом, когда предел в каждой точке достигается. Ю. С. Очан показал (1939 г.), что ни при каком взаимно однозначном преобразовании пространства самого в себя все B -множества строго класса α не могут перейти в множества строго класса β , если $\beta \neq \alpha$.

Следующей задачей дескриптивной теории множеств явилось изучение найденных Н. Н. Лузиным (1925—1927, 1930 гг.) и Серпинским множеств, получаемых повторным применением операций непрерывного отображения (проектирования), дополнения и объединения счетных семейств множеств исходя из B -множеств (они названы проективными множествами), и множеств, получаемых повторным применением A - и Γ -операций исходя из открытых, замкнутых или открыто-замкнутых множеств топологических пространств, найденных А. Н. Колмогоровым (C -множества). Как те, так и другие естественно распадаются на трансфинитные классы. Для C -множеств удалось установить теоремы делимости и неделимости (П. С. Новиков, 1937 г.). Для дополнительных к ним классов первая теорема делимости неверна (П. С. Новиков, 1937 г.). Аналог теоремы Суслина о том, что два взаимно дополнительных C_α -множества суть BC_α -множества, также неверен (П. С. Новиков, Кунугуи). Все C -множества топологически инвариантны, B -аппроксимиремы, каждое из них распадается на $\aleph_1$ B -множеств; в каждом классе C -множеств есть множества, отличные от множеств низших классов (Е. А. Селивановский, 1928 г.).

Совершенно другой оказалась картина для проективных множеств. Несмотря на простоту их определения, свойства их до конца не изучены. Вопросы о B -аппроксимиремости и мощности проективных множеств начиная со второго класса в классической дескриптивной теории множеств остаются открытыми. С другой стороны, доказано, что для каждого класса проективных множеств существует универсальное множество (Н. Н. Лузин, 1930 г.), в каждом классе проективных множеств есть множество, не входящее в низшие классы (А. Н. Колмогоров, Хаусдорф, Н. Н. Лузин, 1930 г.), все классы проективных множеств топологически инвариантны (М. А. Лаврентьев, 1924 г.), для класса

SA_2 -множеств (дополнений к непрерывным образам SA -множеств) справедливы первая и вторая теоремы отделимости, а для класса A_2 -множеств эти теоремы не выполняются (П. С. Новиков, 1935 г.). Для SA_2 - и A_2 -множеств справедливы теоремы кратной отделимости и неотделимости (П. С. Новиков, 1935 г.; А. А. Ляпунов, 1939, 1946 гг.; З. И. Козлова, 1940, 1962 гг.). Законы отделимости для второго класса проективных множеств оказались обращенными по сравнению с законами отделимости для первого класса проективных множеств. Это объясняется тем, что для второго класса проективных множеств также справедлив принцип сравнения индексов, но только роль A -множеств в нем играют SA_2 -множества (П. С. Новиков, 1935 г.). Законы отделимости для высших классов проективных множеств в классической теории множеств не доказаны. Всякое плоское A_2 -множество униформируется A_2 -множеством, B_2 -множество униформируется B_2 -множеством (Кондо, 1937, 1938 гг.). Существует плоское SA_2 -множество, которое не униформируется ни A_2 -, ни SA_2 -множеством (Е. А. Щегольков, 1959 г.). Вопрос об униформизации проективных множеств высших классов в классической дескриптивной теории множеств не решен.

Для более детального изучения проективных множеств был привлечен аппарат общей теории операций над множествами. А. Н. Колмогоров ввел (1928 г.) понятия δs -операции, дополнительной и итерированной операции и показал, что теоремы о существенном расширении классов, которые ранее доказывались независимо друг от друга, для систем множеств разной природы, являются частными случаями некоторой общей теоремы, относящейся к теории операций над множествами. В дальнейшем δs -операции были детально изучены Л. В. Канторовичем и Е. М. Ливенсоном (1932, 1933 гг.; ими введено понятие общей теоретико-множественной операции), а также А. А. Ляпуновым (1946, 1947, 1953, 1957, 1963 гг.) и Ю. С. Очаном (1942, 1955 гг.). Л. В. Канторович и Е. М. Ливенсон построили δs -операции, позволяющие получать любой класс проективных множеств, отправляясь от замкнутых или открытых множеств топологических пространств со счетной базой. Эти операции названы соответственно A^α - и SA^α -операциями. Оказалось, что класс проективных множеств (A_α) (или (SA_α)) инвариантен относительно всех δs -операций, которые не сильнее A^α -операции (соответственно SA^α -операции; Л. В. Канторович и Е. М. Ливенсон, 1937 г.). Класс C -множеств является частью класса (B_2) — второго класса проективных множеств и не совпадает с ним (Л. В. Канторович и Е. М. Ливенсон, 1932 г.). Я. Л. Крейнин нашел (1956 г.) некоторые общие условия, достаточные для того, чтобы в некотором абстрактном пространстве была справедлива теорема Колмогорова о непустоте классов множеств, получаемых δs -операциями.

В связи с трудностями, возникшими при изучении проективных множеств, встал вопрос о построении возможно более широких эффективных классов измеримых множеств. А. Н. Колмогоров рассмотрел (1928 г.) своеобразный процесс усиления δs -операций, определив стабилизирующие итерации δs -операций, названные им R -операциями.

Эти операции замечательны тем, что позволяют, отправляясь от любой $\delta\sigma$ -операции, строить новые $\delta\sigma$ -операции, более сильные, чем трансфинитное повторение исходной $\delta\sigma$ -операции и дополнительной к ней операции.

Система $\delta\sigma$ -операций называется $\mathfrak{N}$ -замкнутой, если вместе с каждой $\delta\sigma$ -операцией Φ_N она содержит дополнительную к ней операцию Φ_{N^C} и если она содержит все R -операции, составляющие которых входят в эту систему. Если исходная $\delta\sigma$ -операция $\Phi_N \equiv \bigcup_n$, то применение

минимальной $\mathfrak{N}$ -замкнутой системы $\delta\sigma$ -операций к классу открыто-замкнутых множеств пространства Бэра приводит к эффективному построению нового класса множеств, более широкого, чем класс C -множеств, названного классом R -множеств. Он естественно разбивается на классы R_α - и CR_α -множеств при $\alpha < \Omega$, каждый из которых может быть построен однократным применением соответствующей R_α -и R_{α^C} -операции. Основные свойства класса R -множеств исследованы Л. В. Канторовичем и Е. М. Ливенсоном (1932, 1933 гг.) и А. А. Ляпуновым (1947, 1953, 1957 гг.). Для R -операций введено понятие трансфинитного индекса и получен принцип сравнения индексов (А. А. Ляпунов, 1953, 1957 гг.), являющийся обобщением принципа сравнения индексов П. С. Новикова. Отправляясь от общего принципа сравнения индексов, А. А. Ляпунов получил (1946 г.) общие теоремы отделимости и неотделимости для теории $\delta\sigma$ -операций, частными случаями которых являются теоремы отделимости и неотделимости для ранее изученных классов множеств. А. А. Ляпунову удалось также усовершенствовать (1953, 1957 гг.) аппарат построения R -множеств. Конъюнктивные и дизъюнктивные расширения семейств $\delta\sigma$ -операций, T - и T^C -операций, являющиеся их аналитическим представлением, позволили по-новому подойти к изучению R -множеств, технически более просто.

Установлены следующие основные свойства класса R -множеств пространства Бэра. 1. В каждом классе R_α - и CR_α -множеств существует универсальное множество (Л. В. Канторович и Е. М. Ливенсон, 1933 г.). 2. В каждом классе R_α -множеств существует множество, не входящее в класс R_β при $\beta < \alpha$ (А. Н. Колмогоров, 1928 г.; Хаусдорф). 3. В каждом классе CR_α -множеств существуют два непересекающихся множества, не отделимых BR_α -множествами (П. С. Новиков, 1931 г.). Для классов R_α -множеств справедливы первая и вторая теоремы отделимости и кратной отделимости (А. А. Ляпунов, 1953 г.). 4. R_α - и CR_α -классы состоят из B -аппроксимируемых множеств (А. А. Ляпунов, 1953, 1957 гг.). 5. R_α - и CR_α -классы топологически инвариантны (М. А. Лаврентьев, 1924 г.). 6. Класс R_α -множеств (CR_α -множеств) инвариантен относительно всех $\delta\sigma$ -операций, которые не сильнее, чем R_α -операция (соответственно R_{α^C} -операция; А. А. Ляпунов, 1953, 1957 гг.). 7. Все R -множества содержатся в классе B_2 -множеств (А. А. Ляпунов, 1953, 1957 гг.). Для R -множеств установлены также критерии вырождения, теоремы о накрытии множеств (А. А. Ляпунов, 1957 г.; З. И. Козлова, 1955 г.; И. Д. Ступина, 1964 г.).

П. С. Новиков (см. Н. Н. Лузин, 1953 г.) описал новые конструктивные средства образования множеств, которые позволяют строить

эффективные множества, лежащие за пределами проективных. Эти множества можно классифицировать по трансфинитам третьего класса, причем неизвестно, простирается ли данная классификация по всем трансфинитам третьего класса. Теория множеств пока еще не располагает эффективными конструкциями, выводящими за пределы этих классов. Развитием таких конструкций явился эффективный процесс усиления теоретико-множественных операций, классифицирующийся по ординальным числам первого — третьего классов (А. А. Ляпунов, 1953 г.). Для эффективно заданных трансфинитов третьего класса этот процесс определяется однозначно; с помощью аксиомы выбора он может быть определен для всех чисел третьего класса, но оказывается ветвящимся. Процесс усиления теоретико-множественных операций сохраняет B -аппроксимируемость множеств и позволяет естественным образом выйти за пределы класса R -множеств, так как первые Ω классов, к которым приводит это построение, при определенных условиях совпадают с классом R -множеств. Взаимоотношение построенных классов множеств с проективными множествами не выяснено. А. В. Кузнецовым эффективно построен (1956 г.) пример непроективного множества.

Далее дескриптивная теория множеств развивалась по пути обобщений результатов теории множеств полных метрических пространств со счетной базой на бикомпактные T_2 -пространства счетного сложения без изменения определений основных объектов исследований (B -множеств, A -множеств) и бикомпактные T_2 -пространства веса $\tau > \aleph_0$, удовлетворяющие τ -аксиоме сложения, с обобщением определений B -, A - и $\delta\alpha$ -операций на несчетные семейства множеств (В. Е. Шнейдер, 1945, 1949 гг.; Ю. С. Очан, 1941 г.). Несколько по-иному обобщены (1940 г.) A -операции в несчетном случае И. М. Максимовым.

А. А. Ляпунов показал (1963 г.), что представление о R -операции может быть обобщено на произвольные теоретико-множественные операции применительно к произвольному пространству индексов со счетной глубиной цепей. Им определены трансфинитные индексы этих операций, установлен принцип сравнения индексов. Эти операции сохраняют B -аппроксимируемость (З. И. Козлова «Теория операций над множествами», 1968 г.). З. И. Козлова ввела понятие T - и R -операции с произвольной глубиной цепей и доказала для этих операций принцип сравнения индексов. С помощью T - и R -операций она построила класс R -множеств обобщенного пространства Бэра с произвольной глубиной цепей. Он обладает всеми свойствами классов R -множеств в случае счетного пространства индексов, но законы отделимости и B -аппроксимируемость для этих классов множеств не установлены.

З. И. Козлова, исходя из определения Н. Н. Лузина классов проективных множеств, обобщила (1968 г.) понятие проективной операции на случай произвольного пространства индексов и произвольной глубины цепей. Оказалось, что структура проективной операции существенным образом зависит от топологии пространств, т. е., для того чтобы строить проективные множества определенного класса в разных топологических пространствах, приходится пользоваться различными

теоретико-множественными операциями. Разумеется, с помощью проективной операции, приводящей (если исходить из замкнутых множеств) к проективным множествам какого-либо пространства, можно, отправляясь от замкнутых множеств, строить классы множеств и в другом пространстве, но построенный таким образом класс множеств не будет совпадать с классом проективных множеств в смысле Н. Н. Лузина. Для построения проективных операций существенным является понятие (Л. В. Канторович и Е. М. Ливенсон, 1932 г.) класса множеств, проективного относительно другого класса. Результат проекций множеств такого класса будет классом проективных множеств в смысле Н. Н. Лузина. Его можно получить из множеств второго класса с помощью специальных $\delta\sigma$ -операций или композиций. Усиление определенных типов композиций приводит к построению проективных операций, с помощью которых можно построить различные классы проективных множеств в различных топологических пространствах веса τ .

Для изучения теоретико-множественных операций постоянно требуется сравнение их силы. Критерии сравнения силы положительных теоретико-множественных операций в абсолютном и относительном смысле найдены Л. В. Канторовичем и Е. М. Ливенсоном (1932 г.) и Ю. С. Очаном (1955 г.), для теоретико-множественных операций общего вида — Н. В. Ивановой (1967 г.).

Аналоги соотношений между некоторым плоским множеством и его проекцией на одну из осей для теории операций изучались А. А. Ляпуновым (1953, 1957 гг.), З. И. Козловой (1955, 1957, 1967 гг.), И. Д. Ступиной (1957, 1964, 1966 гг.), Ю. И. Романовым (1967 г.).

Рассматривается некоторая операция Φ_N , подчиненная определенным условиям. Строится новая операция, база HN которой получается так: выделяется некоторая система подмножеств H_ξ базы N и строится база $HN = \bigcup_{\eta \in H_\xi} \eta$. Затем выясняются условия, при которых Φ_{HN}

не сильнее Φ_N .

Пусть N — жесткая база некоторой $\delta\sigma$ -операции, т. е. никакая цепь этой базы не содержит в себе другой цепи этой же базы; I — пространство индексов мощности $\tau = \aleph_\nu$; H_p — объединение всех подмножеств множества N , каждое из которых содержит не менее $p + 1$ различных цепей базы N ($p < \omega$), $H_{\tau'}$ — объединение всех подмножеств множества N , каждое из которых содержит не менее τ' различных цепей базы N ($\tau' = \aleph_\nu \leq \aleph_\nu = \tau$); H_τ — объединение всех подмножеств множества N , каждое из которых содержит более τ различных цепей базы N . Операция $\Phi_{H_p N}$ отбирает точки основного пространства, входящие не менее чем в $p + 1$ различных ядер, определяемых цепями базы N , $\Phi_{H_{\tau'} N}$ — не менее чем в τ' различных ядер, определяемых цепями базы N , $\Phi_{H_\tau N}$ — более чем в τ различных ядер, определяемых цепями базы N . З. И. Козловой установлены общие условия, при которых операции $\Phi_{H_p N}$ при любом $p < \omega$ и операции $\Phi_{H_{\aleph_0} N}$ не сильнее операции Φ_N . Эти условия выполняются для A -, G -, R -операций, ис-

пользующихся при построении класса R -множеств бэровского пространства с произвольной глубиной цепей. Козлова также нашла условия, при которых $\Phi_{H \hat{\tau} N}$ не сильнее Φ_N , где N — жесткая база R -операции. В частности, это справедливо для указанных выше A -, Γ - и R -операций с глубиной цепей Ω_v . Условия, при которых операция $\Phi_{H \hat{\tau} N}$ не сильнее операции Φ_N , для случая R -операций с произвольной глубиной цепей, исследованы (1966 г.) И. Д. Ступиной. Аналогичное исследование проведено И. Д. Ступиной (1966 г.) для R^C -операций, Gs_N^C -операций с произвольной глубиной цепей, а также проективных операций с произвольной глубиной цепей, Э. А. Преображенской (1968 г.) — для Gs_N -операций с произвольной глубиной цепей. Ими же изучены соответствующие операции $\Phi_{H \hat{\tau} N}$.

Вопрос о распространении непрерывных отображений нашел свою аналогию в общей теории операций (А. А. Ляпунов, 1953, 1957 гг.; З. И. Козлова, 1950, 1957 гг.; И. Д. Ступина, 1957, 1964 гг.). А. А. Ляпуновым в теории операций над множествами получена общая теорема о накрытии множеств, из которой как следствия получаются, в частности, известные теоремы о накрытии плоских A -множеств, а также известные теоремы о проекциях точек плоских A - и B -множеств, прообразы которых обладают определенными структурными свойствами, теоремы о расщеплении плоских множеств.

Многочисленные попытки решить в рамках классической теории множеств вопросы о B -аппроксимируемости, униформизации, мощности множеств, наличии законов отделимости в высших классах проективных множеств долгое время оставались безуспешными. Н. Н. Лузин высказал (1925 г.) подозрение, что основные проблемы классической теории множеств не могут быть решены в рамках самой теории и что здесь не обойтись без использования методов математической логики. В таком же положении находились и некоторые задачи общей теории множеств. Н. Н. Лузин показал (1925 г.), что каждая такая проблема определенным образом связана с вопросом о непустоте некоторого индивидуального проективного множества, называемого резольвентой соответствующей проблемы. Оказалось, что в широком классе случаев, если только дана отчетливая словесная формулировка теоретико-множественной проблемы, то, исходя из этой формулировки, можно описать некоторое индивидуальное проективное множество, пустота (непустота) которого равносильна положительному (соответственно отрицательному) решению поставленной проблемы. Связь этого обстоятельства с понятиями математической логики исследована (1931 г.) польскими учеными Тарским и Куратовским. Ими выяснена связь проективных множеств с общелогическими конструкциями и показано, что явные операции исчисления предикатов не выводят за пределы проективных множеств. Построения классического анализа остаются в рамках проективных множеств. Трансфинитная индукция, примененная к проективным множествам, при довольно широких предположениях также не выводит за пределы проективных множеств.

Однако при некоторых условиях эффективные процессы дескриптивной теории множеств, допускающие трансфинитную индукцию, но свободные от аксиомы выбора, дают возможность строить множества не проективные (Куратовский, 1936, 1937 гг.).

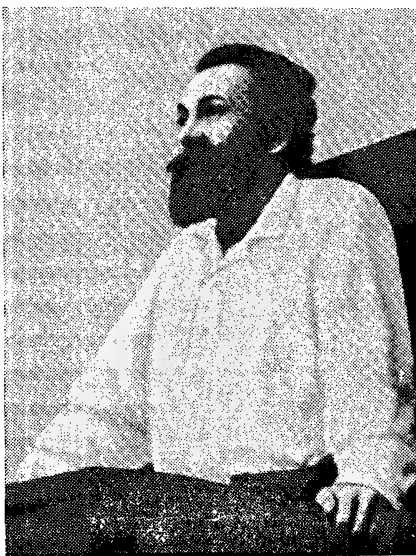
Большой интерес представляют работы П. С. Новикова (1939 г.), Сакса (1940 г.), А. А. Ляпунова (1949 г.), Я. Л. Крейнина (1956, 1958 гг.) об ограниченной постановке фундаментальных проблем теории множеств за счет ограничения лежащих в основе этих проблем понятий несчетности, измеримости, отличия множества от всех множеств данного семейства, названных соответственно эффективной несчетностью, эффективной измеримостью, эффективным отличием. П. С. Новиков доказал, что всякое эффективно несчетное множество, лежащее в бэровском пространстве, содержит совершенное подмножество. Я. Л. Крейнин установил, что всякое CA -множество, эффективно отличное от всех A -множеств, и вообще всякое CA_n -множество, эффективно отличное от всех A_n -множеств, содержит совершенное ядро. А. А. Ляпунов доказал, что всякое множество эффективно не меры нуль, содержащее подмножество положительной меры эффективно не первой категории, содержит G_δ не первой категории.

Первая попытка приложения методов математической логики к теории множеств была сделана Гильбертом в начале 20-х годов. Им доказана непротиворечивость гипотезы континуума. Однако вскоре обнаружилось, что рассуждения Гильберта недостаточны. В 1937 г. Гедель строго доказал (1940 г.) непротиворечивость обобщенной гипотезы континуума, т. е. утверждения, что $2^{\aleph_\nu} = \aleph_{\nu+1}$, и аксиомы выбора, построив мощную систему аксиом теории множеств Σ , позволяющую осуществлять все конструкции классической теории множеств. Он заявил также, что доказал непротиворечивость существования неизмеримых проективных множеств и непротиворечивость существования CA -множеств без совершенного ядра. Однако доказательства этих утверждений не опубликованы. П. С. Новиков, исходя из этой же системы аксиом теории множеств, исчерпывающе доказал (1951 г.) непротиворечивость существования неизмеримых проективных множеств и несчетных CA -множеств без совершенного ядра. Точнее, им доказана непротиворечивость существования неизмеримого B_2 -множества. Отсюда следует непротиворечивость предложения о том, что класс (B_2) содержит множество, не входящее в класс R -множеств. Сами множества построены Новиковым с помощью средств классической теории множеств и только для изучения их свойств привлечена аксиоматическая система Геделя. В этой же работе Новиков установил непротиворечивость того, что для достаточно высоких классов проективных множеств справедливы законы отделимости, обращенные по отношению к законам отделимости для первого класса. Впоследствии Адисон усилил (1958, 1959 гг.) последний результат П. С. Новикова, показав, что он справедлив начиная с $n=3$. Е. А. Щегольков доказал (1959 г.), что в системе аксиом теории множеств Геделя Σ непротиворечиво также утверждение, что для $n > 2$ существует плоское CA_n -множество, не униформизирующееся ни A_n -, ни CA_n -множеством. Им рассмотрены с точки зрения

непротиворечивости частные случаи униформизации A_n -множеств. П. Дж. Коэн доказана (1963, 1964 гг.) независимость гипотезы континуума и аксиомы выбора от других аксиом теории множеств. Этим положено начало новому этапу в развитии аксиоматической теории множеств, позволяющей выяснить природу трудных проблем классической теории множеств.

К настоящему времени в дескриптивной теории множеств накоплено много результатов, разработаны системы специальных конструкций, различные методы исследований. Все эти исследования систематизировались неоднократно. В 1914 и 1927 гг. Хаусдорф подвел итог начального периода развития дескриптивной теории множеств, изложил ее результаты в применении к топологическим (1914 г.) и метрическим (1927 г.) пространствам, наметил пути дальнейших исследований. Его монографии способствовали развитию как самой дескриптивной теории множеств, так и теории топологических пространств. Н. Н. Лузин подытожил (1930 г.) интенсивные исследования по дескриптивной теории множеств с 1915 по 1929 г., главным образом московской математической школы. Он выдвинул ряд актуальных проблем в области дескриптивной теории множеств, суть которых состояла в изучении арифметического континуума, в частности вопросов о мощности, измеримости и отделимости проективных множеств. Им была высказана гипотеза, что эти вопросы, как и близкая к ним континуум-гипотеза, требуют выработки принципиально новых точек зрения. Его монография в значительной мере определила дальнейшее развитие не только дескриптивной теории множеств, но и той области математической логики, которая связана с изучением трудностей основных проблем теории множеств.

Результаты по дескриптивной теории множеств были систематизированы также Куратовским в его монографии по топологии (1948 г.), где он, в частности, показал, что обычные конструктивные средства математической логики и отдельные процессы трансфинитной индукции не выводят за пределы проективных предикатов. В журнале «Успехи математических наук» опубликован (1950, 1955 гг.) цикл статей по дескриптивной теории множеств, в которых изложены теория B -множеств (Е. А. Щегольков), A -множеств (В. Я. Арсенин и А. А. Ляпунов), B -функций (А. А. Ляпунов) и теория операций над множествами (Ю. С. Очан). Изложение теории в статьях значительно упрощено, кроме того, получены новые результаты, например результат Е. А. Щеголькова об униформизации плоских B -множеств, пересекаемых прямыми, параллельными данному направлению по множествам типа F_σ , результат Ю. С. Очана об относительной силе δ -операций. К этому времени



А. А. Ляпунов.

(50-е годы) обнаружилось глубокое внутреннее родство проблематики дескриптивной теории множеств с проблематикой математической логики, близость идей теории рекурсивных функций и идей дескриптивной теории множеств (Мостовский, 1946, 1955 гг.; В. А. Успенский, 1950 г.; Б. А. Трахтенброт, 1953 г.). З. И. Козловой написан ряд статей (1968, 1969 гг.) по теории операций над множествами. В них изучаются общие свойства операций над множествами, не связанные ни с какой топологией пространств, свойства, требующие для построения с помощью соответствующих операций монотонно расширяющихся классов множеств достаточного богатства начального класса множеств, а также существенно используются топологические свойства пространства. Изложение ведется в терминах общей теории операций над семействами множеств при произвольной мощности семейства. Соответственно все результаты дескриптивной теории множеств обобщаются применительно к этим новым условиям при наложении определенных ограничений. Рассматривается достаточно широкий класс теоретико-множественных операций — $\Delta\Sigma$ -операций, использующихся как в самой теории множеств, так и в ее приложениях, применительно к произвольному пространству индексов. В соответствии с общим методом классификации множеств в пространстве D_t и бэровском пространстве $J^{\Omega\nu}$ строятся различные классы множеств и изучаются их общие свойства: существование универсальных множеств, существенное расширение классов, B -аппроксимируемость, топологическая инвариантность классов. Топологическая инвариантность классов множеств в пространстве $J^{\Omega\nu}$ доказана В. П. Филипповым. Им показано, что в этом пространстве сохраняет силу теорема Лаврентьева о распространении гомеоморфного соответствия между любыми двумя множествами на содержащие их G_δ .

Результаты, полученные в дескриптивной теории множеств, находят широкое приложение в различных областях математики и смежных с нею дисциплин. Методами дескриптивной теории множеств пользуются в метрической теории функций при установлении измеримости тех или иных множеств. Ответ может быть получен с помощью оценки дескриптивной природы множества. Если множество оказывается A - или R -множеством, то измеримость этим установлена. Если конструкция ведет к проективным множествам второго или более высокого класса, то вопрос об измеримости остается открытым. Идеи дескриптивной теории множеств сыграли важную роль в теории открытых и замкнутых отображений (Л. В. Келдыш, 1945 г.; И. А. Вайнштейн, 1946, 1947 гг.; А. Д. Тайманов, 1955, 1960 гг.). Еще Хаусдорф показал, что свойство множества быть G_δ инвариантно при открытых отображениях. Он же высказал предположение, что это верно и для дальнейших классов B -множеств. Однако Л. В. Келдыш показала, что всякое A -множество есть открытый образ множества, являющегося пересечением G_δ и F_σ . И. А. Вайнштейн установил и широко использовал для замкнутых отображений теорему о распространении таких отображений на G_δ . А. Д. Тайманов рассмотрел этот вопрос применительно к различным

классам B -множеств и проективных множеств: замкнутый образ B -множества есть B -множество, замкнутый образ A_n -(CA_n)-множества есть A_n -(CA_n)-множество.

А. М. Роднянский доказал (1946 г.), что мощность множества связанных компонент F_σ либо не более чем счетна, либо — континуум. Однако для случая G_δ вопрос оставался открытым. П. С. Новиков показал (1947 г.), что результат справедлив и для A -множеств. А. Д. Тайманов решил (1949, 1952 г.) проблему мощности для множества всех квази-компонент любого A -множества. Он дал (1950 г.) аналитическое представление жестких баз $\delta\sigma$ -операций и выяснил дескриптивную природу жесткой базы A -операции, которая оказалась множеством типа G_δ , и Γ -операции (CA -множество). Р. Ю. Мацкина изучила (1949—1956 гг.) строение непрерывных, а также непрерывных и взаимно однозначных образов замкнутых множеств гильбертова пространства, которые оказались соответственно произвольными A - и B -множествами.

Теория алгоритмов

1

Теория алгоритмов до 1945 г.

Прежде чем перейти к изложению результатов исследований советских математиков, рассмотрим вкратце общее состояние теории алгоритмов в период 1935—1945 гг., предшествовавший началу исследований в нашей стране.

Допуская некоторую вольность, часто говорят, что в 30-е годы было дано точное определение понятия «алгоритм». На самом же деле единого и общего понятия «алгоритм» тогда не было, да и теперь еще в окончательном виде оно не сформулировано. В 1936—1939 гг. были определены лишь различные типы алгоритмов или вычислений: рекурсивное вычисление, тьюрингово (машинное) вычисление, комбинаторное исчисление Поста, λ -конверсия Черча и др. Они равносильны только в следующем смысле: класс арифметических функций (т.е. функций, значения и аргументы которых — натуральные числа), вычисляемых посредством алгоритмов одного из этих типов (например, вычисляемых в соответствии с рекурсивными схемами), в точности совпадает с классом функций, вычисляемых посредством алгоритмов любого другого из этих типов (например, вычисляемых на машинах Тьюринга).

К этому времени уже сложилось убеждение и был провозглашен тезис (тезис Черча), что этот класс в точности охватывает все те арифметические функции, которые в интуитивном смысле эффективно вычислимы. Так возникло центральное понятие теории алгоритмов — понятие вычислимой функции, посредством которого определяются и другие важные понятия: разрешимое множество (множество, характеристическая функция которого вычислима), перечислимое множество (множество значений некоторой вычислимой функции). В соответствии

с тезисом Черча они рассматриваются как уточнения интуитивных понятий: множество, элементы которого эффективно распознаваемы, и множество, элементы которого эффективно порождаемы. Применявшийся Геделем метод арифметизации (т. е. присвоение натуральных номеров конструктивным объектам) позволяет обобщить эти понятия на случай, когда элементами множества или же значениями и аргументами функции являются произвольные конструктивные объекты, что особенно важно для приложений. Однако внутри теории алгоритмов классы арифметических вычислимых функций (разрешимых или перечислимых множеств) всегда рассматривались как подходящие модели для постановки задач и для исследований явлений, связанных с общей идеей конструктивности и эффективности.

Следующие два фундаментальных результата 30-х годов — образцы внутреннего факта теории и ее приложения. 1. Существует универсальный алгоритм, который может имитировать работу любого другого (специального!) алгоритма при наличии описания подражаемого алгоритма (Тьюринг, Пост). Эта теорема и способ ее доказательства превосходят идею создания современных универсальных вычислительных машин. Из нее вытекает существование универсальной вычислимой функции и универсального перечислимого множества. 2. Перечислимое множество всех тавтологий логики предикатов неразрешимо (Черч). Это означает, что хотя и существует эффективная процедура, порождающая все тавтологии, тем не менее невозможен алгоритм, устанавливающий для любой предъявляемой формулы логики предикатов, тавтологична ли она. Это был первый результат об алгоритмической неразрешимости проблемы. Правда, проблема возникла в самой математической логике, но появилась надежда, что подобные результаты удастся установить и применительно к некоторым проблемам из традиционных разделов математики, например алгебры. Ради таких приложений, собственно, и создавалась теория; однако в первом десятилетии ее развития результатов еще не было.

В начальный период развития теории алгоритмов ее приложениями занимались мало, главное внимание уделялось внутренним вопросам теории. В этом направлении были достигнуты значительные успехи. Определение понятия «вычислимая функция» создало предпосылки для четкой дифференциации эффективного и неэффективного в математике. Но ведь естественно предположить, что возможны различные степени эффективности и различные степени неэффективности. Поэтому значительные усилия были приложены для выработки такой системы понятий, которая позволяла бы разумно сравнивать между собой функции и множества по степени их эффективности или неэффективности. При осуществлении этой программы наметилось три направления, которые были развиты далеко не в одинаковой мере.

Во-первых, в классе всех вычислимых функций были выделены и изучены более простые подклассы примитивно рекурсивных функций, функций элементарных по Кальмару (Венгрия) и т. п. В этом можно усматривать зачатки некоторой классификации эффективного.

Во-вторых, Клини (США, 1943 г.), а независимо от него и Мос-

товский (Польша) построили иерархию множеств и предикатов, в которой к низшему классу относятся все разрешимые множества и предикаты, а высшие классы классифицируются по кванторным приставкам, т. е. по логической сложности их описаний. Таким образом, эта иерархия охватывает и некоторые (но далеко не все) неэффективные множества. Ее внешняя аналогия с проективной иерархией из дескриптивной теории множеств уже тогда была замечена Клини и Мостовским.

В-третьих, Постом была указана (США, 1943 г.) более тонкая классификация, основанная на понятии сводимости предикатов. Возможны различные определения сводимости, т. е. определения того, что значит «существует условный алгоритм, вычисляющий предикат A при условии, что доступна необходимая информация о предикате B ». Отношение сводимости « A сводится к B » задает частичное упорядочение в классе всех предикатов и разбивает его на соответствующие классы сводимости (в терминологии Поста — предикаты, попадающие в один и тот же класс сводимости, имеют равные степени неразрешимости). Пост рассмотрел несколько концепций сводимости: простую, табличную, тьюрингову, среди которых последняя самая общая. Ему удалось показать, что перечислимые множества попадают, вообще говоря, в различные классы табличной сводимости, хотя в иерархии Клини — Мостовского все они относятся к одному классу. Оставался открытым вопрос (проблема сводимости), попадают ли все перечислимые множества в один и тот же класс тьюринговой сводимости. Это была одна из самых интересных и интригующих проблем. Она привлекла внимание и многих советских математиков.

Таким образом, мы видим, что в теории алгоритмов начала складываться своеобразная внутренняя проблематика, напоминающая классификационную проблематику дескриптивной теории множеств. Так же как и в дескриптивной теории множеств, большой интерес представляло в ней конструирование конкретных множеств или функций с гарантированной нижней оценкой сложности (например, перечислимых, но не разрешимых множеств, перечислимых множеств, не сводящихся к заданному перечислимому множеству, предикатов из заранее указанного класса Клини и т. п.). Правда, в теории множеств рассматриваются главным образом подмножества числового континуума (а не натурального ряда, как в теории алгоритмов!), что придает специфичность представлению об эффективности. Однако с некоторой общей точки зрения интересы «дескриптивистов» и «алгоритмистов» были устремлены в одном направлении. Вспомним, например, попытку классификации эффективного, предпринятую П. С. Новиковым (см. работу Н. Н. Лузина «О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций», 1935 г.), или же разработанные Л. В. Келдыш методы для построения арифметических примеров B -множеств с гарантированной нижней оценкой борелевского класса. Поэтому можно без преувеличения сказать, что после исследований московской школы теории функций в СССР создалась весьма благоприятная почва для восприятия и творческого развития идей зарождающейся новой теории.

Общие исторические сведения

В СССР исследования в области теории алгоритмов начались в 1945 г., почти одновременно в Москве, под руководством П. С. Новикова и А. Н. Колмогорова, и в Ленинграде, под руководством А. А. Маркова. Здесь и образовались коллективы математиков, которые можно называть московской и ленинградской школами теории алгоритмов. Позднее (1959 г.) сложилась новосибирская школа математической логики с большой проблематикой по теории алгоритмов и ее приложениям, которой руководил А. И. Мальцев. Со временем география теории алгоритмов расширилась (Рига, Пенза, Горький, Свердловск, Иваново, Киев, Ереван, Баку, Алма-Ата, Кипшинев), главным образом за счет учеников и сотрудников П. С. Новикова, А. А. Маркова, А. Н. Колмогорова, А. И. Мальцева. Однако Москва, Ленинград и Новосибирск остаются основными центрами, к которым тяготеют другие коллективы, работающие в области теории алгоритмов. Сферы влияния этих центров определяются преимущественно идейными интересами, а не географической близостью. Например, Иваново и Свердловск тяготеют к Новосибирску, Вильнюс и Ереван — к Ленинграду и т. д. В пропагандировании идей теории алгоритмов и в привлечении интереса к ним свою роль сыграли и книги монографического, учебного и популярного характера, написанные советскими математиками. Хронологически первая из них — «Теория алгоритмов» (1954 г.) А. А. Маркова. Затем вышли книги Б. А. Трахтенброта (1957 г.), В. А. Успенского (1960 г.), В. М. Глушкова (1961 г.) и А. И. Мальцева (1965 г.). Наряду с этим переводились книги зарубежных авторов (Петер, Клини и др.). В последние годы теория алгоритмов как учебный предмет введена во многих университетах и педагогических институтах.

С самого начала работы московской и ленинградской школ стало вырисовываться определенное расхождение в точке зрения на вопрос о значении конструктивных объектов и методов в математике. В Москве, где очень сильны были традиции лужинской школы теории множеств, П. С. Новиков, А. Н. Колмогоров и их ученики при изучении конструктивных объектов допускали любые (так называемые классические) средства, употребляемые в математике, и в частности любые теоретико-множественные конструкции. В Ленинграде же А. А. Марков отстаивал и проводил в жизнь ту точку зрения, что при изучении конструктивных объектов допустимы лишь специфические конструктивные методы, основанные на так называемой конструктивной логике. Это различие во взглядах между «классиками» и «конструктивистами» проявляется главным образом в оценках, которые они дают тем или иным постановкам задач и результатам. В настоящее время большинство математиков, работающих в области теории алгоритмов, — «классики»; точку зрения «классиков» разделяет и новосибирская школа А. И. Мальцева. Вместе с тем «конструктивисты» во главе с А. А. Марковым и Н. А. Шаниным

образуют весьма динамичное и активное меньшинство, которое последовательно реализует намеченную программу конструктивизации математики. После переезда А. А. Маркова в Москву (1957 г.) исследованиями в Ленинграде руководит Н. А. Шанин, ревностно оберегающий марковские традиции конструктивизма. (Разделение на «классиков» и «конструктивистов» нашло своеобразное отражение и в терминологии: первые применяют термин «алгоритм», вторые охотнее говорят и пишут «алгорифм».)

П. С. Новиков и А. Н. Колмогоров, которым очень близки были идеи дескриптивной теории множеств, особое внимание уделяют вопросам о правомерности (и в каком смысле!) аналогий между явлениями из сферы теории алгоритмов и явлениями, изучавшимися в дескриптивной теории множеств. Такая направленность присуща и обзорному докладу А. Н. Колмогорова, прочитанному им в 1945 г. на заседании Московского математического общества. Это было, по-видимому, первое публичное выступление в СССР по тематике теории алгоритмов. Систематические исследования проводились (1946, 1947 гг.) участниками семинара П. С. Новикова. Уже в это время ими были получены интересные теоремы дескриптивного характера, обнаруживающие как аналогии, так и любопытные расхождения с известными фактами и гипотезами теории множеств. Как правило, доказательство подобных теорем для специалистов, имеющих большой опыт в дескриптивной теории множеств, не представляло особого труда. Может быть, именно поэтому участники семинара не торопились с публикацией результатов. Впоследствии некоторые из этих результатов были вновь доказаны и опубликованы за рубежом. Так, например, обстоит дело с теоремой о рекурсивной неотделимости перечислимых множеств, опубликованной Клини в 1951 г. До Клини она была установлена П. С. Новиковым (1946 г.), а также независимо от него Б. А. Трахтенбротом (1949 г.).

Первые советские публикации по теории алгоритмов (1947 г.) принадлежат А. А. Маркову. Ими было положено начало большому циклу работ, в которых А. А. Марков и его ученики на базе (разработанной А. А. Марковым) теории нормальных алгорифмов установили алгоритмическую неразрешимость ряда проблем алгебры. Таким образом, А. А. Маркову (и американскому математику Посту, получившему независимо от Маркова некоторые аналогичные результаты) принадлежит приоритет в применении теории алгоритмов к решению проблем, возникших в традиционных разделах математики. Напомним, что все полученные ранее результаты об алгоритмической неразрешимости относились к проблемам, возникшим в самой математической логике и теории алгоритмов.

За десятилетний период — до Третьего всесоюзного съезда математиков (Москва, 1956 г.) — сформировалось первое поколение исследователей и учеников П. С. Новикова (А. В. Кузнецов, Б. А. Трахтенброт, А. А. Мучник, С. И. Адян), А. Н. Колмогорова (В. А. Успенский, Ю. Т. Медведев), А. А. Маркова (Н. А. Шанин, Г. С. Цейтин, И. Д. Заславский, Н. М. Нагорный и др.), для которых главным



С. И. Адян.

объектом исследований стали теория алгоритмов и ее приложения. К этому времени советские исследователи получили много важных результатов. Некоторые из этих результатов явились решением трудных проблем, давно привлекавших внимание многих ученых. К ним относятся в первую очередь установленная П. С. Новиковым алгоритмическая неразрешимость проблемы тождества слов для групп (Ленинская премия, 1957 г.) и отрицательное решение А. А. Мучником (1956 г.) проблемы Поста о сводимости, которая долгое время оставалась открытой. А. А. Марков (1947, 1951, 1958 гг.), С. И. Адян (1955—1957 гг.) и Г. С. Цейтин (1956, 1958 гг.) установили алгоритмическую неразрешимость многих проблем алгебры. Значительные результаты получены по программе построения конструк-

тивного анализа (Н. А. Шанин, И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин, начиная с середины 50-х годов). Deskриптивная теория алгоритмов обогатилась рядом новых полезных понятий, которые были введены и исследованы А. А. Мучником, А. В. Кузнецовым, Б. А. Трахтенбротом, Ю. Т. Медведевым, В. А. Успенским. Следуя идеям А. Н. Колмогорова, Ю. Т. Медведев разработал (1955 г.) исчисления степеней трудности массовых проблем, а В. А. Успенский приступил (1955 г.) к абстрактному изучению нумераций.

Таким образом, первый период развития теории алгоритмов был весьма плодотворным и результативным. Вместе с тем к концу этого периода начали сказываться некоторые перемены в интересах многих математиков, активно работавших в области теории алгоритмов. Выяснилось, что методы, разработанные для применения теории алгоритмов к массовым проблемам алгебры, пригодны и для решения чисто алгебраических задач. Постепенно П. С. Новиков и С. И. Адян переключились именно на эту проблематику, и им удалось получить очень сильные результаты. Но это уже был отход от теории алгоритмов в прямом смысле. В то же время формировалась математико-кибернетическая проблематика, в которой идеи математической логики и теории алгоритмов (правда, в несколько трансформированном виде) находили естественное применение. Эта проблематика отвлекла в той или иной мере некоторую часть математиков, занимавшихся теорией алгоритмов, а также многих потенциальных исследователей в этой области. Г. С. Цейтин и В. А. Успенский заинтересовались математической лингвистикой, Б. А. Трахтенброт — теорией автоматов; частично кибернетическими вопросами увлекались А. А. Марков, А. В. Кузнецов, А. А. Мучник и др. По-видимому, это и явилось одной из причин выпадения из поля зрения отдельных важных проблем теории алгорит-

мов, выдвижение которых в значительной мере было связано с работами советских математиков (например, теория степеней неразрешимости, теория иерархий).

В конце 50-х годов снова усилился приток молодых математиков в области теории алгоритмов. Сложилось второе поколение ленинградской школы (С. Ю. Маслов, В. П. Оревков, Г. Е. Минц и др.), работающее под руководством Н. А. Шанина. Ко второму поколению учеников П. С. Новикова относятся А. А. Фридман, К. А. Михайлова и др.

Значительно оживились исследования в области теории алгоритмов и ее приложений в связи с образованием новосибирской школы математической логики и теории моделей. Проблематика теории моделей, в том числе многие алгоритмические проблемы теории моделей, была сформулирована А. И. Мальцевым и Тарским (Польша, США). Им принадлежат фундаментальные результаты в этой области. Много важных результатов о разрешимости элементарных теорий получили А. И. Мальцев (Ленинская премия, 1964 г.), его ученики и последователи Ю. Л. Ершов (1963—1966 гг.), М. А. Тайцлин (1962 г.), И. А. Лавров (1962, 1963 гг.), Ю. Ш. Гуревич (1964, 1968 гг.) и др. Эта программа выполнялась в условиях своеобразного соревнования с коллективом, возглавляемым в США Тарским. Часто одни и те же результаты получались одновременно и независимо в СССР и США. Результаты этих исследований систематизированы в обзорной статье Ю. Л. Ершова, И. А. Лаврова, А. Д. Тайманова и М. А. Тайцлина «Элементарные теории» (1965 г.). Из других приложений упомянем результаты (1964, 1965 гг.) А. В. Гладкого об алгоритмических проблемах математической лингвистики.

Наряду с приложениями в Новосибирске изучаются и внутренние вопросы теории алгоритмов: теория нумераций (А. И. Мальцев, 1963, 1965 гг.), теория машин Тьюринга и других, так называемых растущих автоматов с оценкой сложности соответствующих алгоритмов (Б. А. Трахтенброт, 1961 г.; Н. В. Белякин, 1961, 1966, 1967 гг.; Я. М. Барздинь, с 1962 г.; М. И. Кратко, 1964 г., и др.). Работы, обсуждающиеся на семинаре А. И. Мальцева, публикуются в сборниках трудов «Алгебра и логика», которые начиная с 1963 г. издаются регулярно.

Переходя к более детальному рассмотрению вклада советских математиков в теорию алгоритмов, мы классифицируем их работы по следующему принципу: исследования внутренних проблем теории (§ 3—5) и работы, посвященные ее приложениям (§ 6, 7). Интерес к приложениям всегда был очень высок в нашей стране. Во многих прикладных работах содержатся и важные «внутренние» результаты; главная же их отличительная черта — своеобразное взаимодействие понятий и методов теории алгоритмов, с одной стороны, и той области математики (например, алгебры), которая является объектом приложений, — с другой.

Исследования внутренних проблем теории алгоритмов, выполненные советскими математиками, можно сгруппировать следующим образом:

1) работы, связанные с описанием новых типов алгоритмов (безусловных и условных) или с более детальным анализом таких концепций, которые были ранее известны (§ 3);

2) работы, в которых классифицируются (исходя из различных критериев сложности) функции и множества и изучается структура этих классификаций (§ 4);

3) работы, в которых описываются и изучаются различные способы нумераций (§ 5). Выше отмечалось (см. § 1), что именно посредством нумераций понятия и факты, рассмотренные первоначально для натуральных чисел, переносятся на объекты более общей природы.

Содержание выделяемых нами направлений по прикладной теории алгоритмов достаточно характеризуется названиями параграфов: «Алгоритмические проблемы» (§ 6), «Алгоритмическое истолкование математических понятий» (§ 7). При этом мы ограничиваемся лишь разъяснением постановок и результатов под углом зрения теории алгоритмов. Более глубокое их обсуждение, связанное со спецификой других математических теорий, естественно проводить при обзоре этих теорий. По этой же причине мы не рассматриваем приложения теории алгоритмов к таким традиционным проблемам математической логики, как полнота, непротиворечивость и т. п.

3

Варианты алгоритмов

На этапе формирования основных понятий теории алгоритмов были выработаны многие варианты понятий «алгоритм» и установлена их эквивалентность (см. § 1). Основополагающее значение этих фактов заключается в том, что они подтверждают правильность тезиса Черча, а тем самым и содержательность создаваемой на их основе теории. В то время, когда в нашей стране начались исследования в области теории алгоритмов, уже не оставалось сомнений в правильности тезиса Черча. Тем не менее по разным причинам формулировка различных вариантов понятия «алгоритм» и их исследование не утратили значения.

Прежде всего заметим, что в зависимости от рассматриваемого типа задач бывает удобнее пользоваться тем или иным типом алгоритма. А. А. Марков сформулировал (1951 г.) понятие нормального алгоритма и разработал теорию алгоритмов на базе этого понятия. Нормальные алгоритмы (так же, как и исчисления Поста) особенно удобны при изучении массовых проблем, связанных с алгебраическими тождественными преобразованиями. Ими широко пользовались не только в Ленинграде, но и в других научных центрах страны, а также за рубежом. Различного рода обобщения или специализации нормальных алгоритмов содержатся в работах Н. М. Нагорного (1956, 1958 гг.), В. С. Чернявского (1956, 1959 гг., так называемые челночные алгоритмы) и зарубежных ученых. Советскими математиками рассматривались и другие варианты вычислений эффективных функций. Например, моде-

лирование функций посредством формул логики предикатов (Б. А. Трахтенброт, 1949 г.) оказалось удобным для исследования некоторых алгоритмических проблем логики, а специфические идеи программирования алгоритмов для реальных вычислительных машин отражены в понятиях граф-схемы (Л. А. Калужнин, 1956 г.) и операторного алгоритма (А. П. Ершов, 1960 г.).

При выяснении вопроса о вычислимости конкретных функций выбор той или иной концепции алгоритма диктуется лишь техникой доказательства и не связан с какими-либо другими принципиальными соображениями. Иначе говоря, пока обсуждается вопрос «что можно вычислять», все известные концепции алгоритма равноценны и обладают одной и той же степенью общности (тезис Черча). Положение коренным образом изменяется, когда внимание сосредоточивается на вопросе «как можно эффективно вычислять», т. е. когда объектом исследования является не только результат вычислений, но и сами процессы вычисления. С этой точки зрения (характерной для теории автоматов) классификация известных типов алгоритмов и формулировка по возможности более общих концепций алгоритмов представляют принципиальный интерес (хотя заранее ясно, что класс вычислимых функций остается неизменным). Впервые такой подход был высказан А. Н. Колмогоровым (доклады на заседаниях Московского математического общества, 1951 г.). Его идеи положены в основу работы «К понятию алгоритма» (А. Н. Колмогоров, В. А. Успенский, 1958 г.), в которой проанализированы известные типы алгоритмов и описан весьма общий класс алгоритмов последовательного действия (на каждом шаге перерабатывается информация только в ограниченной зоне информационного комплекса).

А. Н. Колмогоров наметил также подход, который привел к еще более общему понятию, охватывающему и тот случай, когда на каждом шаге алгоритма информация перерабатывается повсеместно. Точное окончательное определение алгоритма такого типа под названием растущих автоматов дал (1963 г.) Я. М. Барздинь. Оно содержит как частные случаи понятия потенциально бесконечного автомата, предложенные Черчем и Нейманом (США). Барздинь установил теорему универсальности для растущих автоматов, являющуюся далеко идущей аналогией теоремы об универсальной машине Тьюринга (предположение, что такая теорема справедлива, было высказано А. Н. Колмогоровым). Впоследствии Барздинь описал еще более широкий класс алгоритмов, самый широкий из известных в настоящее время.

Алгоритмы часто носят условный характер: они эффективно сводят каждую из рассматриваемых единичных задач к другой или к нескольким другим задачам, которые принимаются за решенные. Например, можно рассматривать сводимость множества A к множеству B (или, что то же самое, сводимость соответствующих им характеристических функций, т. е. предикатов) в следующем смысле: имеется вычислимая функция φ такая, что для каждого индивидуального n ответ на вопрос « $n \in A$?» такой же, как и ответ на вопрос « $\varphi(n) \in B$?». Такого рода сводимости (условные алгоритмы) и некоторые более общие типы



Б. А. Трахтенброт.

условных алгоритмов были введены и изучены Постом, сформулировавшим известную проблему сводимости (см. § 1). Уточнением понятия условного алгоритма и классификацией условных алгоритмов занимались советские математики (главным образом, в связи с проблемой Поста). Б. А. Трахтенброт обратил внимание на то, что в том же смысле, в каком алгоритмы задают вычислимые функции, условные алгоритмы задают вычислимые (эффективные) операторы. Например, сводимость множества A к множеству B означает существование эффективного оператора, преобразующего характеристическую функцию множества A в характеристическую функцию множества B . Он исследовал (1955 г.) взаимоотношение следующих видов эффективных операторов: примитивно рекурсивных, общерекурсивных, постовских, частично рекурсивных. Оказалось, что между этими классами существует отношение строгого включения. Естественно, самому общему понятию сводимости соответствует класс частично рекурсивных операторов. Вообще говоря, различные варианты понятия «алгоритм» индуцируют соответствующие варианты понятия «условный алгоритм». Исходя из понятия алгоритма Колмогорова, В. А. Успенский определил (1953 г.) класс условных алгоритмов Колмогорова. Более детально изучили (1955 г.) частично рекурсивные операторы, их область общепредопределенности и табличный способ задания А. В. Кузнецов и Б. А. Трахтенброт.

Пусть на алгоритмы данного типа (например, на рекурсивные вычисления) наложены некоторые дополнительные ограничения. Иногда это еще не является помехой для получения всех вычислимых функций; в других же случаях ограничение может оказаться существенным, и тогда интересно охарактеризовать соответствующий более узкий класс вычислимых функций в каких-то иных подходящих терминах. Тематика, связанная с выяснением таких обстоятельств, исследовалась как за рубежом, так и в нашей стране. Исторически рекурсивные схемы, машины Тьюринга и исчисления Поста были первыми вариантами алгоритмов, подвергшихся такому изучению. Рассмотрим вкратце некоторые работы советских математиков в этом направлении.

Рекурсивные вычисления. Как показал Клини, для всякой вычислимой функции f возможно такое рекурсивное вычисление, в котором только один раз применяется μ -оператор. Это видно из так называемой формы Клини¹

$$f(x) = U [\mu y (T(\varepsilon, x, y) = 0)],$$

¹ $\mu y [T(\varepsilon, x, y) = 0]$ читается так: «наименьшее y , для которого $T(\varepsilon, x, y)$ равна нулю».

где f — произвольная вычислимая функция, U и T — фиксированные примитивно рекурсивные функции, а параметр ε зависит от f . А. А. Марков определил (1947 г.) класс функций большого размаха и доказал, что в форме Клини в качестве функции U возможна всякая примитивно рекурсивная функция большого размаха и не возможна никакая другая функция. Это был один из первых результатов в СССР в области теории алгоритмов. А. В. Кузнецов детально исследовал (1950 г.) функции большого размаха и конструкции, осуществляемые с их помощью. Работа Кузнецова помогла лучше понять связь между примитивно рекурсивными и сложно рекурсивными (т. е. общерекурсивными, но не являющимися примитивно рекурсивными) вычислениями.

В известной теореме Р. Робинсона (США) установлено, что любую одноместную примитивно рекурсивную функцию можно получить из конечного запаса отправных одноместных функций посредством операции суперпозиции, суммирования и итерации. Иначе говоря, класс одноместных примитивно рекурсивных функций является конечно порожденной алгеброй относительно указанных операций. По инициативе А. И. Мальцева было предпринято детальное изучение этой и других алгебр рекурсивных функций при том или ином выборе основных операций. Многие интересные свойства базисов и максимальных подалгебр таких алгебр получены (1960—1966 гг.) Д. А. Захаровым, Е. А. Поляковым, И. А. Лавровым.

Тьюринговы вычисления. Возможности тьюринговых машин при ограничениях, накладываемых на стирание внешних символов, изучались Хао Ваном (США). Продолжая его работы, Н. В. Белякин и Г. П. Зыкин нашли (1963 г.) условия, при которых ограниченное стирание (или даже полное его запрещение) все еще не является препятствием для организации вычислений всех эффективных функций. О. Б. Лупанов описал (работа не опубликована) модели трехленточных машин Тьюринга, которые могут вычислять все эффективные функции без записей внешних символов. Аналогичный результат получен независимо от Лупанова Минским (США, 1962 г.). Более детально возможности машин Минского изучены в работе (1962 г.) Я. М. Барздиня.

Исчисления Поста. Какие множества можно задавать посредством исчислений Поста при наложении тех или иных ограничений на употребляемые алфавиты или на допустимые продукции? Исследуя такого рода вопросы, С. Ю. Маслов установил (1963 г.) интересные условия (например, пустота вспомогательного алфавита), при которых могут быть получены не все перечислимые множества, а лишь достаточно «густые» множества. М. И. Кратко доказал (1963, 1965, 1967 гг.), что если все продукции исчисления имеют один из видов

$$\begin{aligned} A_1x, A_2x, \dots, A_nx &\rightarrow Bx \\ xA' &\rightarrow xB', \end{aligned}$$

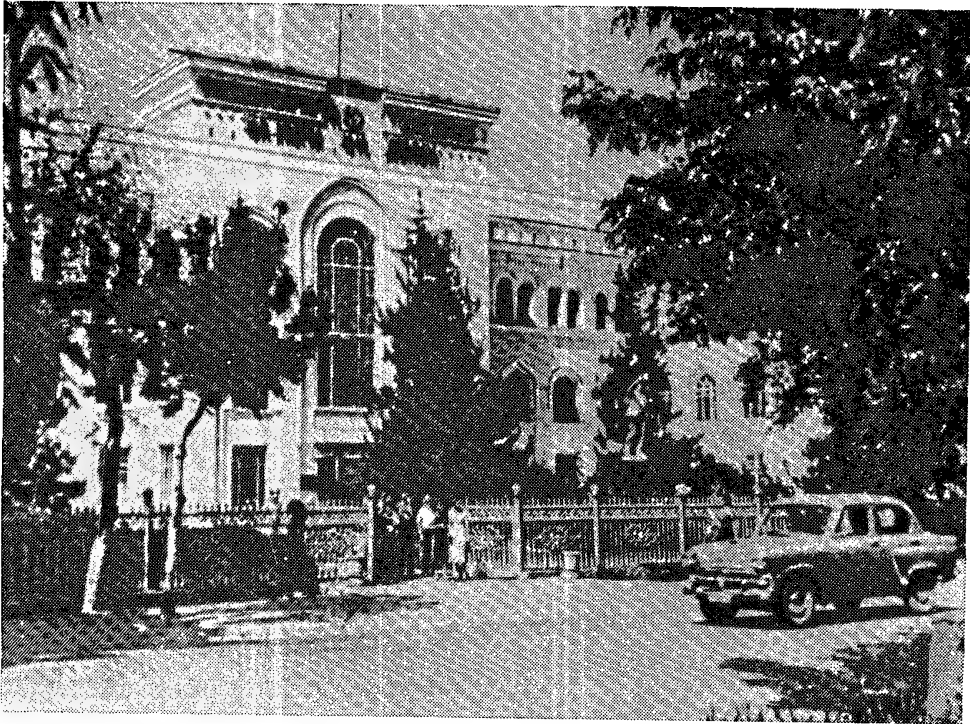
то исчисление может породить лишь конечноавтоматные множества (значительное усиление результата американского математика Бюхи).

Дескриптивные и классификационные вопросы

В теории алгоритмов изучаются различные классификации в зависимости от рассматриваемых объектов (множества, функции, системы функций и т. п.) и классификационных критериев.

Дескриптивные вопросы. После работ Клини и Поста перечислимые множества рассматривались как аналоги A -множеств, разрешимые множества — как аналоги B -множеств, а иерархия Клини — Мостовского в целом — как аналог проективной иерархии. Еще на семинаре П. С. Новикова была поставлена общая проблема: выяснить, возможны ли здесь более глубокие связи с теорией множеств. В рамках этой проблемы исследовались многие конкретные задачи с привычными для дескриптивной теории множеств постановками об отделимости, униформизации, универсальности и т. п. В ходе выполнения этой программы выяснилось, что многие проблемы теории множеств, при решении которых возникают принципиальные трудности, имеют свои аналоги в теории алгоритмов, где, однако, они иногда решаются сравнительно нетрудно. В связи с этим интересно сопоставить некоторые результаты Поста (теория алгоритмов) и П. С. Новикова (дескриптивная теория множеств). Пост открыл в классе перечислимых множеств интересные подклассы креативных и простых (в частности, гиперпростых) множеств, характеризующихся следующим образом: дополнение к креативному множеству эффективно отделимо от любого перечислимого множества, а дополнение к простому множеству бесконечно, но не содержит бесконечного перечислимого подмножества. В дополнении к креативному множеству нетрудно заметить аналог так называемых эффективно несчетных множеств, открытых (1939 г.) П. С. Новиковым. Факт существования простых множеств явно перекликается с гипотезой о существовании SA -множеств без совершенного ядра; совместимость этой гипотезы с аксиомами теории множеств была впоследствии доказана (1951 г.) П. С. Новиковым.

П. С. Новиков (1946 г.), А. В. Кузнецов и Б. А. Трахтенброт (1949—1953 гг.) подробно исследовали проблемы отделимости для множеств из иерархии Клини — Мостовского. В частности, было обнаружено, что существуют непересекающиеся перечислимые множества, не отделимые разрешимыми множествами; в данном случае аналогия с теорией множеств нарушается, ведь непересекающиеся A -множества всегда B -отделимы. В. А. Успенский заметил (1955 г.), что во всех известных примерах неотделимых пар перечислимых множеств имеет место более сильный факт, чем тот, который вытекает из определения неотделимости; он ввел для него термин «эффективная неотделимость». Решая проблему, поставленную В. А. Успенским, А. А. Мучник доказал (1956 г.) существование такой неотделимой пары перечислимых множеств, для которой не имеет места эффективная неотделимость. Более того, такие перечислимые множества не универсальны. Это тем более примечательно, что в дескриптивной теории множеств при попытках построения не-



Таджикский государственный университет им. В. И. Ленина.

отделимых множеств без привлечения универсальных (в соответствующем смысле) множеств возникают большие трудности. Из других новых понятий, введенных советскими математиками, отметим понятие густоты множества (Ю. Т. Медведев, 1955 г.), которое, в частности, оказалось полезным при выяснении вопроса, насколько богатым может быть класс попарно неизоморфных перечислимых множеств.

Начиная с 1949 г. А. В. Кузнецов разрабатывал другие иерархии арифметических функций (B' -функции, C' -функции), аналогии которых с дескриптивными иерархиями борелевских множеств и C -множеств Селивановского оказались более полными, чем с иерархией Клини — Мостовского. (Эти результаты не были полностью опубликованы, краткий обзор их помещен в сборнике «Математика в СССР за сорок лет».) С иерархиями связано и изучение конструктивных трансфинитов, которыми нумеруются классы. Исследование иерархий и конструктивных трансфинитов продолжает В. И. Амстиславский.

Сводимость. Классификация множеств по степеням неразрешимости принадлежит Посту. Сформулированная им проблема сводимости была (и для советских математиков) одним из главных стимулов изучения внутренней проблематики теории алгоритмов. Сами понятия «креативное множество» и «гиперпростое множество», большинство приведенных выше результатов, а также различные типы сводимости и рекурсивные операторы — все это так или иначе связано с проблемой сводимости, хотя сохраняет и самостоятельное значение. Первоначально Пост доказал, что никакое креативное множество не сводимо таблично ни

к какому гиперпростому множеству. Б. А. Трахтенброт показал (1955 г.), что даже посредством общерекурсивных операторов такая сводимость не осуществима. Если бы можно было пренебречь частично рекурсивными операторами, то тем самым было бы установлено наличие различных степеней неразрешимости в классе всех перечислимых множеств. Но в том то и дело, что, как показал Деккер (США), с помощью частично рекурсивных операторов можно сводить креативные множества к некоторым гиперпростым множествам. Проблема Поста была решена в 1956 г., причем одновременно и независимо друг от друга двумя молодыми математиками — А. А. Мучником (СССР) и Фридбергом (США), показавшими, что существует бесконечное множество перечислимых множеств, не сводящихся одно к другому даже посредством частично рекурсивных операторов. После этого результата возникла необходимость в детальном изучении структуры степеней неразрешимости и в исследовании смежных дескриптивных проблем.

Ю. Т. Медведев, ученик А. Н. Колмогорова, применил (1955, 1956 гг.) идею сводимости к классификации более общих объектов, а именно систем функций. Такие системы (вообще говоря, бесконечные) он называет массовыми проблемами. Решить массовую проблему — значит построить хотя бы одну функцию системы. Можно показать, что очень часто математика имеет дело с проблемами именно такого рода. Например, проблеме перечислимости некоторого множества M соответствует класс перечисляющих его функций, и естественно считать, что она разрешима, если среди этих функций имеется хотя бы одна вычислимая функция. Далее, по определению проблема A сводится к проблеме B или, иначе говоря, A не труднее B (обозначение $A \leq B$), если существует частично рекурсивный оператор, который любую функцию из B переводит в какую-нибудь функцию из A . Проблемы A и B имеют одну и ту же степень трудности, если $A \leq B$ и $B \leq A$. Ю. Т. Медведеву удалось достаточно полно описать структуру степеней трудности (упорядоченную отношением $\leq$). Оказалось, что она является имплективной структурой и, кроме того, может рассматриваться как уточнение исчисления проблем Колмогорова. В дальнейшем (1962 г.) А. А. Мучник рассмотрел другую концепцию сводимости (слабую сводимость) для массовых проблем. Ей соответствует исчисление так называемых слабых степеней трудности, которое также является интерпретацией исчисления высказываний.

Сложность вычислений. Интенсивное и систематическое исследование сложности вычислений началось лишь в самое последнее время. В этом направлении еще не закончен процесс формирования необходимого круга понятий и опробования методов. Получено сравнительно немного результатов. Учитывая новизну постановки и специфику применяемых методов, мы остановимся на них несколько подробнее.

Возможны различные критерии сложности вычислений. Первоначально они преимущественно основывались на классификации рекурсивных схем вычисления (общерекурсивные, примитивно рекурсивные, элементарные по Кальмару и т. п.). В последнее время все более широко применяются так называемые сигнализирующие функции, которые при

варьировании исходных данных оценивают рассматриваемый алгоритм по числу шагов, объему памяти и т. п., затрачиваемых для получения соответствующего результата. Такой подход впервые был выработан в нашей стране. Г. С. Цейтин предложил (1956 г.) оценивать сложность нормальных алгоритмов функцией, указывающей для каждого исходного слова число шагов при применении нормального алгоритма к этому слову. Ему принадлежат первые результаты (1956 г.) о сложности нормальных алгоритмов. Примерно в это же время и независимо от Г. С. Цейтина Б. А. Трахтенброт ввел аналогичные функции, оценивающие объем памяти рекурсивных вычислений. Позднее другие варианты сигнализирующих функций для тьюринговых вычислений, а также обций аксиоматический подход в описании подобных критериев сложности были предложены зарубежными учеными (Рабином, Ритчи, Блюмом).

Пусть зафиксирован тип вычислений (например, тьюринговы вычисления) и способ измерения их сложности (например, временная сигнализирующая). Тогда в классе вычислимых функций вводится частичный порядок « f не сложнее g », т. е. для любого вычисления функции g существует вычисление функции f с не большей сигнализирующей. Общая проблема изучения структуры сложностей чаще приводит к конкретным задачам о нижней оценке сложности для отдельных функций или для классов функций. Для решения таких задач широко применяются разного рода диагональные конструкции. Первый результат, полученный таким методом, принадлежит Г. С. Цейтину, установившему, в частности, что для любой вычислимой функции h существует такой предикат G , что h является нижней оценкой для сигнализирующих при всевозможных вычислениях G . Другие варианты диагональных конструкций были разработаны позднее за рубежом (Рабин, Блум), они применялись и советскими математиками для изучения сигнализирующей памяти при тьюринговых вычислениях. Посредством более конструктивных методов (недиагонального характера) Б. А. Трахтенброт (1964—1966 гг.), Я. М. Барздинь (1964—1968 гг.) и Р. В. Фрейвалд (1965—1968 гг.) получили оценки временной сложности тьюринговых вычислений, А. В. Гладкий — оценки сложности выводов в порождающих грамматиках. Подобные методы использовались несколько позднее за рубежом (Хенни, Рабин, Хартманис и др.). Недиагональные методы удалось применить пока лишь при исследовании сравнительно не очень сложных вычислений. С их помощью не удалось построить ни одного предиката с гарантированной нижней оценкой времени по порядку больше n^2 .

При переходе от одного типа вычислений к другому или при изменении критерия сложности, вообще говоря, изменяется и частичный порядок, индуцируемый отношением « f не сложнее g ». Возникает вопрос, можно ли, располагая какими-либо оценками для одного типа вычислений, извлечь нетривиальные оценки для другого типа вычислений. Основным методом исследования таких вопросов является моделирование. Например, по заданному нормальному алгоритму строится машина Тьюринга, имитирующая его работу. Я. М. Барздинь получил (1965 г.) важные результаты о моделировании, показывающие, как влияют на сложность вычислений различные параметры употребляемых алгоритмов.

В частности, очень полезным оказался параметр, названный им «емкость среды». В ряде случаев удается выяснить, как отражаются на сложности вычислений те или иные свойства вычислимых функций. Так, частота, с которой функция принимает различные значения, в некотором смысле мало влияет на сложность ее вычисления (Б. А. Трахтенброт, 1964—1966 гг.).

5

Нумерации

Нумерация некоторой совокупности объектов $\mathcal{M}$ — это отнесение номеров (натуральных чисел) объектам из $\mathcal{M}$, причем одному объекту, вообще говоря, — много номеров. В классических работах Геделя было показано, что нумерация может рассматриваться как род координатизации, посредством которой вопросы о соотношениях между объектами превращаются в арифметические вопросы о соотношениях между их номерами. Для того чтобы с помощью подходящих нумераций можно было применять к подобным вопросам теорию алгоритмов, необходимо, чтобы эти нумерации были достаточно «хорошими». А. Н. Колмогоров первый заметил, что геделевская нумерация — не единственная нумерация, пригодная для подобных целей. Под его влиянием В. А. Успенский занялся (1955 г.) абстрактным изучением нумераций. Теория нумераций исследовалась и многими зарубежными учеными (Райсом, Фридбергом, Лахланом и др.). Из советских ученых специально ею занимался (1961, 1963 гг.) А. И. Мальцев, первоначально в связи с разработкой основ теории конструктивных алгебр (являющихся нумерованными совокупностями), а затем и в качестве самостоятельного предмета. В. А. Успенский сформулировал (1955—1957 гг.) явно те свойства геделевской нумерации, которые и делают ее «хорошей», и определил в их терминах ряд основных понятий теории нумераций («потенциально вычислимая операция», «главная нумерация», «вполне накрывающая нумерация» и др.). Это позволило ему доказать в общей форме некоторые теоремы, известные ранее лишь для специальных нумераций множества всех вычислимых функций (например, следующую теорему Райса: каково бы ни было нетривиальное свойство вычислимых функций, не существует алгоритма, который по геделевскому номеру функции узнавал бы, обладает ли функция этим свойством). А. И. Мальцев выявил ряд интересных классов нумераций (полные, нормальные, эффективно главные и др.) и поставил общую задачу: выяснить основные связи между нумерациями различных типов. При выполнении этой программы им получены результаты, устанавливающие, при каких условиях для семейства множеств существует нумерация того или иного типа, при каких условиях она единственна (с точностью до изоморфизма) и т. п. Хотя главное внимание уделено нумерациям класса всех перечислимых множеств, тем не менее используемые здесь понятия и полученные в их терминах результаты, как правило, применимы к нумерованным совокупностям из произвольных объектов.

Пусть ξ — элемент некоторой нумерованной совокупности $\mathcal{M}$; если нумерация совокупности достаточно «хороша», то любой номер объекта ξ может рассматриваться как некоторое адекватное его описание. Это наводит на мысль, высказанную впервые А. Н. Колмогоровым, что нумерации могут служить основой характеристики сложности. «Нумерационной» сложностью объекта ξ можно объявить, например, двоичный логарифм наименьшего из номеров этого объекта. Для случая, когда $\mathcal{M}$ — множество всех конечных последовательностей в алфавите $\{0, 1\}$, А. Н. Колмогоров показал, что это понятие можно уточнить так, что оно будет мало зависеть от выбора «хорошей» нумерации. В этих терминах им получены некоторые асимптотические оценки сложности конечных последовательностей, обнаруживающие связь между «сложностью» конечной последовательности и количеством информации, которое ей присуще. Если $\mathcal{M}$ — нумерованная совокупность вычислимых функций, то номер ξ рассматривается как код программы (алгоритма) для вычисления функции ξ . Определяя сложность ξ так, как это было указано выше, мы тем самым характеризуем числом громоздкость ее программы. Для сравнения напомним, что посредством сигнализирующей функции мы характеризуем сложность самого процесса вычисления. А. А. Марков (1957 г.) и В. А. Кузьмин (1965 г.) получили некоторые оценки «нумерационной» сложности для функций алгебры логики.



В. А. Успенский.

6

Алгоритмические проблемы

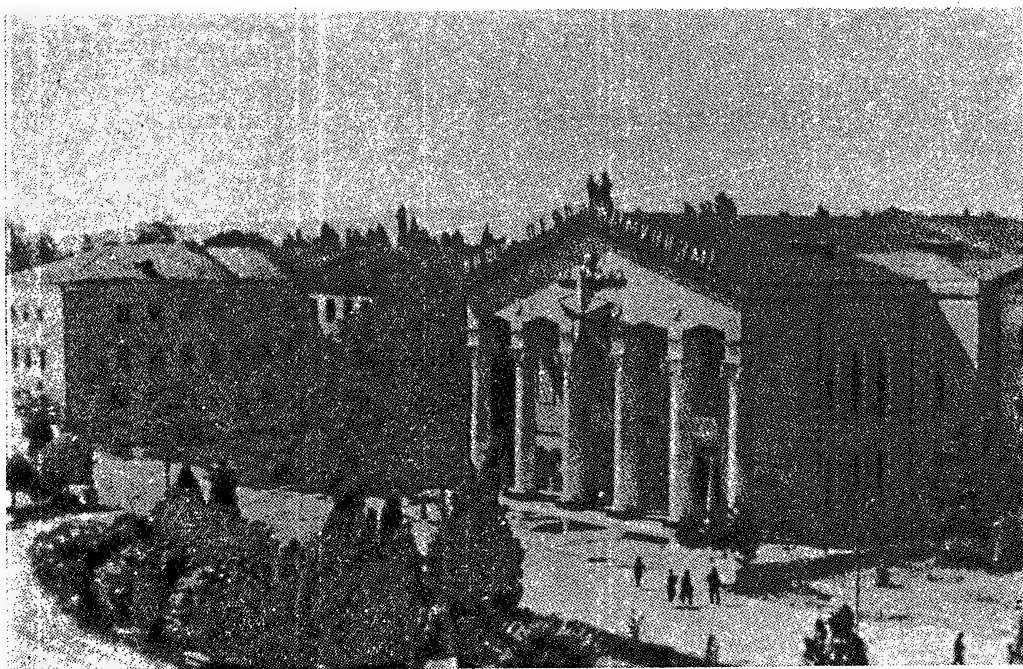
Среди приложений теории алгоритмов центральное место занимают исследования алгоритмических проблем. Алгоритмическая проблема заключается в следующем. Дается класс $\mathcal{M}$ задач, каждая из которых сформулирована в виде вопроса, допускающего ответ «да» или «нет», и ищется алгоритм, который доставлял бы для любой индивидуальной задачи правильный ответ. Подобные алгоритмы издавна разрабатывались в математике, но лишь с созданием теории алгоритмов появилась возможность доказывать наличие алгоритмически неразрешимых проблем, т. е. проблем, для которых искомый алгоритм невозможен. Пусть $\mathcal{M}^+$ и $\mathcal{M}^-$ — подклассы $\mathcal{M}$, состоящие из задач, для которых ответ соответственно утвердителен или отрицателен. Обычно можно рассматривать $\mathcal{M}$ как нумерованную совокупность, а следовательно, можно поставить вопрос об алгоритмической природе его

подмножеств $\mathcal{M}^+$ и $\mathcal{M}^-$. По тезису Черча, существование соответствующего алгоритма означает не что иное, как разрешимость множества $\mathcal{M}^+$ (а следовательно, и его дополнения $\mathcal{M}^-$). Исследование алгоритмических проблем и направлено главным образом на выяснение вопроса, разрешимо ли $\mathcal{M}^+$. На самом же деле желательно получить более точную информацию. Например, если $\mathcal{M}^+$ неразрешимо, то принадлежит ли оно к иерархии Клини — Мостовского, а если принадлежит, то к какому именно классу. Очень часто положение таково, что $\mathcal{M}^+$ заведомо перечислимо, а следовательно, вопрос о принадлежности к иерархии Клини — Мостовского тривиальным образом решается положительно. В таких случаях желательно более точно установить степень неразрешимости $\mathcal{M}^+$ или выяснить, отделимо ли $\mathcal{M}^+$ от некоторого интересного подмножества $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}^-$. Допустим, что $\mathcal{M}^+$ и $\mathcal{M}^-$ отделимы. Это означает, что существует такой применимый ко всем задачам из $\mathcal{M}$ алгоритм, который дает правильные ответы для задач из $\mathcal{M}^+$ и $\mathcal{M}^-$, но может давать неправильные ответы для некоторых задач из $\mathcal{M}^- / \mathcal{M}'$. Если же $\mathcal{M}^+$ не отделимо от $\mathcal{M}'$, то это означает, что данная алгоритмическая проблема не только не разрешима, но для нее невозможен даже «частичный» алгоритм в разъясненном выше смысле.

Советские математики исследовали алгоритмическую природу очень многих проблем, главным образом в области алгебры и теории моделей. При изложении полученных результатов возникает специфическая трудность. Дело в том, что часто эти результаты имеют стандартную формулировку «такая-то проблема алгоритмически неразрешима», за которой трудно разглядеть глубину и индивидуальную сущность результата. Раскрытие формулировки требует более глубокого проникновения в соответствующую специальную теорию, например в теорию групп или теорию моделей, что выходит за рамки нашей задачи.

Начиная с 1947 г. в центре внимания находятся проблемы, связанные с изучением конечноопределенных (т. е. задаваемых конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений) полугрупп и групп. Среди этих проблем особое место занимает проблема тождества. Для произвольной пары слов в системе решается вопрос, эквивалентны ли они. Во многих других проблемах (проблема делимости, представимости, сопряженности и т. п.) характер вопроса аналогичен: обладает ли любая пара (или система) слов соответствующим свойством.

Другая категория проблем связана с распознаванием свойств конечноопределенных систем. Например, в проблеме конечности вопрос заключается в том, имеет ли данная система лишь конечное число попарно различных элементов. Изучение этих проблем начал (1947, 1951 гг.) А. А. Марков. Он доказал алгоритмическую неразрешимость проблемы тождества для полугрупп. Далее Марков установил алгоритмическую неразрешимость большого количества проблем обеих категорий. Он ввел понятие инвариантного свойства полугрупп и доказал общую теорему об алгоритмической нераспознаваемости инвариантных свойств полугрупп. Г. С. Цейтин, продолжая исследования А. А. Маркова, своего учителя, уточнил (1956, 1958 гг.) его результаты в том смыс-



Киргизский государственный университет.

ле, что ему удалось минимизировать параметры полугрупп (число образующих, число соотношений), при которых явление алгоритмической неразрешимости уже наступает.

Примерно такие же проблемы П. С. Новиков и С. И. Адян исследовали в теории групп. Новиков построил (1952 г.) пример конечноопределенной группы с неразрешимой проблемой тождества; Адян разработал общий метод доказательства алгоритмической неразрешимости проблем, связанных с распознаванием инвариантных свойств групп.

Алгоритмические проблемы теории групп по своему значению занимают особое место среди проблем такого рода, поскольку само понятие группы — одно из важнейших понятий математики. Проблема тождества для групп была сформулирована в 1912 г., ею занимались многие математики, но лишь в 1952 г. она была решена П. С. Новиковым.

Поскольку общие проблемы тождества для полугрупп и групп алгоритмически неразрешимы, разработка алгоритмов для отдельных классов групп и полугрупп представляет большой интерес. Такие алгоритмы были созданы В. А. Тартаковским (1949 г.), А. И. Мальцевым (1955, 1957 гг.), А. В. Кузнецовым (1956 г.).

А. В. Кузнецов ввел (1955 г.) понятие общерекурсивной алгебры, с помощью которого установил некоторые критерии алгоритмической неразрешимости проблемы тождества. А. А. Фридман показал (1962 г.), что для любой степени неразрешимости существует такая конечноопределенная группа, для которой проблема тождества имеет именно эту степень неразрешимости.

В последние годы внимание советских исследователей привлекают алгоритмические проблемы теории моделей. Эта проблематика является составной частью направления в математической логике и алгебре, которое возглавил А. И. Мальцев. Центром исследований стал Новосибирск. Главный объект изучения — элементарные теории классов моделей.

Пусть дан некоторый класс K моделей, например класс всех групп, конечных групп, колец, структур и т. п. С классом K ассоциируется его теория $T(K)$, т. е. множество всех формул логики первой ступени (в соответствующей сигнатуре), каждая из которых истинна во всех моделях класса K . Возникает вопрос: для каких классов моделей соответствующие теории разрешимы, т. е. существует алгоритм, который устанавливает для любой заданной формулы, принадлежит ли она теории. А. И. Мальцев и Тарский сформулировали ряд важных проблем такого рода. Исследование их проводилось (1963—1966 гг.) А. И. Мальцевым, его учениками и сотрудниками (Ю. Л. Ершовым, М. А. Тайцлиным, Ю. Ш. Гуревичем и др.). В результате было выявлено большое число как разрешимых, так и неразрешимых теорий. Во многих случаях установлен более сильный факт, чем неразрешимость рассматриваемой теории $T(K)$, а именно доказано, что множество формул из $T(K)$ не отделимо рекурсивно от множества формул, опровержимых на конечных моделях из K (короче: $T(K)$ неотделимо). Для случая, когда рассматриваются все модели, алгоритмическая неразрешимость теорий устанавливается теоремой Черча, а неотделимость установлена (1953 г.) Б. А. Трахтенбротом. Значение отдельных конкретных результатов и трудность их получения естественно зависят от рассматриваемого класса моделей.

А. И. Мальцев был инициатором систематического исследования проблемы разрешимости и отделимости специальных классов моделей, рассматриваемых в алгебре. Ему принадлежат и первые результаты (1960, 1961 гг.) в этом направлении. Например, он установил неотделимость теории групп; в частности, отсюда следует неразрешимость теории конечных групп. Впоследствии Ю. Л. Ершов (1964 г.) доказал неразрешимость теорий конечных симметрических групп и различных классов метрических групп, а М. А. Тайцлин (1962 г.) — неразрешимость теорий коммутативных полугрупп с сокращением. Обнаружены также очень интересные случаи разрешимых теорий. Прежде всего это относится к теории p -адических чисел (результат Ю. Л. Ершова). В ходе этих исследований был разработан и новый общий метод доказательства неотделимости элементарных теорий, который позволил единообразно установить неотделимость широкого класса теорий (Ю. Л. Ершов, М. А. Тайцлин).

Так называемой проблемой сведения, которая состоит в выяснении алгоритмической неразрешимости теории всех моделей данной сигнатуры при тех или иных ограничениях на сигнатуру и кванторную приставку формул, занимались В. Ф. Костырко (1964, 1966 гг.) и Ю. Ш. Гуревич (1964—1968 гг.). Окончательно она была решена Ю. Ш. Гуревичем.

Выше отмечалось, что алгоритмические проблемы в нашей стране (как, впрочем, и за рубежом) исследовались главным образом в алгебре

и теории моделей и именно здесь были получены самые значительные результаты и отработаны соответствующие методы исследования. Это объясняется близостью алгебраических и теоретико-модельных конструкций к конструкциям математической логики и теории алгоритмов. Вместе с тем советские математики изучали (правда, в значительно меньшей мере) также алгоритмические проблемы в других областях и установили алгоритмическую неразрешимость ряда проблем математической лингвистики (А. В. Гладкий, 1965 г.), теории конечных автоматов (М. И. Кратко, 1964 г.).

7

Алгоритмическое истолкование математических понятий

В различных разделах логики и математики естественно возникают вопросы, связанные с истолкованием понятий, в которых более или менее явно отражена идея эффективности. Например, что такое эффективное доказательство существования, что такое конструктивное действительное число, что такое случайность. На основе теории алгоритмов стало возможным точное определение и изучение некоторых таких понятий. В первую очередь это относится к выделению среди объектов, изучаемых в математике, таких, которые можно считать конструктивными в том или ином смысле. Например, конструктивное действительное число ξ можно определять по-разному, требуя, чтобы существовала вычислимая функция f такая, что $f(1), f(2), \dots$ есть последовательность рациональных чисел, сходящаяся к ξ , или чтобы существовала вычислимая функция f такая, что $f(n)$ есть n -я цифра в десятичном разложении числа ξ .

Вместе с тем теория алгоритмов позволяет уточнить конструктивное понимание математических суждений о конструктивных объектах. Рассмотрим, например, часто встречающиеся в анализе высказывания вида «для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое N , что ...» Не нарушая общности, можно сказать, что ε есть рациональное число вида $\frac{1}{r}$, где $r = 1, 2$. В таком случае возможно следующее конструктивное понимание этого высказывания: «существует такая вычислимая функция $N = f(r)$, что...»

Еще до появления теории алгоритмов Брауэром были изложены основы конструктивной логики, а А. Н. Колмогоровым разработано (1932 г.) исчисление задач, являющееся в некотором смысле интерпретацией конструктивной логики. Однако четкое конструктивное истолкование законов логики и математических высказываний стало возможным только с установлением точного понятия вычислимой функции (как это было разъяснено на приведенном примере). Различные интерпретации конструктивной логики в духе исчисления задач Колмогорова, основанные на понятиях теории алгоритмов, даны Н. А. Шаниным (1954 г.), Ю. Т. Медведевым (1962, 1963, 1966 гг.), А. А. Мучником (1963 г.), А. В. Кузнецовым (1958 г.).

Целесообразность выделения конструктивных объектов и их изучения достаточно ясна. Возможны различные подходы к вопросу о том, какие средства допустимы при их исследовании. Наибольший пуризм характерен для «конструктивистов», допускающих лишь такие средства, которые основаны на конструктивной логике. В СССР эта точка зрения получила широкое развитие в работах ленинградской школы по конструктивному анализу, в котором изучаются конструктивные варианты основных понятий математического анализа (вещественное число, непрерывные функции, производная, интеграл и т. п.).

Конструктивные и классические объекты ведут себя по-разному, и многие теоремы анализа оказываются неверными при переведении их на конструктивный язык. Например, существует непрерывная функция, не интегрируемая по Риману на $[0,1]$. Конструктивизация классических понятий возможна, вообще говоря, различными способами, поэтому возможны различные варианты соответствующих теорем. Рассмотрим, например, конструктивный аналог теоремы «всякая последовательность вложенных друг в друга отрезков имеет общую точку». При конструктивном переистолковании ее она становится теоремой о существовании алгоритма, дающего по конструктивной записи последовательности отрезков, конструктивную запись соответствующего вещественного числа. Но, как показал (1956 г.) Г. С. Цейтин, такого алгоритма, вообще говоря, не существует, следовательно, соответствующая конструктивная теорема неверна. Это относится и к другим аналогичным теоремам существования. Вместе с тем возможны и такие понятия записи конструктивного числа (содержащие информацию о скорости сходимости), при которых отдельные из этих теорем окажутся верными.

Коллективом, возглавляемым А. А. Марковым и Н. А. Шаниным (Г. С. Цейтин, И. Д. Заславский и др.), выполнена большая программа по построению основных разделов конструктивного математического анализа. Итоги этих исследований изложены в сборнике «Проблемы конструктивного направления в математике. II» (1962 г.). Здесь термин «математический анализ» применяется в широком смысле, охватывающем теорию функций вещественных переменных, теорию функций комплексных переменных, теорию обобщенных функций, теорию метрических и нормированных пространств, теории функционалов, операторов и уравнений в таких пространствах.

Примером «классического» изучения конструктивных объектов является работа А. И. Мальцева по общей теории конструктивных алгебр «Конструктивные алгебры» (1961 г.). Алгебраические системы, в которых основное множество и основные операции конструктивны, встречались и раньше: в работах Мостовского (Польша), Шепердсона (Англия), А. В. Кузнецова и др. Особенность подхода А. И. Мальцева заключается в том, что конструктивные алгебры рассматриваются как нумерованные совокупности, и в этом смысле они являются аналогом аналитических многообразий, групп Ли и т. п. При изучении конструктивных алгебр Мальцев не ограничивается какими-либо специфическими средствами конструктивной логики. С помощью «классических» методов были установлены и изучены конструктивные аналоги некоторых топологи-

ческих понятий (множества эффективно открытые, эффективно замкнутые и др.) А. В. Кузнецовым и Б. А. Трахтенбротом.

Наконец, о приложениях теории алгоритмов, связанных с уточнением понятия случайного. В частотном определении вероятности по Мизесу требуется, чтобы относительная частота наблюдаемого результата не изменилась, если вместо всей последовательности испытаний наблюдать подпоследовательность испытаний, отобранных согласно какому-либо математическому правилу. Еще Черч заметил, что эту нечеткую формулировку можно уточнить, если под математическим правилом понимать «алгоритм» в точном смысле этого понятия. В замечании Черча можно усматривать некоторый подход к обоснованию теории вероятностей посредством теории алгоритмов, который, однако, не получил широкого развития. Впоследствии А. Н. Колмогоров предложил новое определение случайности и пропагандировал пересмотр оснований теории вероятностей с позиций теории алгоритмов. Он отождествляет «случайное» со «сложным». При этом исходным является понятие сложного кортежа, т. е. конечной последовательности символов из конечного алфавита. Колмогоров доказал ряд теорем, убедительно показывающих, что сложные кортежи ведут себя как случайные наборы символов. Тем самым намечены общие контуры интерпретации основных законов теории вероятностей как законов о сложновычислимых последовательностях.

Основания математики и математическая логика²

В дореволюционной России был выполнен ряд работ, проблематика которых относилась к математической логике (П. П. Порецкий, И. В. Слешинский, Е. Л. Буницкий, Н. А. Васильев, М. С. Волков, Н. Н. Парфентьев и др.) и основаниям математики (С. О. Шатуновский и др.), однако устойчивой традиции в этой области исследований по существу не было. Можно говорить о косвенной преемственности при формировании школы математической логики в СССР. Источником этой преемственности служил, прежде всего, высокий уровень теоретико-множественной культуры, центром которой была московская математическая школа Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина, давшая прекрасные работы по теории функций, теории множеств и топологии. Влияние этой школы на развитие математической логики проявилось не только в общей тенденции, но и в постановке конкретных задач.

Исследования в области математической логики в нашей стране развернулись с полной силой во второй половине 40-х годов, когда из

² При написании этого раздела использованы обзор С. А. Яновской (написанный совместно с С. И. Адяном, З. И. Козловой, А. В. Кузнецовым, А. А. Ляпуновым и В. А. Успенским), «Математическая логика и основания математики» (см. сб. «Математика в СССР за сорок лет») и статья А. А. Маркова «О конструктивной математике» (см. сб. «Проблемы конструктивного направления в математике. II». Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1962, т. 67).



С. А. Яновская.

обособленной области, доступной нескольким ученым, математическая логика и ее приложения превратились в специальность многих молодых математиков. Возрастающий интерес к задачам математической логики и популярность ее идей и методов объясняются, с одной стороны, интенсивным развитием машинной математики и программирования, а с другой — проникновением аксиоматического метода в математическое естествознание и кибернетику (примером может служить так называемая математическая лингвистика). Еще в большей степени развитие математической логики определяется внутренними закономерностями. Решающую роль в количественном росте и расширении тематики отечественных логико-математических исследований сыграла многолетняя

подготовительная работа логических семинаров, которые объединяли вначале немногих представителей этой специальности, но из которых впоследствии выросли многочисленные сильные коллективы ученых, работающих в различных областях математической логики.

В Московском и некоторых других университетах открылись кафедры математической логики, в Математическом институте им. В. А. Стеклова Академии наук СССР — отдел математической логики. Длительный процесс накопления логической культуры, носителями которой являются коллективы ученых Москвы, Ленинграда, Новосибирска, Свердловска, Киева, Еревана, Иванова, Вильнюса, Баку, Саратова, Кишинева, Алма-Аты и многих других научных центров страны, ведет свое начало от основанного в начале 30-х годов И. И. Жегалкиным семинара. Крупнейшими достижениями математической логики в СССР обязана представителям старшего поколения математиков. В деле пропаганды идей математической логики (даже в годы, далеко не благоприятствовавшие развитию этой науки) и воспитания молодых ученых-логиков особенно велика роль С. А. Яновской. В значительной мере ее усилиями была организована кафедра математической логики в МГУ. Заслуги С. А. Яновской в формировании направлений логико-математических исследований в СССР выходят далеко за рамки ее публикаций. Будучи до последних дней руководителем (вместе с П. С. Новиковым, а затем с А. А. Марковым) созданного еще И. И. Жегалкиным первого в стране научно-исследовательского семинара по математической логике, Яновская оказала серьезное влияние на творчество нескольких поколений участников этого «большого семинара» — влияние, которого в той или иной мере не избежало большинство работающих в этой области советских математиков, даже далеких по своим интересам от московской школы. Много учеников воспитали ученики Яновской. Среди тех и других немало представителей и «нема-

тематических» наук: философы (на философском факультете МГУ Яновская организовала несколько семинаров, в течение многих лет читала специальные курсы и подготовила многих самостоятельно работающих в настоящее время ученых-логиков), инженеры, лингвисты и др.

В Советском Союзе сложилось несколько школ математической логики, в том числе московские школы П. С. Новикова (дескриптивная теория множеств, логика, в последние годы — алгоритмические проблемы алгебры) и А. Н. Колмогорова (логика, теория рекурсивных функций), конструктивное направление А. А. Маркова — Н. А. Шанина (Ленинград, Москва), школы А. И. Мальцева (теория моделей, проблемы разрешимости; Иваново, Новосибирск). Ниже дана краткая характеристика этих школ; в основу деления на параграфы положена группировка работ по тематике, материал излагается в основном в хронологическом порядке.

1

Формальные системы логики

Ко времени появления первых логических работ советских ученых был достигнут (главным образом, благодаря трудам школы Гильберта) значительный прогресс в исследовании основных логических и логико-математических формальных систем. Помимо этих исследований внимание логиков занимало новое критическое направление, основанное Брауэром. Представители этого направления называли себя интуиционистами. Философская направленность интуиционистской программы не встретила, как известно, поддержки большинства математиков; однако ее фактическое содержание, выражавшее конструктивную тенденцию в математике, оказалось во многом очень ценным. С точки зрения логики особую роль сыграло привлечение Брауэром внимания к закону исключенного третьего и к проблеме о границах его применимости. Плодом такого пересмотра фундаментального закона традиционной логики явилась конструктивная логика, в создании которой советские ученые принимали активное участие.

В 1925 г. А. Н. Колмогорову удалось найти подход к проблеме о границах применимости закона исключенного третьего. Всякой логической формуле Колмогоров ставит в соответствие другую, получающуюся из нее заменой каждой подформулы ее двойным отрицанием. Тогда оказывается, что выводимость исходной формулы в классической логике равносильна интуиционистской выводимости преобразованной формулы. Классическая логика, таким образом, интерпретируется посредством интуиционистской. В частности, отсюда следует, что само по себе применение принципа исключенного третьего в математических рассуждениях не приводит к противоречию, т. е. с точки зрения непротиворечивости классическая математика обоснована не хуже интуиционистской.

Все сказанное имеет, разумеется, смысл только при ссылке на определенную формализацию интуиционистской логики. Система, из которой исходил А. Н. Колмогоров и которая была одним из первых вариантов

логики без закона исключенного третьего, сыграла известную роль и при выработке окончательного варианта, принадлежащего В. И. Гливленко и Гейтингу, — так называемой конструктивной логики (все аксиомы Колмогорова в ней выводимы).

В. И. Гливленко доказал (1929 г.) следующую замечательную теорему: если в классическом исчислении высказываний доказуема формула A , то в конструктивном исчислении высказываний доказуема формула $\neg\neg A$. Таким образом, «погружение» классического исчисления высказываний в конструктивное достигается просто заменой каждой формулы ее двойным отрицанием. Кроме этой теоремы, которая относится к числу нетривиальных результатов, наиболее часто используемых в работах по математической логике, Гливленко принадлежит (наряду с Колмогоровым и Гейтингом) заслуга разработки формальной системы конструктивной логики, а также важное замечание о том, что конструктивная логика не допускает точной интерпретации посредством трехзначных таблиц истинности. Впоследствии Н. А. Шанин провел (1953, 1954 гг.) систематическое исследование такого рода «погружающих операций». Он дал строгое определение этого понятия на основе понятия алгоритма, изучил различные примеры погружающих операций и исследовал класс так называемых правильных погружающих операций, интересных с точки зрения рассмотренного им конструктивного истолкования логико-арифметических формул.

В 1932 г. А. Н. Колмогоров высказал мысль о возможности конструктивного истолкования интуиционистской логики. (Собственно, только это истолкование и позволило смотреть на интуиционистскую формальную систему как на систему конструктивной логики.) Идея Колмогорова может быть разъяснена на следующем примере. Утверждение, что формула $(A \ \& \ (A \supset B)) \supset B$ истинна, при обычном истолковании букв как переменных высказываний формулируется так: «если верно A и A влечет B , то верно B ». В истолковании Колмогорова эта формулировка заменяется следующей: «если известно решение задачи A и известно, как свести решение задачи B к задаче A , то мы знаем также, как решить задачу B ». Следовательно, буквы интерпретируются как некоторые переменные задачи, логические связки — как операции над задачами, истинность же формулы означает, что соответствующая задача «всегда разрешима». Идею, близкую к изложенной, высказывал и Гейтинг, но его точка зрения не была столь последовательной: он рассматривал задачи не как основные объекты, а лишь как атрибуты логических высказываний.

Впоследствии это схематическое истолкование А. Н. Колмогорова уточнялось. Первое такое уточнение принадлежит Клини. Им вводится понятие «реализуемости» логико-арифметических формул. Роуз, ученик Клини, обнаружил (1953 г.) неполноту конструктивного исчисления высказываний Н, рассматриваемого как исчисление задач на реализацию логических формул. Работа Роуза стимулировала изучение реализуемости формул в СССР. Внимание к этим вопросам привлек (1955—1957 гг.) в своих лекциях П. С. Новиков. Он указал, в частности, способ устранения некоторых неконструктивных моментов из рассуждений Роуза

Ученики П. С. Новикова А. В. Поппель и В. А. Янков занимались (независимо друг от друга) построением примеров реализуемых, но не выводимых формул, обобщающих пример Роуза. Поппель доказал полноту конструктивного исчисления $\mathcal{H}$ относительно класса формул, построенных из отрицаний переменных. Полноту $\mathcal{H}$ для класса формул, содержащих не более одной импликации, доказал (1963 г.) Ф. А. Кабаков. Этот результат является обобщением результата Роуза о полноте $\mathcal{H}$ относительно класса формул, не содержащих импликации.

Важные результаты о реализуемости формул, имеющих вид дизъюнкции, получены (независимо друг от друга) Ф. Л. Варпаховским (1965 г.) и М. М. Кипнисом (1967 г.). Кипнису удалось также установить другие тонкие свойства реализуемости. Используя понятие реализуемости арифметических формул, он определяет отношение эквивалентности на классе арифметических предикатов (полагая, по определению, эквивалентными такие предикаты P и Q , для которых замыкания формул $P \supset Q$ и $Q \supset P$ реализуемы) и показывает, что всякий арифметический предикат эквивалентен арифметическому предикату в некоторой простой нормальной форме. Некоторые результаты, связанные с реализуемостью, получены также Н. М. Нагорным (1964 г.) и Я. С. Сметаничем (1965 г.).

Понятие конструктивной истинности (для логико-арифметических формул), близкое к понятию реализуемости, исследовал (1958 г.) Н. А. Шанин. Конструктивное истолкование математических суждений он рассматривает как одну из существенных сторон конструктивного направления в математике (см. § 7) и использует понятия и методы, типичные для этого направления (в частности, «ленинградский принцип»). В последних работах (начиная с 1967 г.) по конструктивной семантике (так называемое узкоконструктивное направление) Шанин использует аппарат исчисления арифметических равенств Гудстейна. С помощью погружающих операций Колмогорова и Шанина известные результаты Геделя, Генцена и Бернайса о непротиворечивости классической арифметики относительно интуиционистской распространены (1962 г.) И. Х. Шмаиным на случай произвольных прикладных исчислений предикатов и на погружения в системы, основанные на минимальной логике (не использующей, в отличие от интуиционистской, принцип «из противоречия следует все, что угодно», выражаемый формулой $\neg A \supset (A \supset B)$).

В 1955 г. А. Н. Колмогоров обратил внимание своего ученика Ю. Т. Медведева на то, что рассмотренное им (Медведевым) понятие массовой проблемы (описывающее самый широкий мыслимый в настоящее время класс задач на построение алгоритма; см. § 5) может быть использовано для уточнения теории задач. Впоследствии (1962, 1963, 1966 гг.) Ю. Т. Медведев исследовал еще один класс задач, названных финитными. Получающееся на основе этого класса уточнение теории задач представляется наиболее прямым из известных. Оно достигается минимальными средствами: финитная задача задается некоторым конечным множеством с выделенным в нем подмножеством. В частности, не используется ни в какой из его форм понятие вычислимости.



Н. Н. Воробьев.

Общезначимость формул, в которые не входит хотя бы одна из логических связей $\neg$, $\vee$, $\supset$, в смысле теории финитных задач совпадает с выводимостью в H . Это позволяет установить аналогичные результаты и по интерпретации посредством массовых проблем, и по реализуемости.

З. Г. Маймин и Л. А. Левин, ученики А. Н. Колмогорова, сумели обнаружить и доказать (1964 г.) многие существенные свойства финитно-общезначимых формул. (Результаты, близкие к результатам Левина, получил (1967 г.) В. А. Янков.) А. Н. Колмогоров связал (доклад на заседании математического общества, 1965 г.) рассмотрение класса финитных задач с оценкой сложности их алгоритмического решения. Эта идея использована Левиным в новом подходе к определению понятия количества информации.

Наряду с колмогоровским существуют и другие истолкования интуиционистского исчисления, не имеющие, правда, непосредственно логического содержания. П. С. Новиков рассмотрел оригинальный вариант топологической интерпретации, в известной степени моделирующей процесс измерения физических величин. Вопрос о полноте исчисления H при такой интерпретации пока не решен.

Изучением дедуктивных свойств исчисления H занималась Б. Ю. Пильчак. Ею, в частности, найден (1950 г.) удобный алгоритм для распознавания выводимости в H .

А. В. Кузнецов получил (1963 г.) следующий интересный результат. Пусть K — некоторое исчисление высказываний (с обычными правилами вывода), в котором выводимы все аксиомы H ; не существует алгоритма, который по любому заданному исчислению высказываний давал бы ответ на вопрос, эквивалентно ли оно исчислению K .

Изучались модификации конструктивной логики, полученные посредством ее расширения. А. А. Марков сформулировал (1950 г.) конструктивное логико-арифметическое исчисление, содержащее кроме обычных логических операций так называемую операцию сильного отрицания. Н. Н. Воробьев, ученик А. А. Маркова, исследовал (1952 г.) дедуктивные и алгоритмические свойства исчисления, получающегося из H добавлением к нему операции сильного отрицания и относящихся к ней аксиом.

Некоторые работы советских логиков относятся к более традиционному исчислению — «классическому» исчислению высказываний и предикатов.

М. И. Шейнфинкель в совместной с Бернайсом работе (1929 г.) решил проблему разрешимости формул узкого исчисления предикатов, нормальная форма которых содержит кванторы одного вида или таких,

что все их кванторы общности предшествуют кванторам существования. Шейнфинкель — автор оригинального исследования о логическом языке, построенном некоторым естественным образом из трех исходных знаков. В основе этого построения лежит созданное (1924 г.) им исчисление функций, явившееся прототипом исчисления λ -конверсий; при создании последнего его автор, Черч, находился под прямым влиянием работы Шейнфинкеля. (Влияние идей Шейнфинкеля видно и в так называемой комбинаторной логике американского логика Карри.)

Ценный вклад в классическую логику внес И. И. Жегалкин. Он предложил (1928 г.), в частности, новое построение исчисления высказываний, основанное на использовании логических связей конъюнкции и разделительной дизъюнкции и двух констант («истина» и «ложь»). Благодаря тому что точной моделью такого исчисления оказывается кольцо вычетов по модулю 2, проблема разрешимости может быть решена посредством очень простой и изящной процедуры. Жегалкин распространил (1929 г.) свой метод на исчисление одноместных предикатов. Им также найден (1929 г.) эффективный разрешающий алгоритм для широкого класса формул, содержащих двуместные предикаты. Кроме научных работ важнейшей заслугой Жегалкина является создание упоминавшегося выше первого в стране семинара по математической логике, участниками которого были, в частности, П. С. Новиков, В. И. Гливенко, Д. А. Бочвар, А. А. Ляпунов, А. В. Кузнецов.

Интересный результат получил Б. А. Трахтенброт, ученик П. С. Новикова. Он доказал (1950 г.), что не существует алгоритма, который для каждой формулы исчисления предикатов определял бы, является ли она тождественно истинной в любой конечной области. Хотя для случая бесконечной области индивидуумов аналогичный результат (теорема Черча) был известен, высказывалось мнение, что такой алгоритм существует. Это мнение подкреплялось тем, что Аккерманом и И. И. Жегалкиным он был найден для широкого класса формул.

А. А. Зыков установил (1953 г.) возможность редукции проблемы выполнимости в конечной области, аналогичной известной ранее редукции выполнимости в любой области. Он получил также результаты о выполнимости формул расширенного исчисления предикатов (второй степени) в области заданной мощности. Кроме того, ему принадлежит исчерпывающее исследование вопроса о непротиворечивом присоединении к аксиомам узкого исчисления предикатов новых формул.

Начатые в известных работах Левенгейма, Аккермана, Геделя, Кальмара, Шютте, Шураньи и других исследования вопроса о разрешимости классов формул узкого исчисления предикатов данной сигнатуры в зависимости от вида кванторной приставки продолжили В. Ф. Костырко (1964, 1966 гг.), получивший решение этой проблемы для ряда важных трудных случаев, и Ю. Ш. Гуревич (1964—1968 гг.), завершивший описание классов сведения предикатных формул.

В последние годы появились работы, посвященные различным нетрадиционным логическим системам.

Исчисление строгой импликации Аккермана (построенное для того, чтобы избавиться от так называемых парадоксов импликации и



А. А. Зыков.

формализовать отношение «следования по смыслу») изучалось Л. Л. Максимовой (1964—1966 гг.), упростившей аксиоматику Аккермана и доказавшей некоторый аналог дедукционной теоремы, А. С. Машиным (1966 г.) и В. В. Донченко (1963 г.), учеником С. А. Яновской. Различные формализации отношения логического следования рассмотрены (1962 г.) А. А. Зиновьевым.

Формализация и обобщения аристотелевской силлогистики исследованы А. Л. Субботиным (1963, 1968 гг.), В. А. Смирновым (1963 г.), А. А. Зиновьевым (1963 г.). Многочисленными логиками занимался А. А. Зиновьев (1960 г.), проблемами логической семантики — В. К. Финн (1967 г.) и Д. Г. Лахути (1960 г.). Ряд исследований по синтаксическому и семантическому анализу формальных язы-

ков принадлежит А. А. Летичевскому (1965, 1968 гг.), Э. Ф. Скороходько (1960—1966 гг.).

Значительное внимание уделялось (особенно с 1960 г.) общеметодологическим и философским проблемам логики, в Москве (С. А. Яновская, Ю. А. Гастев, Б. В. Бирюков и др.) и на Украине (М. В. Попович, С. Б. Крымский, А. И. Уемов, В. Н. Костюк и др.). Вопрос о формализации нематематических дисциплин (механика) исследован Г. П. Дишкантом (1966 г.).

Остановимся вкратце на одном сравнительно новом, но весьма перспективном и быстроразвивающемся направлении исследований — так называемом машинном поиске логического вывода. Работы по программированию машинного доказательства теорем логических и логико-математических исследований были начаты в США в конце 50-х — начале 60-х годов (Хао Ван, Шоу, Ньюэлл, Саймон и др.). Довольно быстро обнаружилось, во-первых, возможности значительной экономии времени за счет рациональных изменений разрешающей процедуры в тривиальных разрешимых случаях и, во-вторых, сильная зависимость эффективности программы поиска вывода (в общем случае неразрешимых исчислений с разрешимыми фрагментами) от способа записи формул (например, при употреблении бесскобочной символики Лукасевича) и, главное, от способа задания соответствующих исчислений. Особенно удобным для составления алгоритмов (и программ) поиска вывода оказались натуральные и секвенциальные исчисления генценовского типа.

В СССР исследования по машинному поиску вывода ведутся в Москве, Киеве, Баку, Риге и некоторых других научных центрах. Особенно важное значение имеют исследования группы математиков, работающих под общим руководством Н. А. Шанина. С. Ю. Маслов, Г. Е. Минц, А. О. Слисенко, В. П. Оревков, Г. В. Давыдов, В. А. Лифшиц,

В. А. Матулис, Р. А. Плюшкявичюс и другие изучали различные варианты и способы задания формальных систем, приспособленных для составления алгоритмов поиска вывода в них. Минц обобщил (1967 г.) в исчислениях предикатов теорему Эрбрана о возможности замены каждой доказуемой формулы некоторой бескванторной дизъюнкцией, Маслов разработал (1967, 1968 гг.) основной для всех дальнейших исследований этой группы так называемый обратный метод установления выводимости. Предложенный им метод позволяет получать существенные сокращения алгоритмов вывода, основанных на применениях теоремы Эрбрана. Наряду с упомянутыми теоретическими исследованиями, активно ведущимися в рамках общей (конструктивной) теории исчислений, полученные результаты реализуются на программном уровне.

2

Аксиоматическая теория множеств и арифметика

К числу крупных достижений в области логики относится результат (1953 г.) П. С. Новикова о непротиворечивости некоторых предложений теории множеств. В 1930 г. Н. Н. Лузин выдвинул гипотезу, что средств обычной теории множеств недостаточно для решения вопроса о мощности дополнений к аналитическим множествам (называемых *СА*-множествами), а также вопроса об измеримости проекций дополнений к аналитическим множествам (называемых *РСА*-множествами). Новиковым получено частичное подтверждение этой гипотезы. А именно: в одной из самых распространенных формальных систем аксиоматической теории множеств — системе Σ Геделя — оказываются непротиворечивыми 1) существование несчетных *СА*-множеств, не содержащих совершенного подмножества, и 2) существование *РСА*-множеств, не измеримых по Лебегу. Эти результаты были получены также Геделем (доказательство Геделя, однако, до сих пор не известно). В упомянутой работе Новикова устанавливается непротиворечивость еще одного важного предложения, относящегося к законам отделимости проективных множеств высших классов. Пользуясь результатами и методами Новикова, его ученик Б. С. Сосновомов получил (1954—1956 гг.) ряд важных результатов о непротиворечивости отдельных предложений теории множеств.

А. С. Есенин-Вольпин рассматривал (1954 г.) аксиоматическую систему множеств без аксиомы выбора, аналогичную системе Σ . Оказалось, что в этой системе 1) невыводима гипотеза континуума (а значит, непротиворечиво ее отрицание); 2) невыводима гипотеза Суслина. Кроме того, он установил независимость аксиомы выбора (этот результат был получен также Мостовским). Один из ранних частичных результатов такого рода получен (1939 г.) весьма элементарными средствами В. Н. Молодшим. Им доказана независимость континуум-гипотезы от некоторой (весьма, впрочем, ограниченной) системы аксиом, характеризующей кардинальные числа.

Б. А. Трахтенброт показал (1950 г.), что формальных средств любой разумно определенной системы теории множеств недостаточно для решения вопроса об эквивалентности различных определений конечного множества (для всякой такой системы существует формально неразрешимое предложение, утверждающее эквивалентность двух определений конечного множества). Для доказательства Трахтенброт использовал (1952 г.) следующий факт, представляющий также самостоятельный интерес: множество формул, выводимых в узком исчислении предикатов, и множество формул этого исчисления, опровержимых в конечной области, являются рекурсивно неотделимыми.

Известно, что язык расширенного исчисления предикатов без теории типов обладает способностью приводить к противоречию в результате включения самых, казалось бы, естественных аксиом. На этом основаны антиномии так называемой наивной теории множеств. Д. А. Бочвар высказал и развил (1938—1945, 1967—1969 гг.) идею, что логическими, в собственном смысле этого слова, могут считаться лишь те аксиомы и правила вывода, из которых не следуют нетривиальные утверждения о существовании объектов, предикатов, а также связей экзистенциального характера между ними. Он выделил в расширенном исчислении предикатов непротиворечивую часть K_0 , играющую роль «абсолютной логической системы». П. С. Новиков (1947 г.) и Д. А. Бочвар получили ряд весьма общих результатов, относящихся к проблеме непротиворечивого расширения K_0 .

Оригинальная идея обоснования теории множеств принадлежит А. С. Есенину-Вольпину (1959—1961, 1969 гг.). В силу теоремы Геделя непротиворечивость формальной системы теории множеств не может быть доказана средствами этой системы. В качестве новых средств доказательства непротиворечивости Есенин-Вольпин предлагает использовать представления и методы, связанные с введенным им понятием «осуществимости», которое противопоставляется обычному понятию потенциальной осуществимости. Положительная часть его ультраинтуиционистской программы состоит в построении новой теории доказательства непротиворечивости теоретико-множественной системы Цермело — Френкеля.

Б. Я. Фалевич, ученик П. С. Новикова, изучал (1958 г.) формальные системы с правилом бесконечной индукции (правилом Карнапа), описывающие классический математический анализ. Он показал, что в случае применения правила Карнапа не более α раз, где α может быть довольно большим трансфинитом, теорема Геделя о неполноте остается в силе. Эти результаты являются усилением результатов американского логика Россера.

Ю. А. Гастев, ученик П. С. Новикова, доказал (1959, 1963 гг.), в подтверждение гипотезы П. С. Новикова, эквивалентность (взаимную погружаемость) формализаций анализа средствами узкого исчисления предикатов (с аксиоматикой континуума действительных чисел) и исчисления предикатов второй ступени с аксиомой свертывания (над арифметикой), что дает основание рассчитывать на возможность воспроизведения средствами этих формализаций упомянутых выше результатов

о неразрешимых проблемах анализа (теории множеств).

Из результатов по аксиоматической арифметике отметим прежде всего доказательство непротиворечивости арифметики, данное (1943 г.) П. С. Новиковым. Как и в случае теории множеств, к формальной системе арифметики применима теорема Геделя о невозможности доказательства непротиворечивости средствами системы. Однако в поисках новых средств здесь нет необходимости выходить за рамки обычных представлений. Наибольшую ценность представляют, естественно, экономные доказательства. Метод Новикова основан на рассмотрении особого логического исчисления со счетными операциями конъюнкции и дизъюнкции. Ему принадлежит важная теорема о том, что всякое предложение арифметики, получаемое из рекурсивного предиката навешиванием квантора существования и выводимое классически, выводимо также конструктивно. Эти исследования были продолжены (1967 г.) А. Г. Драгалиным. Пользуясь современными сильными методами, он значительно улучшил результаты П. С. Новикова и получил новые результаты.

А. В. Кузнецов доказал (1961 г.) следующую замечательную теорему: если к классическому логико-арифметическому исчислению добавить конструктивное правило Карнапа (формулировка правила принадлежит П. С. Новикову), то это исчисление становится полным. Результат Кузнецова обобщен (1967 г.) Н. В. Белякиным.

Интересные результаты, относящиеся к роли схемы математической индукции в различных системах формальной арифметики, получены (1967 г.) учеником П. С. Новикова Л. Л. Цинманом.



Д. А. Бочвар.

3

Теория моделей

Согласно одной из формулировок теоремы Геделя о полноте (1930 г.), всякая непротиворечивая система формул узкого исчисления предикатов имеет модель. Отсюда вытекает, что если каждая конечная подсистема некоторой счетной системы формул имеет модель, то этим же свойством обладает система в целом. А. И. Мальцев обобщил (1936 г.) последнее утверждение на случай системы формул произвольной мощности. Теорема Мальцева впоследствии передоказывалась (под названием теоремы о компактности арифметических классов; американский математик Генкин получил ее в качестве следствия теоремы Геделя, обобщенной на случай исчисления предикатов с несчетной

совокупностью символов для предикатов и переменных). Мальцев заметил (1941 г.), что с помощью этой теоремы можно доказать известные, а также ряд новых локальных теорем алгебры. Работы А. И. Мальцева — исторически первый пример нетривиального использования математической логики для получения математических теорем, формулируемых в нелогических терминах. Близкие по идее алгебраические применения логики были указаны А. Робинсоном. Ю. А. Шиханович обобщил (1956 г.) часть его результатов.

Теорема о компактности играет важную роль в современной теории моделей, созданной главным образом А. И. Мальцевым и Тарским. В этой теории модель определяется как самостоятельный объект, не связанный, вообще говоря, с интерпретацией логических формул. Каждая такая модель задается некоторым множеством и (конечной или бесконечной) системой предикатов над этим множеством. Частным случаем моделей являются алгебры (операции алгебры можно заменить представляющими их предикатами). Некоторый класс моделей называется аксиоматизируемым, если существует множество (замкнутых) формул узкого исчисления (аксиом), истинных на моделях этого класса и только на них. Мальцев установил ряд фактов, касающихся расширения моделей аксиоматизируемых классов, в том числе следующую теорему: всякая бесконечная модель аксиоматизируемого класса может быть расширена до модели сколь угодно большой мощности. В частности, не существует аксиоматизируемых классов, содержащих бесконечную модель и в то же время категоричных. Это обстоятельство вызвало интерес к понятию категоричности в данной мощности (введенному польским математиком Лосем). Одна из интересных проблем теории классов моделей заключается в установлении признаков, характеризующих аксиоматизируемые классы в теоретико-множественных терминах. Для частных случаев классов (например, определяемых универсальными формулами) были найдены удобные признаки такого рода. Общее решение проблемы дал (начиная с 1961 г.) А. Д. Тайманов. Условия аксиоматизируемости Тайманова имеют форму замкнутости класса: из «близости» какой-либо модели данного класса должно следовать, что она сама является моделью этого класса. С. Р. Когаловский придал (1965 г.) условиям Тайманова явную топологическую форму, позволившую получить все старые, а также некоторые новые условия аксиоматизируемости.

В работах (1956, 1957 гг.) А. И. Мальцева о гомоморфно замкнутых классах моделей и подпрямых произведениях моделей рассмотрен вопрос о связи между алгебраическими свойствами классов моделей и свойствами логических формул, описывающих эти классы. Аналогично А. Д. Тайманов исследовал (1959 г.) классы моделей, замкнутые относительно прямого произведения. В других работах (1957—1962 гг.) А. И. Мальцева изучаются свойства отдельных классов алгебр и моделей, которые могут быть выражены на языке теории категорий. В ряде случаев этот язык дает полную характеристику соответствующих классов. Исследования в этом направлении продолжались С. Р. Когаловским.

Участниками новосибирского семинара А. И. Мальцева «Алгебра и логика» (Б. А. Трахтенбротом, Д. А. Захаровым, М. А. Тайцлиным,

И. А. Лавровым, Е. А. Поляковым, Ю. Л. Ершовым, Ю. Ш. Гуревичем, Ж. А. Алмагамбетовым, Л. А. Бокутем и др.) выполнен обширный цикл исследований по проблемам разрешения элементарных теорий моделей (см. § 6). В сравнительно новой отрасли теории моделей — теории языков, допускающих бесконечно длинные формулы, — важные результаты получены (1968 г.) Г. В. Чудновским.

Перспективным направлением в теории моделей является теория классов моделей, аксиоматизируемых посредством языка исчисления предикатов второй степени. Известны лишь отдельные результаты, относящиеся к частным видам этого языка. Например, изучались так называемые проективные классы, в аксиомах которых не фигурируют (в предваренной форме) кванторы общности по предикатам. А. И. Мальцев рассмотрел понятие редукционных классов, обобщающих проективные. Одна из его работ (1962 г.) посвящена доказательству так называемой внутренней локальной теоремы, устанавливающей достаточные условия для того, чтобы класс формул второй степени описывал локальные свойства моделей (т. е. те их свойства, которые фигурируют в локальных теоремах алгебры).

4

Некоторые вопросы теории электрических систем

Одно из первых применений математической логики в теории контактных схем (1934 г.) принадлежит В. И. Шестакову. Пользуясь аналогией между операциями над контактными и логическими операциями исчислений высказываний, Шестаков разработал метод синтеза схем, не содержащих «мостиковых» соединений. Метод математической логики применялся затем к схемам более общего типа.

Задача синтеза — одна из главных задач теории схем. Она состоит в построении схем, функционирующих заданным образом, исходя из некоторого запаса средств. Типичным является случай реализации функций алгебры логики контактными схемами. Пусть $L(f)$ — число контактов в простейшей схеме, реализующей функцию f . Введем функцию $L(n) = \max L(f)$, где максимум берется по всем функциям алгебры логики от n аргументов. Шеннон показал, что при больших n функция $L(n)$ асимптотически заключена между $\frac{2^n}{n}$ и $\frac{2^{n+2}}{n}$. О. Б. Лупанов разработал (1955 г.) метод синтеза контактных схем, позволивший довести верхнюю оценку до нижней, и тем самым установил, что $L(n)$ асимптотически равна $\frac{2^n}{n}$. Лупанов получил (1955, 1956 гг.) аналогичные результаты и для контактно-вентильных схем, некоторых классов вентильных схем, релейно-контактных схем и т. п. Для других типов схем им (1956 г.), а также Р. Е. Кричевским (1959 г.), указаны весьма тонкие нижние асимптотические оценки функции Шеннона.

Иногда функция алгебры логики от n переменных допускает реализацию с гораздо меньшим, чем $\frac{2^n}{n}$, числом контактов. Б. А. Трахтенброт полностью решил (1955 г.) задачу синтеза для крайнего случая функций, реализуемых неповторными схемами (это понятие ввел А. В. Кузнецов), в которых число контактов равно числу существенных аргументов функции. Для некоторых типов функций важно нахождение нижней оценки числа контактов в реализующей схеме. Для случая реализации счетчика четности параллельно-последовательными схемами Б. А. Субботовская нашла (1961 г.) нижнюю оценку $Cn^{3/2}$ (которая расходится с указанной ранее (1956 г.) С. В. Яблонским верхней оценкой $\frac{9}{8}n^2$ минимального числа контактов). А. А. Марковым (1957, 1963 гг.), О. Б. Лупановым (1955, 1956 гг.) и Р. Е. Кричевским (1959 г.) эта задача решается для монотонных симметрических функций, реализуемых различными схемами.

А. Л. Тоом, А. А. Карацуба, Ю. Офман рассмотрели (1963—1968 гг.) интересные задачи, связанные с синтезом схем из функциональных элементов, реализующих умножение целых чисел в двоичной системе счисления. В задачах анализа и синтеза электрических схем оказалась весьма полезной теория матриц над булевой алгеброй (А. Г. Лунц, 1950, 1952 гг.). Близкие идеи разрабатывались также М. Л. Цетлиным (1960 г.), Г. Н. Поваровым (1960 г.) и А. В. Кузнецовым (1958 г.). Г. Н. Поваров предложил (1955 г.) эффективный метод синтеза схем, получивший название метода каскадов. Ряд задач синтеза (преимущественно в прикладном аспекте) решен (начиная с 1955 г.) М. А. Гавриловым.

О. Б. Лупанов рассматривал (1956 г.) так называемые схемы из функциональных элементов. Каждый элемент реализует определенную функцию алгебры логики, вся же схема реализует некоторую суперпозицию этих функций. Лупанов вводит аналог функции Шеннона и устанавливает для него асимптотические закономерности.

Ряд задач по алгебре логики был сформулирован (1950 г.) в лекциях П. С. Новикова. Одна из них состояла в нахождении условий, при которых конечная система функций алгебры логики была бы полной, т. е. любая функция алгебры логики выражалась бы через функции системы посредством суперпозиций. С. В. Яблонский (будучи аспирантом П. С. Новикова) полностью решил (1952, 1953 гг.) этот вопрос. Хотя выяснилось, что аналогичный результат был получен значительно раньше Постом, работа Яблонского принесла пользу, так как послужила толчком для дальнейших исследований в этой области.

А. В. Кузнецов обобщил (1956 г.) теорему Поста на случай k -значной логики ($k \geq 2$) и одновременно придал ей следующую форму: для функциональной полноты множества A функций k -значной логики необходимо и достаточно, чтобы A не было включено ни в какое из предполных множеств функций, замкнутых относительно суперпозиций. Предполным называется всякое множество B функций, не являющееся функционально полным, но такое, что добавление к B хотя бы одной функции,

не являющейся суперпозицией функций из B , приводит к полному множеству. С. В. Яблонский нашел (1953 г.) все предполные замкнутые множества для случаев $k = 3$ (их оказалось 18). При исследовании задачи распознавания полноты конечных множеств функций k -значной логики были получены оценки для числа предполных классов при больших k (А. В. Кузнецов, 1956 г.; С. В. Яблонский). Общая постановка вопросов функциональной полноты, в основе которой лежит перенесение понятий полного и предполного множеств на случай (1956 г.) подмножеств произвольных «пространств» с операцией замыкания, принадлежит А. В. Кузнецову. Примеры операций замыкания для множеств функций k -значной логики рассматривались А. В. Кузнецовым (1956 г.),



О. Б. Лупанов.

Г. Н. Поваровым (начиная с 1956 г.), С. В. Яблонским (1958, 1959 гг.). С. В. Яблонский (1957 г.) выделил и исследовал важное с точки зрения задачи синтеза семейство так называемых инвариантных классов функций (двузначной) алгебры логики. Этому семейству принадлежат все классы, возникающие в практике синтеза схем (в частности, класс линейных, класс монотонных, класс симметрических функций). В. К. Коробков нашел (1962 г.) следующую нетривиальную оценку для числа $\psi(n)$ монотонных функций алгебры логики, зависящих не более чем от n переменных $\log_2 \psi(n) \leq 5 \binom{n}{\alpha}$, где $\alpha = \frac{n}{2}$. (Вопрос о нахождении точного выражения для $\psi(n)$ представляет собой известную проблему Дедекинда.)

Для приложений очень важны упрощение и минимизация дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ). Этой задачей занимались С. В. Яблонский и его ученики. Яблонский приспособил (1959 г.) для изучения ДНФ понятие отделимости множеств, заимствованное из дескриптивной теории множеств. Используя это понятие, Ю. И. Журавлев решил (1960—1962 гг.) ряд вопросов, связанных с минимизацией ДНФ. Представляют интерес соображения Журавлева об упрощении ДНФ, высказанные им в терминах топологии, заданной на множестве вершин n -мерного единичного куба. В работе (1956 г.) С. В. Яблонского и И. А. Чегис по теории тестов для электрических схем (их минимизация тесно связана с минимизацией ДНФ) применяется геометрический метод так называемого решета, аналогичный известной операции решета в дескриптивной теории множеств. Новые удобные алгоритмы для упрощения и минимизации ДНФ построены (1958 г.) Е. К. Войшвилло.

А. А. Марков рассмотрел (1957, 1963 гг.) следующий вопрос. Пусть заданы m функций алгебры логики $\Phi_1, \dots, \Phi_m$. Требуется установить, как следует представить эти функции посредством дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, чтобы число различных отрицаемых подформул в



Ю. И. Журавлев.

системе представлений всех функций было наименьшим (при этом разные вхождения одной и той же формулы считаются один раз). Это число называется инверсионной сложностью системы функций $\Phi_1, \dots, \Phi_m$. Маркову удалось найти формулу для его вычисления.

5

Теория рекурсивных функций

Исследования по теории рекурсивных функций в СССР проводятся с 1945 г. В Москве интерес к этому направлению возник в связи с аналогией между классификацией подмножеств натурального ряда с точки зрения их рекурсивных свойств и дескриптивной

теорией множеств. Внимание исследователей к этой аналогии привлекли А. Н. Колмогоров (доклад на заседании Московского математического общества) и П. С. Новиков, под руководством которого в 1946, 1947 гг. работал семинар по проективной классификации Клини и связанным с ней вопросам. Изучение отделимости рекурсивно-проективных множеств стимулировало, в частности, решение П. С. Новиковым трудной проблемы об отделимости проективных множеств высоких классов (см. § 2). Для арифметических множеств оказалось также возможным построить (подобно тому как это было сделано в дескриптивной теории множеств) теорию униформизации (П. С. Новиков, В. А. Успенский, 1957, 1960 гг.). А. В. Кузнецов разрабатывал (1956 г.) классификацию арифметических множеств, в которой роль аналога Δ -множеств выполняют не рекурсивно-перечислимые множества (как у Клини), а некоторый другой класс. Он получил серию интересных результатов по теории конструктивных трансфинитов. Ряд аналогов дескриптивных методов и иерархий для предикатов установлен (1955, 1956 гг.) В. И. Амстиславским. Ю. Л. Ершов предложил (1968 г.) классификацию рекурсивных множеств и предикатов, значительно более тонкую, чем иерархия Клини — Мостовского.

Рекурсивные аналоги теоретико-множественных операций изучены (1967 г.) Н. М. Ермолаевой.

А. Н. Колмогоров указал на возможную связь дедуктивной неполноты некоторых формальных систем (в силу теоремы Геделя всякая достаточно сильная формальная система неполна) с понятием рекурсивной неотделимости множеств (исследовавшимися также Б. А. Трахтенбротом, 1952 г.). В. А. Успенский получил (1953 г.) результаты, подтверждающие эту мысль. Пусть K — множество геделевых номеров формул, выводимых в данной формальной системе, L — множество номеров формул, отрицания которых выводимы; пусть рассматриваемая система такова,

что из выводимости в ней A следует выводимость $\neg \neg A$, а из выводимости $\neg \neg \neg A$ следует выводимость $\neg A$. Тогда свойство системы, состоящее в том, что она не имеет непротиворечивого расширения, т. е. свойство непополнимости, эквивалентно рекурсивной неотделимости K и L . Успенский показал (1953 г.), что это утверждение остается в силе при замене непополнимости и неотделимости более сильными свойствами эффективной непополнимости и неотделимости. А. А. Мучник получил (1956, 1965 гг.) ряд дальнейших результатов, относящихся к этим понятиям (в частности, он доказал, что они существенно уже понятий простой непополнимости и неотделимости).

В 1953—1955 гг. в МГУ работал семинар по рекурсивной арифметике, которым руководили А. Н. Колмогоров и В. А. Успенский. Его участники имели возможность получить на нем кроме общих идей хорошую подготовку по теории рекурсивных функций. В качестве примера конкретных результатов можно назвать построение бесконечного числа попарно рекурсивно неизоморфных рекурсивно-перечислимых, но не рекурсивных множеств. (Построение основано на введении некоторого антисимметричного отношения, характеризующего «эффективную густоту» множеств; впоследствии это отношение подробно исследовала Е. А. Павлова, 1960, 1961 гг.)

После опубликования (1936 г.) тезиса Черча содержательное понятие вычислимости отождествляется с вычислимостью посредством рекурсивных функций. Известны и другие математические процедуры, приводящие к этому же понятию вычислимости (вычислимость на машинах Тьюринга, исчисление λ -конверсии Черча и др.). А. А. Марков ввел (1951 г.) новую вычислительную процедуру — нормальные алгоритмы. Эквивалентность их понятию частично рекурсивной функции установил (1953 г.) В. К. Детловс. От других вариантов вычислимости нормальные алгоритмы отличаются тем, что более непосредственно передают смысл, который математик обычно вкладывает в термин «алгоритм». Нормальные алгоритмы обладают практическими достоинствами, в частности приспособленностью к алгоритмическим рассмотрениям в алгебре. Некоторые общими вопросами теории нормальных алгоритмов занимались Н. М. Нагорный (1958 г.), В. С. Чернявский (1958 г.), Г. С. Цейтин (1964 г.). Одним из самых интересных результатов теории рекурсивных функций, формулируемых на языке теории нормальных алгоритмов, является предложенный (1963 г.) А. А. Марковым метод доказательства невозможности некоторых алгоритмов, основанный на оценке снизу длин изображений нормальных алгоритмов. В частности, с помощью этого метода им была установлена алгоритмическая неразрешимость следующей проблемы: по каждой булевой функции (заданной последовательностью ее значений для различных наборов знаний аргументов) определить, существует ли для нее вычисляющий ее нормальный алгоритм, имеющий длину изображения меньше $\frac{2^n}{3}$, где n — число аргументов функции.

Другое уточнение понятия алгоритма, в основе которого лежит описание не определенного класса алгоритмов, а вообще алгоритмического процесса, принадлежит (1953, 1968 гг.) А. Н. Колмогорову.

В. А. Успенский предложил (1956, 1957 гг.) независимо от уточнения понятия алгоритма понятие его программы. Каждый способ программирования можно считать некоторой нумерацией системы вычислимых (т. е. частично рекурсивных) функций. Определив так называемые потенциально вычислимые и вполне накрывающие нумерации, Успенский приводит (1955 г.) соображения в пользу того, что всякий способ программирования задается нумерацией именно с этими двумя свойствами.

А. В. Кузнецов (1958 г.), Ю. Т. Медведев (1956 г.), Б. А. Трахтенброт (1956, 1957 гг.), В. А. Успенский (1956, 1958 гг.) разрабатывали теорию вычислимых операторов (или вычислимых операций; их области определения и значений состоят из арифметических функций), изучали проблему представления таких операторов, их роль в теории «вычислимого континуума», связь между собой различных определений.

Почти в каждой задаче теории рекурсивных функций возникает вопрос о существовании той или иной алгоритмической процедуры. После арифметизации он может быть сформулирован как вопрос о существовании общерекурсивной функции с данным свойством. Оказалось, что все такие задачи на построение алгоритма можно рассматривать с единой точки зрения на основе понятия массовой проблемы (Ю. Т. Медведев, 1955 г.). Всякая такая проблема определяется классом ее решений — тех арифметических функций (т. е. последовательностей натуральных чисел), которые удовлетворяют поставленным условиям. Если среди них найдется общерекурсивная функция, то данная проблема алгоритмически разрешима. Если существует вычислимая операция, переводящая всякое решение проблемы A в некоторое решение проблемы B , то, по определению, B алгоритмически сводится к A . Отношение сводимости разбивает класс всех проблем на классы эквивалентности — «степени трудности проблем». Степени трудности образуют частично упорядоченное множество, которое оказывается имплекативной структурой. Именно в силу этого обстоятельства массовые проблемы определяют модель конструктивной логики.

Наиболее простыми исходными классами массовых проблем являются классы проблем разрешимости и проблем перечислимости множеств. А. А. Мучник получил (1965 г.) тонкие результаты, раскрывающие смысл изучения массовых проблем другого рода — проблем продолжения частично рекурсивных функций и проблем отделимости множеств. К этому направлению примыкают исследования (1969 г.) В. А. Душского.

В 1956 г. А. А. Мучнику удалось получить положительный ответ на следующий вопрос, остававшийся нерешенным в теории рекурсивных функций с 1944 г. и известный под названием проблемы Поста: существует ли нерекурсивное рекурсивно-перечислимое множество, к проблеме разрешимости которого не сводится алгоритмически проблема разрешимости универсального рекурсивно-перечислимого множества? Независимо от Мучника и почти одновременно с ним этот результат получил Фридберг (США). Решение этой проблемы было важным с точки зрения доказательства неразрешимости конкретных проблем разрешимости для рекурсивно-перечислимых множеств, так как от него зависело, всегда ли можно получить такое доказательство, алгоритмически сводя к

данной проблеме решение проблемы разрешимости универсального рекурсивно-перечислимого множества. В связи с тем что ответ на последний вопрос получается отрицательный, интересен результат Г. С. Цейтина (1956 г.), установившего, что для каждого рекурсивно-перечислимого множества можно указать ассоциативную систему с алгоритмически эквивалентной проблемой тождества слов. А. А. Фридман получил (1960, 1962 гг.) этот результат для конечноопределенных групп.

Л. Л. Цинман (1966 г.), а также И. А. Лавров и Е. А. Поляков (с 1963 г.) исследовали проблему минимизации порождающих базисов для различных классов рекурсивных функций.

6

Алгоритмические вопросы алгебры

Уточненное понятие алгоритма на основе теории рекурсивных функций позволило доказывать несуществование алгоритмов. Много отрицательных результатов такого рода было получено в алгебре, где алгоритмические проблемы возникают чаще всего при рассмотрении конечноопределенных (т. е. заданных конечным числом определяющих соотношений между фиксированными образующими) алгебраических систем. Первым результатом было построение (1947 г.) независимо друг от друга А. А. Марковым и Постом ассоциативной системы (т. е. конечноопределенной полугруппы без правила сокращения) с неразрешимой проблемой тождества. Проблема тождества состоит в построении алгоритма, выясняющего для каждой пары слов — элементов данной ассоциативной системы, равны ли они в силу определяющих соотношений. Факт существования таких примеров имеет фундаментальное значение, поскольку доказательства неразрешимости алгоритмических проблем алгебры основаны, как правило, на алгоритмическом сведении к этим проблемам проблемы тождества произвольной ассоциативной системы. Марков доказал (1947 г.) существование ассоциативной системы, для которой невозможен алгоритм распознавания односторонней (например, правой) делимости двух элементов. Он нашел (1951 г.) весьма общее условие, при выполнении которого невозможен алгоритм, распознающий по заданной конечноопределенной ассоциативной системе, обладает ли она заданным свойством α , инвариантным относительно изоморфизма. Условие состоит в том, чтобы существовала как система со свойством α , так и система, не включаемая ни в какую систему со свойством α . Этот результат был несколько усилен (1956, 1958 гг.) учеником А. А. Маркова Г. С. Цейтиным. Марков доказал (1951 г.) неразрешимость проблемы представимости целочисленных матриц, построив систему матриц шестого порядка, для которой невозможен алгоритм, выясняющий по каждой матрице, представима ли она в виде произведения матриц этой системы.

Г. С. Цейтин построил (1956, 1958 гг.) пример ассоциативной системы с неразрешимой проблемой тождества и всего семью определяющими соотношениями. В примере Цейтина используется результат П. С. Новикова (1952 г.) о существовании группы с неразрешимой

проблемой тождества, в свою очередь он может быть применен для упрощения примера такой группы. Аналогично удастся упростить систему матриц с неразрешимой проблемой представимости. Исследования в этом направлении продолжал (1966 г.) Г. С. Маканин. Ю. В. Матиясевичу, ученику С. Ю. Маслова, удалось построить (1967 г.) пример полугруппы с неразрешимой проблемой тождества, задаваемого всего тремя определяющими соотношениями. Этот пример позволяет еще более упростить пример группы с неразрешимой проблемой тождества (доведя число определяющих соотношений до 14).

П. С. Новиков установил (1952 г.) существование конечноопределенной группы с неразрешимой проблемой тождества слов. Помимо своего значения как источника новых фактов, этот результат важен еще и тем, что им был положен конец поискам разрешающего алгоритма, которые тщетно велись алгебраистами в течение примерно 40 лет (в то же время выявилась ценность результатов о существовании алгоритмов для частных классов групп). Всякая конечноопределенная группа является фундаментальной группой некоторого полиэдра. Отсюда получается следующий топологический вариант результата Новикова: существует такой полиэдр, что невозможен алгоритм, распознающий по любой паре путей, проходящих через фиксированную точку полиэдра, гомотопны ли они друг другу. Новиков доказал также алгоритмическую неразрешимость проблемы распознавания изоморфизма групп.

С 1954 по 1957 г. работал семинар П. С. Новикова по алгоритмическим вопросам алгебры, участниками которого был установлен ряд новых фактов, касающихся алгоритмической неразрешимости. Особенно ценны результаты ученика П. С. Новикова С. И. Адяна. Опираясь на основной результат Новикова, он доказал (с 1955 г.) алгоритмическую неразрешимость проблемы распознавания единичности групп (при этом ему пришлось развить новую технику). Такого рода теоремы были получены им применительно к другим свойствам групп: конечности, периодичности, коммутативности и др. Позднее Адян доказал (1960 г.) для групп аналог упоминавшейся теоремы Маркова об алгоритмически неразрешимых проблемах распознавания инвариантных свойств ассоциативных систем.

Фундаментальным результатом является установление (1958 г.) А. А. Марковым неразрешимости известной алгоритмической проблемы гомеоморфизма полиэдров. При этом Марков использовал доказанную С. И. Адяном алгоритмическую неразрешимость проблемы распознавания единичности групп. В 1962 г. он обобщил свой результат и упомянутые выше теоремы об инвариантных свойствах ассоциативных систем и групп на основе введенного им понятия вычислимого инварианта.

С. И. Адяну принадлежит также доказательство (1955 г.) неразрешимости проблемы правой (левой) делимости для полугрупп с сокращением и общей проблемы существования обратных элементов групп.

Проблемой вхождения для групп занималась (1958, 1959 гг.) К. А. Михайлова, ученица П. С. Новикова. Один из ее результатов был использован при доказательстве алгоритмической неразрешимости проблемы представимости целочисленных матриц порядка $n \geq 4$. Ре-

зультаты, относящиеся к проблеме тождества конечноопределенных групп, получены также А. А. Фридманом (1962 г.), установившим иерархию степеней неразрешимости проблемы тождества, и Г. С. Маканиным (1966 г.), получившим разрешающие алгоритмы для ряда важных классов групп. А. В. Кузнецов изучал (1956 г.) с алгоритмической точки зрения конечноопределенные алгоритмы. Им установлены изящные критерии разрешимости проблемы тождества таких алгебр.

Возможны различные способы конструктивизации понятий группы, кольца и других алгебр. Естественно назвать счетную алгебру A с некоторым числом операций конструктивизируемой, или вычислимой, если ее элементы можно занумеровать таким образом, чтобы для каждой операции существовала частично рекурсивная функция, вычисляющая по каждому набору номеров элементов некоторый номер результата применения к ним этой операции (один и тот же элемент может, вообще говоря, иметь много, даже бесконечное число номеров). Это определение предложил (1964 г.) А. И. Мальцев. Им построены основы теории вычислимых алгебр.

А. И. Мальцевым было положено начало (1960 г.) исследованиям алгоритмических вопросов, относящихся к элементарным теориям классов алгебр в СССР. Типичным в этой области является следующий результат (1953 г.) Тарского (США): не существует алгоритма, который по каждому утверждению, записанному в терминах групповой операции с использованием логического языка узкого исчисления предикатов с равенством, давал бы ответ на вопрос, истинно или нет это утверждение для любой группы. Этот результат можно сформулировать короче: элементарная теория класса всех групп алгоритмически неразрешима. А. И. Мальцевым установлена (1961 г.) алгоритмическая неразрешимость элементарной теории класса всех конечных групп, а также некоторых других классов групп, полугрупп и колец. М. А. Тайцлин получил (1962 г.) аналогичные результаты для структур и коммутативных полугрупп с сокращением. Интересно, что, как доказала Шмелева (Польша), элементарная теория класса всех коммутативных групп является уже разрешимой. Ряд результатов о неразрешимых (и разрешимых) элементарных теориях получен Ю. Ш. Гуревичем, участниками семинара А. И. Мальцева М. И. Каргаполовым (1962, 1963 гг.), И. А. Лавровым (1962, 1963 гг.), Ю. Л. Ершовым (1962—1965 гг.). Эти результаты и характеристика исследований по элементарным теориям изложены в обзорной статье Ю. Л. Ершова, И. А. Лаврова, А. Д. Тайманова и М. А. Тайцлина «Элементарные теории» (1965 г.).



Ю. Л. Ершов.

М. И. Белецкий, ученик А. А. Маркова, опираясь на исследования А. В. Гладкого, получил важные результаты, относящиеся к алгоритмическим проблемам, возникающим в связи с описанными им классами так называемых бесконтекстных и доминационных грамматик, и к соотношениям между различными классами грамматик; в частности, им введены различные понятия эквивалентности грамматик, существенно различающиеся по силе.

К рассматриваемой тематике примыкают и исследования в области, пограничной между логикой и теорией автоматов. Работы Ю. Т. Медведева (1956 г.) и В. Г. Боднарчука (1963 г.) посвящены развитию и модификациям введенного Клини понятия представления событий конечными автоматами. Особенно подробно изучен один из таких языков для описания событий, представляемых конечными автоматами, в монографии В. М. Глушкова «Синтез цифровых автоматов» (1962 г.), удостоенной Ленинской премии³.

7

Конструктивное направление в математике

Преобладающей точкой зрения на построение основ математики является та, в которой исходят из теории множеств Кантора (см., например, монографию «Элементы математики» Н. Бурбаки). Главные образования теории — актуально-бесконечные множества — мыслятся в виде совокупности одновременно существующих предметов. В отличие от конечных совокупностей такие множества не имеют прообразов в реальном мире; поэтому высказывались сомнения в законности их рассмотрения. Обоснованием математики актуально-бесконечного является, в конечном счете, удовлетворительное обслуживание ею естествознания. (Бесконечные множества фигурируют в ней в качестве идеальных элементов, однозначность оперирования которыми может быть обеспечена аксиоматизацией теории множеств.) Теория рекурсивных функций открыла возможность построения математики без привлечения понятия актуальной бесконечности. Попытки такого построения и составляют так называемое конструктивное направление в математике.

Под действительным числом в конструктивном смысле можно, например, понимать всякую вычислимую последовательность десятичных знаков (Тьюринг). В этом случае конструктивное число представляется некоторым «конструктивным объектом» — записью программы (алгоритма) для вычисления соответствующей рекурсивной функции или, еще лучше, номером этой записи в определенной нумерации. Номерами некоторых вычислимых функций представляются и другие объекты конструктивной математики, например конструктивные функции.

³ Настоящий том уже печатался, когда стало известно о замечательном результате Ю. В. Матиясевича: им доказано совпадение понятий рекурсивно-перечислимого и диофантова множеств и тем самым — алгоритмическая неразрешимость знаменитой 10-й проблемы Гильберта. Интересно отметить, что эта проблема, ожидавшая решения почти 70 лет, одновременно с Матиясевичем была решена еще двумя молодыми математиками — Г. В. Чудновским и Н. К. Косовским. (Прим. автора.)

Обычный метод построения математики изящнее и проще конструктивного; достоинство последнего — большая «осязаемость» объектов, которыми он оперирует.

Отличительные особенности конструктивного направления в СССР, основоположником которого является А. А. Марков, — большая последовательность в проведении программы исключения из математики актуальной бесконечности и неконструктивных приемов рассуждения (к ним относятся, например, так называемые чистые теоремы существования и большинство случаев применения закона исключенного третьего) и наличие сильной группы математиков, занимающихся разработкой всех сторон этой программы, что позволяет, в частности, говорить о советской конструктивной школе.

На основании анализа средств конструктивного доказательства А. А. Марков пришел к выводу, что для получения конструктивно-содержательных математических результатов необходимо постулировать следующий принцип («ленинградский принцип»): если имеется алгоритм, выясняющий для каждого натурального числа n , обладает ли n свойством S , и если опровергнуто предположение о несуществовании натурального числа со свойством S , то существует натуральное число со свойством S . (Это число находится методом «конструктивного подбора», состоящим в последовательном применении данного алгоритма к натуральным числам, начиная с нуля.)

Одной из математических дисциплин, допускающих конструктивную интерпретацию и наиболее исследованных с этой точки зрения, является анализ. Основные понятия конструктивного анализа — понятие конструктивного действительного числа и понятие конструктивной функции действительной переменной. В качестве первого конструктивисты используют понятие числа, совпадающее в существенных чертах с тем, которое ввел Тьюринг. В качестве второго принимается понятие функции, введенное А. А. Марковым. Оно положило начало интересной проблематике, состоящей в выяснении свойств таких функций. Г. С. Цейтин доказал (1964 г.), что всякая конструктивная функция непрерывна во всех точках, где она определена. Вместе с тем примеры, построенные (1962 г.) И. Д. Заславским, показывают, что конструктивная функция, определенная во всех точках отрезка $[0, 1]$, может не быть ограниченной на этом отрезке, что, будучи ограниченной, такая функция может не иметь верхней границы или иметь ее, но не достигать, что, будучи ограниченной, она не может не быть равномерно непрерывной ни на каком интервале. И. Д. Заславский и Г. С. Цейтин доказали (1962 г.) также, что для конструктивного континуума неверна лемма Бореля о покрытии отрезка интервалами. Таким образом, конструктивный анализ во многих отношениях непохож на обычный.

Н. А. Шанину принадлежат (1961 г.) конструктивные определения ряда других понятий анализа: измеримого множества, меры Лебега, функции, суммируемой с данной степенью, абсолютно-непрерывной функции. Функции, о которых здесь идет речь, не являются уже функциями в смысле Дирихле, т. е. отображениями, что не мешает построению содержательной теории таких функций и образуемых ими функциональ-

ных пространств. (Это построение было выполнено Н. А. Шаниным во всех деталях.)

Исследования в области конструктивной математики захватывают все более широкие области. Ученик А. А. Маркова Фан Динь Зиеу развил (1965—1968 гг.) теорию конструктивных топологических пространств. Интересные результаты по конструктивной теории функций получены (1963, 1964 гг.) В. П. Оревковым, показавшим, в частности, что для конструктивных отображений неверна теорема Брауэра о неподвижной точке. Конструктивные отображения множеств в метрических пространствах изучались (1967 г.) В. А. Шурыгиным. Б. А. Кушнер развил теорию интеграла Римана для конструктивных функций. Он построил (1965 г.) интересный пример неограниченной аналитической конструктивной функции, продолжив тем самым перечень расхождений между классическим и конструктивным направлениями в анализе. Типичное для конструктивной математики расщепление понятий классического анализа проявилось и в результате А. О. Слисенко, построившего (1964, 1967 гг.), исходя из несколько другого, нежели в упомянутых выше работах, но также вполне естественного определения конструктивной функции, пример неразрывного, но не непрерывного конструктивного оператора в метрическом пространстве. Близкие результаты были получены (1965 г.) и Б. А. Кушнером. В последней работе (1969 г.) И. Д. Заславского предпринята попытка аксиоматического построения теории конструктивных объектов.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

Введение

В дореволюционной России историко-математические исследования носили спорадический характер. Первые сведения по истории математики на русском языке (если не считать отдельных замечаний в геометрической рукописи, составленной по различным зарубежным книгам Иваном Елизарьевым в 1625 г.) содержатся в кратком авторском предисловии к обработке «Начал» Евклида А. Таке (1654 г.), опубликованной в переводе И. Сатарова в Петербурге в 1739 г. под названием «Евклидовы элементы». Историко-математические сведения иногда сообщались в речах и статьях русских ученых XVIII в., а в «Академических известиях» в 1789—1791 гг. печаталась «История о мафиматике», перевод известной «Истории математики» Ж. Э. Монтьюкла (1758 г.). Этот перевод, впрочем, не был закончен (доведен лишь до начала XVII в.).

В начале XIX в. появились работы С. Е. Гурьева (1815 г.) и П. А. Рахманова (1812 г.) по истории находившихся тогда в центре внимания математиков идей обоснования исчисления бесконечно малых. Много ценных исторических справок содержится в «Лексиконе чистой и прикладной математики» (1839 г.) В. Я. Буняковского. Было издано несколько старинных математических рукописей. В 1928 г. Евгений Болховитинов опубликовал арифметико-хронологический трактат Кирика Новгородца, написанный в 1136 г. Этот памятник переиздал с комментариями П. В. Хавский в 1847 г. В 1853 г. была издана «Книга сошного письма 7137 года», а в 1789 г. — «Счетная мудрость» (собрание автографов нескольких арифметических и землемерных рукописей XVII в.). Библиографические и биографические сведения по истории математики приведены в сочинениях П. П. Пекарского о науке и литературе петровского времени (1862 г.) и по истории Академии наук (1870—1873 гг.), в «Истории Российской академии» (1874—1888 гг.) М. И. Сухомлинова, «Истории Московского университета» (1855 г.) С. П. Шевырева и других аналогичных сочинениях.

В последней четверти XIX — начале XX в. появились специальные исследования по истории математики. Вышла книга М. Е. Ващенко-



В. В. Бобынин.

Захарченко «История математики. Исторический очерк развития геометрии в древности и в средние века» (1883 г.) и его же комментированный перевод «Начал» Евклида (1880 г.). И. Ю. Тимченко опубликовал чрезвычайно богатые фактическим материалом «Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании теории аналитических функций» (1892—1898 гг., изложение вопроса доведено до начала XIX в.), а также перевод «Истории элементарной математики» Ф. Кеджори со своими обширными и весьма ценными дополнениями (1910 г.; 2-е изд. — 1917 г.). Общий очерк истории математики был опубликован В. П. Шереметевским в переработанной им книге Г. Лоренца «Элементы высшей математики» (1-е изд., 1898 г.). Этот очерк неоднократно переиздавался впоследствии.

Большим событием в истории математики было издание геометрических сочинений Н. И. Лобачевского (в двух томах, 1883—1886 гг.) и сочинений П. Л. Чебышева (в двух томах, 1899—1907 гг.) под редакцией А. А. Маркова и Н. Я. Сони́на. Было опубликовано несколько работ А. В. Васильева о жизни и творчестве Лобачевского. А. В. Васильев первый обратил внимание на выдающиеся заслуги знаменитого геометра в алгебре и анализе.

Значительным явлением в историко-научной литературе был перевод «Математических начал натуральной философии» И. Ньютона (1915 г.), выполненный А. Н. Крыловым и снабженный им чрезвычайно обстоятельными комментариями, облегчающими современному читателю изучение этого классического труда. Н. М. Бубнов подготовил издание «Математических трудов Герберта» («Opera mathematica Gerberti», 1899 г.). Ему принадлежат также известные монографии «Подлинное сочинение Герберта об абакe» (1908 г.) и «Арифметическая самостоятельность европейской культуры» (1908 г.). Д. Д. Галанин опубликовал книгу «Леонтий Филиппович Магницкий и его арифметика» (1914 г.), работал также над вопросами истории методики арифметики.

Истории математики XVII—XIX вв. посвящены статьи С. А. Богомолова, А. В. Васильева, Д. А. Граве, Д. Ф. Егорова, В. Ф. Кагана, А. М. Ляпунова, Б. К. Млодзеевского, Д. М. Синцова, Н. Я. Сони́на, И. Ю. Тимченко, С. О. Шатуновского. В. Ф. Каган опубликовал большой труд по истории оснований геометрии (с древнейших времен до начала XX в.) «Основания геометрии. Ч. II. Исторический очерк развития учения об обоснованиях геометрии» (1907 г.), Д. М. Синцов — обстоятельное исследование, посвященное истории физико-математического факультета Харьковского университета (1908 г.). Отдельные исторические замечания содержатся в работах многих математиков петербургской

математической школы начиная с П. Л. Чебышева, который любил совершать экскурсии в область истории вопроса и в лекциях. К началу XX в. относится издание переводов ряда классических работ зарубежных математиков Бельтрами, Дедекинда, Кантора, Лежен-Дирихле и др.

В 1902 г., в связи со 100-летием Дерптского университета, Г. В. Левицкий издал биографический словарь профессоров и преподавателей университета, содержащий ценные сведения о дерптских математиках. Подобные словари были изданы также к юбилейным датам Московского, Петербургского, Казанского, Новороссийского, Киевского, Харьковского университетов, Института инженеров путей сообщения, Горного, Петербургского технологического и других институтов. Во всех этих изданиях можно найти много сведений о математиках, в том числе и библиографические справки.

Вместе с тем единственным ученым, для которого история математики являлась основной специальностью, в дореволюционное время был В. В. Бобынин. Интересы Бобынина были весьма разнообразны. Его магистерская диссертация, например, посвящена опубликованному в 1877 г. папирусу Ринда («Математика у древних египтян», 1882 г.). В четвертом томе «Лекций по истории математики» М. Кантора (1908 г.), написанном группой историков математики, В. В. Бобынину принадлежит глава об элементарной геометрии в XVIII в. Но главная его заслуга — основополагающие труды по истории русской математики. «Русская физико-математическая библиография» Бобынина (1885—1900 гг.) содержит полный указатель книг, вышедших по физико-математическим наукам в России с начала книгопечатания по 1816 г. В «Очерках истории развития физико-математических знаний в России» (вып. 1, 2, 1886, 1893 гг.) он дал подробный анализ рукописной литературы по практической арифметике и геометрии XVII в. В статьях «Эпоха государственного содействия развитию научных знаний» (1888—1892 гг.), являющихся продолжением «Очерков», исследуется математическая культура петровского времени. Ему принадлежит более 200 работ по истории математики. Бобынин издавал (1885—1904 гг.) журнал «Физико-математические науки в их прошлом и настоящем», публиковал свои статьи в других русских и иностранных журналах, энциклопедических и биографических словарях. Он первый читал курс истории математики в Московском университете.



И. Ю. Тимченко.

Исследование истории математики в СССР до 1945 г.

Широкий размах и систематический характер историко-математические исследования в нашей стране приобрели только после Великой Октябрьской социалистической революции. В первые годы Советской власти было издано несколько ценных сочинений по истории математики: «Целое число. Исторический очерк» А. В. Васильева (1919 г., 2-е изд. — 1922 г.), его же первый обзор истории математики в России за 1725—1863 гг. «Математика» (1921 г.), в котором дан весьма содержательный анализ творчества крупнейших отечественных ученых того времени, а также анализ развития математической культуры в целом; «Математика и ее значение для человечества» (1923 г.) В. А. Стеклова; популярные издания «История математики» (1920 г.), «Очерки по истории математики» (1923 г.), «Сборник исторических задач по элементарной математике» (1932 г.) Г. Н. Попова, «Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики» (1922 г.) В. Беллюстина, «Как люди научились считать» (1923 г.) М. Н. Марчевского.

В 1920 г. по предложению А. В. Васильева в Педагогическом институте при Петроградском университете был создан математический кружок. В 1921 г. при участии В. А. Стеклова, А. А. Фридмана и других этот кружок был реорганизован в Петроградское математическое общество, председателями которого были А. В. Васильев, затем Н. М. Гюнтер. Основной своей целью это общество поставило содействие научному общению всех лиц, интересующихся математикой и математическим образованием. Значительное внимание кружок, а затем общество уделяли историко-математическим исследованиям. В 1924 г. в Ленинграде было основано общество ревнителей математического образования, председателем которого был избран С. А. Богомолов. На заседаниях этого общества слушались доклады также на историко-математические темы.

Исследования по истории математики появились и в других университетах. Исторической тематикой насыщен круг работ киевских математиков Д. А. Граве и Н. М. Крылова. В статьях и мемуарах Н. М. Крылова, опубликованных в «Записках математического кабинета Таврического университета» (1919—1922 гг.), содержится много историко-математических справок и экскурсов. В статье «О роли минимального принципа в современной математике», в частности, излагается история возникновения вариационного исчисления. В Харькове историей математики занимались Д. М. Сянцов, М. Н. Марчевский, А. И. Сырокомский, впоследствии — А. К. Сушкевич. А. И. Сырокомский читал в Харьковском университете курс истории механики, а А. К. Сушкевич — курс истории математики. В Казани историю математики, в частности труды С. В. Ковалевской и Ф. Клейна, изучал Н. Н. Парфентьев, в Одессе — И. Ю. Тимченко и Д. А. Крыжановский. В Ростове-на-Дону продолжал свои исследования в области истории математики Д. Д. Мордухай-Болтовской. Он организовал семинар по истории математики, на котором только с 1921 по 1924 г. были прочитаны доклады «Происхожде-

ние проблемы решения уравнений в радикалах», «История нумерации», «Некоторые теоремы геометрии Лобачевского», «Интегральное исчисление XVIII в.», «История алгебраической символики» и др. На протяжении 1927 и 1928 гг. Д. Д. Мордухай-Болтовской опубликовал по истории математики целый цикл работ.

Во Львове в 20-е годы В. О. Левицкий читал курс истории математики в частном украинском университете. Н. А. Чайковский составил украинскую математическую библиографию, охватывающую работы 1894—1929 гг. (издана в 1931 г. в Одессе). Библиография сопровождается статьей, в которой проведен детальный историко-статистический анализ развития математики на Украине. Ряд работ историко-математического содержания принадлежит М. О. Зарицкому.

К концу 20-х годов относится начало деятельности С. А. Яновской и М. Я. Выгодского, основателей советской историко-математической школы. Яновская и Выгодский стремились применять к изучению и преподаванию истории математики марксистско-ленинскую методологию. В 1926 г. вышла работа М. Я. Выгодского «Платон как математик», в которой дана резко критическая оценка влияния Платона и его школы на математику, в 1929 г. — его статья «Понятие числа в его развитии». В 1930 г. на I Всесоюзном съезде математиков, состоявшемся в Харькове, Выгодский сделал доклад «Проблемы истории с точки зрения методологии марксизма». Первые статьи С. А. Яновской «Категория количества у Гегеля и сущность математики» (1928 г.), «Закон единства противоположностей в математике» (1929 г.), «Идеализм в современной философии математики» и «Очередные задачи математиков-марксистов» (1930 г.) носили преимущественно методологический характер, но в них рассматривались и вопросы истории математики. В эти же годы начал научную деятельность А. П. Юшкевич. В 1929 г. он опубликовал статью «Философия математики Лазаря Карно». В 1930 г. вышла работа А. О. Гельфонда «Очерк истории современного состояния теории трансцендентных чисел».



А. В. Васильев.



М. Н. Марчевский.

В 30-е годы С. А. Яновская и М. Я. Выгодский возобновили (после смерти В. В. Бобынина) на физико-математическом факультете Московского университета чтение лекций по истории математики. В 1937 г. они организовали студенческий, а затем научно-исследовательский семинар. Этот семинар через некоторое время стал общесоюзным центром изучения истории математики. В его еженедельных собраниях участвовали математики многих городов страны, на нем предварительно обсуждались почти все кандидатские и докторские диссертации по истории математики. Курсы истории математики читались также в Московском областном педагогическом институте (И. К. Андронов) и Московском педагогическом институте им. К. Либкнехта (А. П. Юшкевич).

В это же время организуется подготовка специалистов по истории математики. В МГУ защитили кандидатские диссертации первые аспиранты: ученики Выгодского — Г. Б. Петросян, С. Е. Белозеров и ученики Яновской — К. А. Рыбников, Э. Я. Бахмутская; первые докторские диссертации по этой специальности были защищены М. Я. Выгодским и А. П. Юшкевичем.

Большая работа была проведена по изучению трудов классиков математики — Кеплера, Кавальери, Декарта, Ньютона, Лопиталя, Эйлера, Монжа, Л. Карно, Галуа, Листинга, Лежен-Дирихле и др. Как правило, издания классиков снабжались научным аппаратом — статьями и комментариями. В этой работе принимали участие М. Я. Выгодский, Э. Кольман, Н. С. Кошляков, С. Я. Лурье, Д. Д. Мордухай-Болтовской, Б. И. Сегал, Н. Г. Чеботарев, А. П. Юшкевич и др. В 1931—1932 гг. по решению Академии наук СССР было издано полное собрание сочинений Е. И. Золотарева (в двух томах). Несколько раньше (1925, 1927 гг.) В. И. Смирнов проделал огромную работу по изданию неопубликованных рукописей А. М. Ляпунова о фигурах равновесия неоднородной вращающейся жидкости. Незадолго до этого (1924 г.) В. А. Стеклов сделал об этих рукописях доклад на Международном математическом конгрессе в Торонто. Были изданы также переводы книг по истории математики Цейтена, Вилейтнера, Ф. Клейна и Нейгебауера, которые использовались в преподавании.

В 1933 г. к 50-летию со дня смерти К. Маркса были впервые опубликованы важнейшие его математические рукописи. Эти заметки Маркса, содержащие глубокие идеи о значении математических символов как операторов, о соотношении исторического и логического в развитии математики, о «мистическом», «рациональном» и «алгебраическом» периодах развития дифференциального исчисления в XVIII в., о диалектике в математике, стимулировали интерес к истории проблем обоснования математики, связанный также с развитием в СССР теоретико-функциональных исследований. Математические рукописи Маркса опубликованы под редакцией С. А. Яновской, составившей подробные исторические и методологические комментарии к ним, в сборнике «Марксизм и естествознание» (1933 г.). Много позднее, в 50-е годы, С. А. Яновская совместно с К. А. Рыбниковым продолжила эту работу. Рыбников подробно изучил математическую литературу, использованную К. Марксом. Пол-

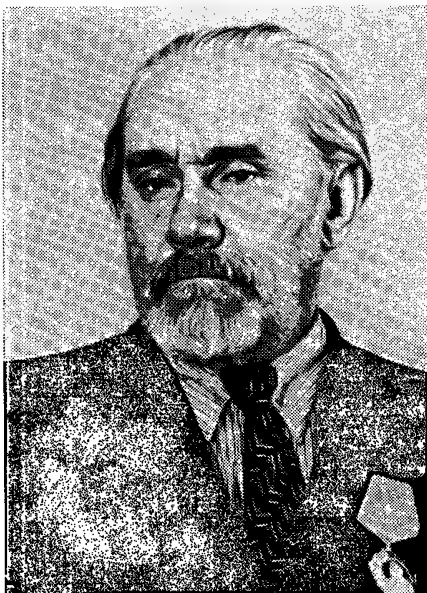
ное и уточненное издание «Математических рукописей» с подробными комментариями вышло в 1968 г.

Выдающимся достижением рассматриваемого времени была расшифровка и публикация Московского математического папируса, хранящегося в Музее изобразительных искусств им. А. С. Пушкина (Б. А. Тураев, В. В. Струве, на нем. яз., Берлин, 1930 г.). Широкий интерес и споры вызвала работа С. Я. Лурье «Теория бесконечно малых у древних атомистов» (на нем. яз. — 1934 г.; русск. изд. — 1935 г.).

В конце 30-х — начале 40-х годов во многих научных центрах интерес к истории и методологии математики усиливается, круг исследований в этой области расширяется. В Москве выходят работы Н. Н. Лузина, посвященные Эйлеру и Ньютону, а также некоторым вопросам истории анализа, статья В. И. Гливенко о понятии дифференциала, написанная в результате изучения рукописей К. Маркса. Большое место истории математики, по инициативе прежде всего О. Ю. Шмидта, отводится в соответствующих статьях Большой Советской Энциклопедии (О. Ю. Шмидт читал курс истории математики в МГУ). М. Я. Выгодский исследует математику Египта, Вавилона и арифметику в Древней Греции, А. П. Юшкевич — историю отечественной математики в XVIII в., Б. В. Гнеденко — развитие математики в России.

В Ленинграде был открыт Институт истории науки и техники. Институт издал 10 томов своего «Архива» и несколько сборников, в том числе сборники, посвященные памяти Эйлера (1935 г.) и Лагранжа (1937 г.). В нем сотрудничали М. Я. Выгодский, С. Я. Лурье, а также Н. И. Идельсон и Л. С. Полак, занимавшиеся больше историей механики. Здесь же продолжал изучение классиков математики XVIII в. А. Н. Крылов.

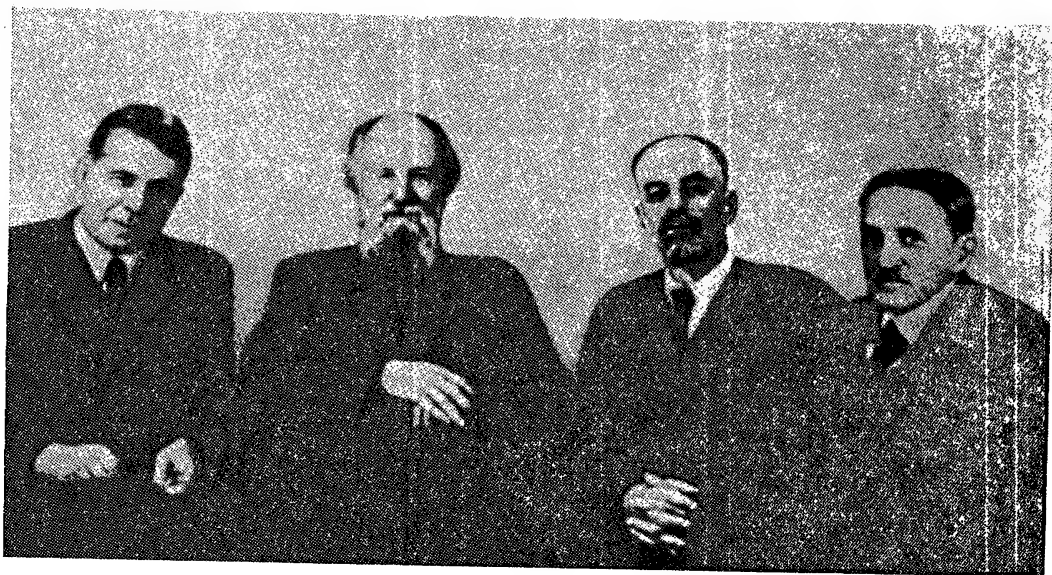
Исследования по истории математики расширялись и в других городах республики: в Ростове-на-Дону (Д. Д. Мордухай-Болтовской), Казани (Н. В. Юсупов опубликовал «Очерки по истории развития арифметики на Ближнем Востоке», 1932 г.; Н. Г. Чеботарев исследовал творчество Ньютона, Лагранжа и Галуа), Воронеже (В. Д. Даев).



И. К. Андронов.



М. Я. Выгодский.



Комиссия по истории Физико-математических наук (слева направо): академики С. И. Вавилов, А. Н. Крылов, В. И. Смирнов и профессор Н. И. Идельсон. 1945 г.

На Украине М. Ф. Кравчук (Киев) опубликовал обзор истории математики в Киевском университете за 100 лет (1935 г.). В 1938 г. было издано большое исследование по истории алгебры — второй том трактата Д. А. Граве по алгебраическому анализу (диофантов анализ, группы многогранников, теории сравнений алгебраических функций, теории алгебраических чисел и др.). Д. А. Граве написал также третий том, но напечатан он был лишь частично (утерян в типографии в годы Великой Отечественной войны). В третьем томе излагаются алгебраические работы Эйлера, Лагранжа, Лежандра, ученых XIX в., в том числе П. Л. Чебышева и его учеников. В Харькове историей теории групп занимался А. К. Сушкевич. Курс лекций по истории математики, который он читал в университете, был издан литографским способом. Велись исследования также в Одессе (Д. А. Крыжановский, И. Ю. Тимченко, Н. А. Чайковский). И. Ю. Тимченко издал работу по истории логарифмов (1935 г.).

В Грузии начало исследований по истории математики было положено работой Г. Н. Николадзе о грузинской устной нумерации. В более широком объеме к изучению грузинской математики приступил незадолго до Великой Отечественной войны Д. Г. Цхакая, ученик М. Я. Выгодского. Исследования по истории математики в Армении вели Г. Б. Петросян и Т. Г. Туманьян. (Заметим, что еще в 1918 г. И. А. Орбели опубликовал в Ленинграде в переводе на русский язык сборник задач армянского средневекового математика Анании Ширакаци.) В Ташкенте историей математики и астрономии в Средней Азии XV в. занимался Т. Н. Кары-Ниязов. Историко-математические исследования в Прибалтике проводились в незначительной степени. Можно назвать работу Я. Х. Сарва о геометрических фигурах Ахмеса (1927 г.), а также очерк А. Я. Лусиса, посвященный развитию понятия о функциях (1927 г.).

Исследование истории математики после 1945 г.

Исследования в области истории математики, как и во многих других областях науки, во время Великой Отечественной войны были замедлены. Но сразу же после ее окончания темп их начал быстро возрастать. Еще до окончания войны, в 1944 г., возобновил деятельность семинар на механико-математическом факультете Московского университета, в начале 1945 г. был организован Институт истории естествознания Академии наук СССР (ныне — Институт истории естествознания и техники) с филиалом в Ленинграде, где была создана также академическая Комиссия по истории физико-математических наук, в которую входили С. И. Вавилов, Н. И. Идельсон, А. Н. Крылов, В. И. Смирнов, Т. П. Кравец и другие ученые. Заметно увеличилось количество публикаций по истории математики. Еще в годы войны А. Н. Крылов подготовил, а в 1946 г. В. И. Смирнов издал первый том полного собрания сочинений М. В. Остроградского, содержащий курс механики (издан только один том). Продолжалась работа по изданию трудов классиков математики: «Начал» Евклида, сочинений Архимеда, Омара Хайяма, Лейбница, Ньютона, Эйлера, Монжа, Гаусса, Я. Бойяи, Римана, Пуанкаре, Гильберта и др.; С. И. Вавиловым была основана (40-е годы) академическая серия «Классики науки». В подготовке этих изданий участвовали И. Н. Веселовский, М. Я. Выгодский, В. Л. Гончаров, В. Ф. Каган, Д. Д. Мордухай-Болтовской, И. Б. Погребысский, П. К. Рашевский, Б. А. Розенфельд, В. В. Степанов, А. П. Юшкевич и др. Особенно широкий размах приняло издание сочинений классиков отечественной науки. Так, были изданы собрания сочинений Н. И. Лобачевского (отв. редакторы В. Ф. Каган и А. П. Норден), М. В. Остроградского (отв. редактор И. З. Штокало), П. Л. Чебышева (отв. редактор С. Н. Бернштейн), С. В. Ковалевской (отв. редактор П. Я. Кочина), А. М. Ляпунова (отв. редактор Л. Н. Сретенский), Г. Ф. Вороного (отв. редактор И. З. Штокало), Н. Н. Лузина (председатель редакционной коллегии М. А. Лаврентьев), П. С. Урысона (редактор П. С. Александров), отдельные сочинения этих ученых и основные труды П. Г. Боля, Н. М. Крылова, А. А. Маркова, Н. Я. Сониной, Н. М. Гюнтера и других выдающихся математиков. В подготовке этих изданий и составлении комментариев и статей к ним принимали участие И. И. Артоболевский, Н. И. Ахиезер, Н. К. Бари, И. М. Виноградов, А. О. Гельфонд, Б. В. Гнеденко, Б. Н. Делоне, А. Н. Колмогоров, А. П. Котельников, Ю. В. Линник, Г. Л. Лунц, Л. А. Люстерник, Ю. А. Митропольский, А. Д. Мышкис, И. Б. Погребысский, И. М. Рабинович, Е. Я. Ремез, В. И. Смирнов, С. Л. Соболев, Н. Г. Чеботарев, И. Р. Шафаревич и др.

Советские математики в этот период выполнили также ряд других крупных исследовательских работ по истории математики. Так, А. Н. Колмогоров написал для второго издания БСЭ статью «Математика» с обширным историческим отделом, содержащим яркие характеристики основных периодов развития этой науки, ему принадлежит также



Семинар по истории математики при Московском университете. 1-й ряд (слева направо): С. А. Яновская, К. А. Рыбников, А. П. Юшкевич, И. Г. Башмакова; 2-й ряд: Е. С. Шатунова, Г. И. Игнациус, Б. А. Розенфельд, Р. А. Симонов, Л. Е. Майстров, А. И. Баккал; 3-й ряд: А. К. Кубесов, Г. С. Собиров, И. М. Тумаков, Ф. А. Медведев, А. Н. Гусев, А. Б. Паплаускас.

оригинальная трактовка теории пределов Ньютона. Неоднократно выступал со статьями историко-математического характера А. Д. Александров, в течение нескольких лет читавший курс истории математики в Ленинградском университете. Истории математики посвящены работы П. С. Александрова, Л. А. Люстерника, В. В. Степанова. Статьи Л. А. Люстерника и А. Ф. Лапко о съездах советских математиков и Л. А. Люстерника о московских математиках 20-х годов имеют значение первоисточника. В. И. Смирнов исследовал математическое творчество Д. Бернулли и вместе с А. П. Юшкевичем подготовил математические главы для второго тома «Истории Академии наук СССР» (1964 г.). Б. Н. Делоне опубликовал книгу «Петербургская школа теории чисел» (1947 г.), В. Ф. Каган — обширную биографию Н. И. Лобачевского (2-е изд., 1948 г.) и ряд крупных работ по истории неевклидовой геометрии. Историей неевклидовой геометрии занимались также Б. Л. Лаптев, А. П. Норден и Б. А. Розенфельд, для которого история математики стала второй специальностью. Геометрические работы К. М. Петерсона исследовал С. Д. Россинский. История математики занимает большое место в исследованиях Б. В. Гнеденко (начиная с его «Очерков по истории математики в России», 1945 г.), А. И. Маркушевича («Очерки по истории аналитических функций», 1951 г.), И. З. Штокало (история отечественной математики, в частности история математики на Украине). Наконец, большие коллективы ученых подготовили обзоры советских работ по отдельным областям различных математических наук в книгах «Математика в СССР за тридцать лет» (1948 г.) и «Математика в СССР за сорок лет» (в двух томах, 1959 г.).

Москва по-прежнему была основным центром исследований по исто-

рии математики. В МГУ работал научно-исследовательский семинар по истории математики (позднее — истории механики), которым с 1944 г. руководили А. П. Юшкевич и С. А. Яновская, а с 1956 г. — также К. А. Рыбников. После перехода С. А. Яновской на кафедру математической логики лекции по истории математики читали И. Г. Башмакова и К. А. Рыбников. На основе своих лекций К. А. Рыбников подготовил курс «История математики» (в двух частях, 1960—1963 гг.). В настоящее время в университете занимаются историей математики также С. С. Демидов, А. В. Дорофеева, С. С. Петрова и др. Параллельно проводились исследования в Институте истории естествознания и техники, где с 1945 г. работали В. П. Зубов (ум. в 1963 г.) и А. П. Юшкевич. В настоящее время в институте работает большой коллектив историков математики и механики: Э. И. Березкина, А. И. Володарский, Б. Г. Кузнецов, Л. Е. Майстров, Ф. А. Медведев, А. Б. Паплаускас, Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич, А. Т. Григорьян, Н. М. Меркулова, И. Б. Погребынский, М. М. Рожанская. Кроме того, историей математики в Москве занимаются И. К. Андронов, И. Н. Веселовский, Э. Кольман, В. Н. Молодший, Н. И. Симонов и др.



К. А. Рыбников.

В рассматриваемый период С. А. Яновская опубликовала несколько работ по истории отечественной математики — о математике в Москве в 1804—1864 гг. (совместно со своим учеником И. И. Лихолетовым), о мировоззрении Н. И. Лобачевского, о П. Л. Чебышеве, а также завершила, как упоминалось выше, при участии К. А. Рыбникова многолетнюю работу над математическими рукописями К. Маркса. Перу С. А. Яновской принадлежат и другие работы: об апориях Зенона, аксиоматике древних греков, о «Геометрии» Декарта. Все эти работы объединяет одна общая черта: исследование истории математики с позиций марксистской методологии и нередко с помощью современного логико-математического аппарата. Ученики С. А. Яновской разрабатывали также вопросы истории математической логики. В частности, ряд статей опубликовал Н. И. Стяжкин. В 1962 г. был издан написанный им совместно с В. Д. Силаковым «Краткий очерк истории общей и математической логики в России», в 1964 г. вышла книга Б. В. Бирюкова и Н. И. Стяжкина «Становление идей математической логики».

К. А. Рыбников кроме работы над математическими рукописями К. Маркса занимался историей вариационного исчисления и функционального анализа. К разработке этих и смежных с ними вопросов он привлек своих учениц А. В. Дорофееву и С. С. Петрову.

К. А. Рыбников кроме работы над математическими рукописями К. Маркса занимался историей вариационного исчисления и функционального анализа. К разработке этих и смежных с ними вопросов он привлек своих учениц А. В. Дорофееву и С. С. Петрову.



А. Т. Григорьян.

Весьма широк диапазон исследований М. Я. Выгодского: математика древнего Вавилона, анализ структуры «Начал» Евклида, история правила двух ложных положений, проблема математической строгости в XVIII в., Московское математическое общество в первые его десятилетия и др. Много сил и времени отдавал М. Я. Выгодский, особенно в последние годы жизни, преподаванию и составлению учебных руководств по математике.

Исследования А. П. Юшкевича представляют преимущественно два направления. Прежде всего — это история отечественной математики (рукописи XIV—XVII вв. и «Арифметика» Магницкого, научное наследие, в том числе архивное, Эйлера и Остроградского, алгебра Лобачевского, математика в Москве в 1756—1866 гг. и др.). Первые итоги этих работ

подведены в цикле его статей, опубликованных в «Математике в школе» (1947—1949 гг.), в соответствующих главах «Истории естествознания в России» (1957—1960 гг.) и в книге «История математики в России до 1917 года» (1968 г.). С 1947 г. Юшкевич занимается также математикой средневекового Востока. В 1961 г. он опубликовал «Историю математики средних веков». Эта книга переведена на несколько языков. Ему принадлежат также работы о «Геометрии» Декарта, так называемом исчислении нулей Эйлера, по истории понятий интеграла и функции и др.

Истории отечественной математики посвящены статьи В. П. Зубова, впервые изучившего теоретические направления средневековой русской математической мысли, Л. Е. Майстрова — о математических знаниях в средневековом Новгороде, книги В. Е. Прудникова «Русские педагогические математики XVIII—XIX веков» (1956 г.) и «П. Л. Чебышев» (1950 г.). В последней использованы архивные материалы. Много работ посвящено жизни и творчеству отечественных ученых и анализу развития отдельных математических дисциплин, например истории теории вероятностей в России (Б. В. Гнеденко), истории теории делимости, преимущественно у Е. И. Золотарева (И. Г. Башмакова), теории цилиндрических функций (В. В. Гуссов, ученик А. П. Юшкевича), теории дифференциальных уравнений Эйлера (Н. И. Симонов) и Остроградского (В. И. Антропова, ученица А. П. Юшкевича), а также анализу геометрических работ учеников Эйлера (В. И. Лысенко, ученик А. П. Юшкевича).

К названному направлению принадлежат исследования И. Б. Погребысского. Большая часть его работ относится к истории механики. Он изучал также математическое творчество Остроградского, Вороного и Ляпунова, биографию Остроградского. Заметим, что педагогическое наследие Остроградского специально исследовал И. А. Марон. Биографию Остроградского опубликовал А. Т. Григорьян (изд. 1-е — 1953 г.,

2-е — 1961 г.). Были изданы биографии В. Я. Буняковского (В. Е. Прудников), А. П. Котельникова (Т. В. Путята, Б. Л. Лаптев, Б. А. Розенфельд, Б. Н. Фрадлин), Н. Н. Лузина (Н. К. Бари и Л. А. Люстерник), Б. К. Млодзеевского (С. Д. Россинский), В. А. Стеклова (Г. И. Игнациус) и В. В. Степанова (П. С. Александров и В. В. Немыцкий), а также Архимеда (И. Н. Веселовский), Хайяма (Б. А. Розенфельд и А. П. Юшкевич), Гюйгенса (У. И. Франкфурт и А. М. Френк), Г. Вейля (И. М. Яглом).

Проблемам истории математики древнего Востока посвящены работы И. Н. Веселовского и М. Я. Выгодского («Арифметика и алгебра в древнем мире», 1941 г.). В них разработаны отдельные вопросы древнегреческой математики. В широком объеме исследовала и по-новому решила целый ряд проблем в этой области И. Г. Башмакова (теория отношений, дифференциальные методы и гидростатика Архимеда, неопределенный анализ Диофанта, особенности позднеэллинистического периода и др.). Оригинальны ее «Лекции по истории математики в древней Греции» (1959 г.). «Историю математики в древности» (1961 г.) написал Э. Кольман. Историей математики в странах ислама занимается Б. А. Розенфельд. Он подготовил несколько специалистов в этой области. Вместе со своими учениками Л. М. Карповой, С. А. Красновой и др. Розенфельд издал большое количество переводов с арабского. При переводах были вскрыты многие ранее неизвестные факты в истории арифметики, теории параллельных, тригонометрии. Новые интересные материалы об арифметике в арабских странах разработал М. И. Медовой, ученик М. Я. Выгодского. Э. И. Березкина, ученица И. Г. Башмаковой, изучает математику Китая в первом тысячелетии нашей эры. А. И. Володарский, ученик А. П. Юшкевича, специализируется по истории математики средневековой Индии.

Из работ по математике нового времени кроме работ, посвященных Эйлеру, следует назвать исследования по истории отдельных математических наук. К ним относятся книги и статьи В. Н. Молодшего о теоретической арифметике XVII—XVIII вв. (1963 г.), а также учеников А. П. Юшкевича: Ф. А. Медведева — по истории теории множеств (1965 г.) и теории функций действительного переменного и А. Б. Паплаускаса — по истории тригонометрических рядов (1961 г.).

Большое значение для развития исследований по истории математики имело расширение возможностей их публикации. В 1948 г. под редакцией Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича в Москве начали издаваться сборники «Историко-математические исследования». Вначале в них печатались только труды участников историко-математического семинара Московского университета, однако вскоре образовался большой коллектив авторов из многих городов Советского Союза. К настоящему времени вышло 17 таких сборников. Московский университет издал (под редакцией К. А. Рыбникова) два сборника («История и методология естественных наук»), посвященных истории математики (в них напечатаны материалы межвузовских конференций 1960 и 1963 гг.). Статьи по истории математики печатались в «Трудах Института истории естествознания» (1947—1952 гг.), а затем в «Трудах Института истории естествознания и

техники» (1954—1963 гг.). В настоящее время Институт истории естествознания и техники издает сборники «Вопросы истории естествознания и техники» и «Физико-математические науки в странах Востока». Работы и статьи, относящиеся к истории математики, печатаются в журналах «Успехи математических наук», «Математика в школе», а также в «Ученых записках» педагогических институтов.

В Ленинграде до 1954 г. объединяющим центром была академическая Комиссия по истории физико-математических наук, затем — Ленинградское отделение Института истории естествознания и техники и Ленинградское отделение Архива АН СССР, председателем ученого совета которого был В. И. Смирнов.

Новым толчком к расширению исследований по истории математики явилась юбилейная сессия Академии наук, проведенная в Ленинграде в апреле 1957 г. в связи с 250-летием со дня рождения Леонарда Эйлера. На сессии с докладами выступили М. А. Лаврентьев, А. О. Гельфонд, Б. Н. Делоне, Л. Н. Сретенский, А. И. Маркушевич, К. Шредер (ГДР). Несколько ранее состоялась посвященная этой же дате юбилейная сессия Немецкой академии наук в Берлине, на которой с докладами выступили также советские ученые П. С. Александров, Б. Н. Делоне, А. Г. Постников и А. П. Юшкевич. Все доклады и некоторые специально написанные статьи опубликованы в двух юбилейных сборниках, один из которых издан Академией наук СССР (1958 г.), другой — Немецкой академией наук (1959 г.). Так было положено начало исследованиям, продолжающимся и в настоящее время. В частности, под руководством В. И. Смирнова и А. П. Юшкевича в Ленинграде подготовлено полное описание переписки Эйлера (1967 г.), В. И. Смирновым и Е. С. Кулябко издана биография М. Софронова (1954 г.), Архивом АН СССР — два тома научного наследия Эйлера (второй том, подготовленный Г. К. Михайловым, содержит неопубликованные рукописи по механике), под редакцией Э. Винтера (ГДР) и А. П. Юшкевича в ГДР издано три тома переписки Эйлера, в подавляющей части ранее не печатавшейся. А. А. Киселевым, Г. П. Матвиевской и И. Г. Мельниковым исследованы неопубликованные заметки Эйлера по теории чисел. Р. О. Кузьминым дан подробный анализ открытий Е. И. Золотарева в теории алгебраических чисел (1947 г.). С. Я. Лурье издал (1945 г.) книгу об Архимеде. И. Я. Депман опубликовал целый ряд статей по истории отечественной математики, в том числе о Петербургском математическом обществе. Широко использованы историко-математические сведения в многочисленных книгах И. Я. Депмана для юношества. Историю элементарной арифметики изучал И. К. Андронов. Ему принадлежит работа о развитии понятия числа и действий над числами (1959 г.). Изданы биографии Е. И. Золотарева, А. Н. Коркина (Е. П. Ожигова, 1966 и 1968 гг.), Н. Я. Сониной (А. И. Кропотов, 1967 г.).

Исследования по истории математики велись и в других городах РСФСР. В Ростове-на-Дону продолжал работать Д. Д. Мордухай-Болтовской. Он подготовил и издал русский перевод «Начал» Евклида (1948—1950 гг., книга снабжена огромным вспомогательным научным аппаратом). Его ученик С. Е. Белозеров опубликовал книгу по истории теории



Украинский республиканский семинар по истории математики акад. АН УССР И. З. Штокало. 1-й ряд (слева направо:) Б. В. Пясковский, В. В. Котек, Т. В. Путята, И. З. Штокало, Л. Н. Грацианская, Э. Я. Бахмутская, А. Н. Боголюбов; 2-й ряд: В. С. Сологуб, О. А. Сичкар, Е. А. Кушнир, Н. А. Чайковский, С. Н. Киро, В. А. Добровольский, Д. С. Гончаров, В. А. Волкова, Н. П. Бетина; 3-й ряд: Б. Н. Фрадлин, Ф. А. Цыкунов, Б. Н. Белый, С. М. Великая, Э. Г. Цыганкова, Е. М. Нестеренко, О. П. Морокишко, Л. К. Иванова, Л. Н. Вивальнюк, Ю. А. Белый.

аналитических функций (1962 г.) и очерк истории математики в Ростовском университете. М. П. Черняев написал биографию К. А. Андреева. В Саратове изданы «Лекции по истории математики» (1956 г.) Г. П. Боева, во Владимире — работы Н. Ф. Канунова о Ф. Э. Молине, в Томске — статьи и монография (1968 г.) Н. Н. Круликовского о развитии математики в Томске, в Иркутске — работы А. Б. Штыкана по истории вычислительных методов и механизмов.

Значительно расширились после Великой Отечественной войны исследования по истории математики на Украине. В 1956 г. при Институте математики АН УССР были созданы отдел истории математики и научно-исследовательский семинар по истории математики, которым руководит И. З. Штокало. В настоящее время этот отдел, преобразованный в отдел истории естествознания, входит в состав Сектора истории естествознания и техники Института истории АН УССР. Сектор издает «Очерки по истории естествознания и техники» (на укр. яз., до 1967 г. вышло 10 выпусков), в 1959—1963 гг. издавал также «Историко-математический сборник» (в 1964 г. он вышел под названием «Из истории отечественного естествознания», на укр. яз.).



А. Н. Боголюбов.

Под руководством И. З. Штокало изданы трехтомные собрания сочинений Остроградского и Вороного, под редакцией И. З. Штокало — «Украинская математическая библиография» (1963 г.). В подготовке этих изданий большое участие принимал И. Б. Погребысский. С 1962 г. историей математики занимается А. Н. Боголюбов (основные его исследования относятся к истории математики советского периода и прикладной механики), с 1963 г. — В. С. Сологуб. Киевский семинар по истории математики приобрел характер республиканского семинара, он объединяет научных работников Киева, Харькова, Одессы, Львова, Черновцов, Каменца-Подольского, Чернигова и других городов республики. В 1960 г. киевская группа историков математики приступила к подготовке коллективного труда

«История отечественной математики» (в четырех томах, пяти книгах). В этой работе принимает участие также Институт истории естествознания и техники АН СССР. Авторы издания — советские математики, представляющие все основные направления современной математики.

Диапазон исследований по истории математики на Украине в послевоенные годы очень широк. Изданы избранные труды Н. М. Крылова, подготовленные к печати Ю. А. Митропольским и Ю. В. Благовещенским. Коллективом сотрудников Института математики и Института теоретической физики АН УССР (О. С. Парасюком, А. Н. Тавхелидзе, В. П. Шелестом, О. Б. Лыковой) под руководством Ю. А. Митропольского подготовлены к изданию «Избранные труды в трех томах» Н. Н. Боголюбова. Ю. А. Митропольский написал ряд работ по истории нелинейной механики. Историей нелинейной механики занимается Е. М. Нестеренко. Ею составлена весьма подробная аннотированная библиография по нелинейной механике. Н. И. Симонов исследовал историю теории дифференциальных уравнений в XVIII и XIX вв., в особенности работы Эйлера. В. С. Сологуб изучает развитие математической физики, главным образом уравнений эллиптического и параболического типов.

Многие работы посвящены истории отечественной математики. Так, И. З. Штокало и И. Б. Погребысский — авторы исследования о жизни и деятельности Г. Ф. Вороного и обзора работ М. В. Остроградского по математической физике. Одна из работ И. З. Штокало посвящена развитию математики на Украине в советский период. И. Б. Погребысскому принадлежат комментарии к некоторым работам Г. Ф. Вороного и М. В. Остроградского, обзор архивных материалов о Г. Ф. Вороном и его рукописного фонда. Большая работа по изучению и публикации архивного наследия Вороного выполнена Б. Н. Делоне, Б. А. Венковым,

Ю. В. Линником, И. Р. Шафаревичем. Е. Я. Ремез изучает неопубликованное наследие Остроградского. А. Н. Боголюбов работает над историей математических знаний в России и на Украине XV—XVIII вв., а также над историей советской математики. Л. Н. Грацианская изучает народную математику. Ей и В. А. Добровольскому принадлежит ряд работ о развитии математики в Киевском университете и об отдельных киевских математиках (М. Е. Ващенко-Захарченко, В. П. Ермакове, Д. А. Граве, Б. Я. Букрееве, Г. В. Пфейффере). К. И. Швецов исследовал математические рукописи XVII в., в частности геометрическую рукопись И. Елизарьева; эту работу он выполнил вместе с Ю. А. Белым (Николаев), который изучил также рукописный курс геометрии Л. Эйлера. Вопросы истории методики математики и истории элементарной математики занимается Б. Н. Белый. В. С. Сологуб исследовал научное творчество А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова, С. В. Ковалевской, первые работы Н. Н. Лузина и более детально — работы М. В. Остроградского, А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова по теории потенциала. Т. В. Путята и Б. Н. Фрадлин посвятили свои работы жизни и деятельности М. В. Остроградского, Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина, О. И. Сомова, А. Н. Крылова, В. П. Ермакова, И. И. Рахманинова, П. В. Воронца, Д. А. Граве, А. П. Котельникова и др. В. А. Добровольский изучал развитие математики в высших технических и военных школах, в основном историю преподавания математики в них. В области истории философских и методологических вопросов математики работают В. В. Котек и Б. В. Пясковский. В. В. Котек исследует мировоззрение и философские взгляды Эйлера, Б. В. Пясковский — философские вопросы современной математики. Вопросами философии математики в историческом аспекте занимаются И. З. Штокало, Н. И. Симонов, А. Н. Боголюбов.



И. Б. Погребысский.

В Харькове исследования по истории математики ведет большой коллектив ученых. А. К. Сушкевич (ум. в 1961 г.) написал (1951 г.) очерк истории алгебры в России до 1917 г. Развитие математики в Харькове изучали М. Н. Марчевский, автор большого количества работ по истории математики, И. А. Наумов, Э. Я. Бахмутская. И. А. Наумов исследовал научную деятельность Д. М. Синцова, развитие неголономной дифференциальной геометрии. Э. Я. Бахмутская изучала историю математического анализа до открытия алгоритма дифференциального и интегрального исчислений, а также историю математики в Харьковском университете, Харьковском технологическом институте и Харьковском математическом обществе. Н. И. Ахизеру принадлежит ряд работ о творчестве



Т. В. Путята.

П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, В. А. Стеклова и А. М. Ляпунова. Я. Л. Геронимус — автор большого труда о творчестве отечественных механиков. Русскую математическую периодику изучала С. А. Дахия. Некоторые вопросы истории дифференциальных уравнений и теории функций комплексного переменного рассмотрены С. М. Великой. С 1958 г. в Харькове работает филиал республиканского семинара по истории математики, основанный А. К. Сушкевичем; в настоящее время им руководит Э. Я. Бахмутская.

История математики изучается и в других городах УССР. М. Г. Крейн (Одесса) опубликовал работу о развитии теории полиномов и предельных значений интегралов. В Одесском университете историю математики изучали Э. Б. Лейбман и С. Н. Киро, во Львовском —

Н. А. Чайковский (история математики во Львовском университете и др.). Отдельные вопросы истории математики изучались в Виннице (П. М. Олоничев подробно исследовал жизнь и творчество геометра Ф. М. Суворова), Полтаве (В. В. Лихин исследует развитие исчисления конечных разностей и конструктивной теории функций; он написал работу по истории теории функций и чисел Бернулли), Чернигове (Л. Н. Вивальнюк изучает научное творчество Д. А. Граве). Вопросам истории вавилонской математики посвящены труды Г. С. Раздымахи (Каменец-Подольский). Е. А. Кушнир (Черновцы) изучает развитие теории обыкновенных разностных уравнений в XVIII и XIX вв.

Начали исследования по истории математики молдавские ученые. Г. И. Глейзер опубликовал книгу об использовании истории математики в курсе средней школы, а В. П. Бычков разрабатывал вопросы о взаимосвязи развития математики в Румынии и СССР.

Успешно развиваются исследования по истории математики в прибалтийских республиках. И. Я. Депман (Ленинград) и И. М. Рабинович (Рига) изучали связи Гаусса с Прибалтикой. Несколько работ И. Я. Депмана посвящено развитию математики в Эстонии (работы о М. Бартельсе и К. М. Петерсоне и приложение к эстонскому изданию его «Рассказов о математике», 1955 г.). Г. Ряго опубликовал книгу о дерптских математиках М. Бартельсе, Ф. Миндинге, Ф. Молине и Г. В. Колосове (1955 г.). Творчеству П. Боля посвящены исследования А. Д. Мышкиса и И. М. Рабиновича. Ю. Г. Лумисте изучал развитие математики в Эстонии (начиная с XVII в., 1963, 1964 гг.), связи дерптских математиков XIX в. с Лобачевским и геометрические работы профессора Дерптского университета К. Э. Зенфа. А. К. Хумал и А. Я. Лусис составили библиографию работ эстонских и латвийских математиков за 1917—1947 гг. с краткими аннотациями («Математика в СССР

за тридцать лет», 1948 г.). Продолжением этой работы являются обзор и библиография работ эстонских математиков за 1944—1963 гг. — коллективный труд, изданный под редакцией Ю. Г. Лумисте и Э. Тамме (1964 г.), а также работы А. Я. Лусиса о латвийских математиках (1958 и 1965 гг.). Творчество литовского математика XVIII в. Франциска Норвайши и других профессоров Виленского университета изучал З. Жемайтис (Вильнюс).

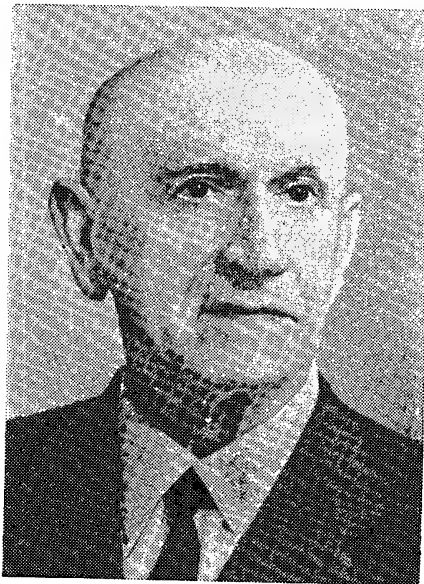
Сведения о развитии математики в Белоруссии за годы Советской власти можно найти в юбилейных изданиях Белорусского университета и Академии наук Белорусской ССР. Ряд статей, посвященных этому вопросу, опубликовано Н. П. Еругиным. Ему принадлежат также работы по истории дифференциальных уравнений. Н. Д. Беспамятных (Гродно) изучает историю преподавания математики, историю математических инструментов и другие вопросы.

Существенные работы в области истории математики выполнены учеными закавказских республик. В Грузии издана «История математики в Грузии» Д. Г. Цхакая (в двух томах, 1948, 1959 гг.) на грузинском языке. Цхакая опубликовал также ряд исследований по истории математики и метрологии в Грузии. Известны работы Г. С. Чогошвили об этимологии вавилонских математических терминов с помощью картвельских языков, Н. Ф. Ломджария о математике Саба-Султана Орбелиани (1955 г.) и грузинском счете (1957 г.), В. Д. Купрадзе, Л. П. Гокиели, Н. И. Мухелишвили, Н. Ф. Ломджария и Г. С. Чогошвили о жизни и творчестве А. М. Размадзе и Г. Н. Николадзе — выдающихся грузинских математиков начала XX в. Развитие математики в Грузии за годы Советской власти подробно изложено в работах Л. Г. Магнарадзе, Г. С. Чогошвили и Г. Ф. Манджавидзе.

Исследования по истории математики в Армении ведут Г. Б. Петросян, А. Г. Абраамян, Т. Г. Туманьян, А. М. Еганян и др. Издана книга Г. Б. Петросяна «Математика в Армении в древние и средние века» (1955 г.) на армянском языке с резюме на русском и английском языках. А. Г. Абраамян опубликовал «Космографию» Анании Ширакаци на



Б. Н. Фрадлин.



Н. А. Чайковский.



А. Я. Лусис.



Д. Г. Цхакая.

русском языке, а также ряд исследований о нем и других древних и средневековых армянских ученых. Изданы исследования А. Г. Абраамяна, Г. Б. Петросяна (1945 г.) и Т. Г. Туманьяна (1953 г.) об армянских переводах «Начал» Евклида, работа А. М. Еганяна «Математика в Армении с V по VII в.» (1967 г.).

В Азербайджане исследования по истории математики (и астрономии) были начаты в 1948 г. Г. Д. Мамедбейли. В 1961 г. вышла его книга о жизни и творчестве Насираддина ат-Туси. Творчеством Насираддина ат-Туси и его предшественников занимались азербайджанские историки математики Ф. А. Касумханов и Г. З. Кулиева. Развитие математики в Азербайджане за годы Советской власти рассмотрено в работах А. Г. Алиева. Некоторое время в Баку работал над историей математики средневекового Востока Б. А. Розенфельд.

Изучается история математики также в Узбекистане, Таджикистане и Казахстане. В Узбекистане издана весьма богатая новыми материалами книга Т. Н. Кары-Ниязова «Об астрономической школе Улугбека» (1950 г.), в которой много внимания уделено математическим работам ал-Каши и других сотрудников Самаркандской обсерватории в первой половине XV в., три тома «Избранных произведений» ал-Бируни (изд. Института востоковедения АН УзССР, 1964 г.), содержащие значительные математические разделы и «Математические трактаты» ал-Хорезми. В Институте математики АН УзССР исследования по истории математики ведет Г. П. Матвиевская. Некоторые итоги подведены ею в книге «Учение о числе на

средневековом Ближнем и Среднем Востоке» (1967 г.). С. А. Ахмедов изучил арифметический трактат Насираддина ат-Туси. В Таджикистане Х. М. Мухамадиев (Ленинабад) исследовал историю математического образования в Средней Азии и математические работы Ибн Сины. Истории математики Востока посвящены работы душанбинских историков науки Х. У. Садыкова, Г. С. Собирова и др.

Начало изучению истории математики в Казахстане было положено работавшим в Алма-Ате во время Великой Отечественной войны

М. Я. Выгодским. В настоящее время в Алма-Ате историей математик занимается его ученик Ф. Д. Крамар. Он исследовал инфинитезимальные методы Валлиса, историю геометрических исчислений. О. А. Жаутыков издал на казахском языке очерки по истории математики (1967 г.). А. К. Кубесов изучал творчество ат-Туси и ал-Фараби.

Важную стимулирующую роль в прогрессе историко-математических исследований играли математические съезды и совещания. Выше упоминалось об эйлеровской сессии АН СССР, состоявшейся в Ленинграде в 1957 г. В 1949 г. в Ленинграде президентом АН СССР С. И. Бавиловым было проведено совещание по истории естествознания и техники, на котором работала секция истории математики. Такие секции были на III и IV математических съездах, состоявшихся в 1956 и 1961 гг. В 1960 и 1963 гг. в Московском университете проводились межвузовские конференции по истории физико-математических наук, в которых приняли участие историки математики многих городов страны. В 1965 г. в Москве состоялась Всесоюзная конференция по истории естествознания и техники, организованная Институтом истории естествознания и техники и Советским национальным объединением.

Большое значение имели также межреспубликанские и республиканские совещания по истории науки. Такие совещания состоялись в Киеве, для трех прибалтийских республик — в Риге, Тарту и Вильнюсе, для республик Закавказья — в Ереване и Баку, для республик Средней Азии — в Душанбе. В 1951 г. Академией наук АзССР была проведена сессия, посвященная Насираддину ат-Туси. В этом же году состоялась сессия Академии наук УССР, посвященная М. В. Остроградскому.

Советские историки математики участвовали во многих международных конгрессах по истории науки (Флоренция — Милан, 1956 г.; Мадрид — Барселона, 1959 г.; Итака — Филадельфия, 1963 г.; Варшава — Краков, 1965 г.; Париж, 1968 г.), в Оксфордском симпозиуме (1961 г.), симпозиумах, проводившихся в Брно (1966 г.) и Праге (1967 г.), и др. Секция истории математики работала на Международном конгрессе математиков, состоявшемся в Москве в 1966 г. С обзорным докладом об итогах и перспективах исследований по истории математики средневекового Востока выступил А. П. Юшкевич. Кроме заседаний секции истории и вопросов преподавания математики в рамках конгресса был проведен специальный симпозиум «Математика в странах Востока в средние века в ее взаимосвязях с математикой европейских стран».

Исследования по истории отечественной математики

Наибольшее количество работ, выполненных советскими историками математики за 1917—1967 гг., о носится к истории отечественной математики. Диапазон этих исследований весьма велик: от предистории математики на территории Советского Союза до математических событий последних лет. Однако не все вопросы разработаны с одинаковой полнотой.

Для исследования предьстории математики и математических знаний дописьменного периода привлекались как материалы народной математики и генезис правил устного счета, так и данные сравнительного языкознания, археологии, строительной техники, металлургии, ремесленного производства. В этом направлении работали Л. Н. Грацианская, А. Т. Чуб, Л. Е. Майстров, А. Н. Боголюбов, М. Ю. Браичевский. Л. Н. Грацианская изучила народную математику, главным образом на Украине. Материалы своих исследований она опубликовала в цикле статей и монографии «Очерки народной математики Украины» (1968 г., на укр. яз.). Л. Н. Грацианской, а также Л. Е. Майстровым изучен вопрос о древнейшей «механизации» счета (счетные палочки, бирки и пр.). К этой области исследований относятся работы Г. Н. Николадзе и Н. Ф. Ломджария о грузинской устной нумерации и Г. С. Чогошвили об этимологии вавилонских математических терминов с помощью картельских языков. Исследования в этом направлении продолжают.

Особенно много работ посвящено изучению математики Среднего (советского) Востока и изданию переводов первоисточников. Выше упоминались работы Н. В. Юсупова (Казань), изданные в 1932—1934 гг. В 1947 г. А. П. Юшкевич опубликовал статью об Омаре Хайяме как алгебраисте, в 1948 г. была напечатана статья Г. Д. Мамедбейли по истории Марагинской обсерватории, которой руководил Насираддин ат-Туси, в 1950 г. вышла упомянутая выше монография Т. Н. Кары-Низова. Однако существенный вклад в исследование средневековой математики в странах Средней Азии впервые был сделан в 50-е годы.

Первым переводом арабских текстов на русский язык в нашей стране был тригонометрический «Трактат о полном четырехстороннике» Насираддина ат-Туси (1952 г.). Как упоминалось выше, в 1951 г. состоялась сессия Академии наук АзССР, посвященная 750-летию со дня рождения выдающегося ученого. В докладах на сессии была поставлена общая задача выявления вклада, внесенного учеными Средней Азии в математику Ближнего и Среднего Востока. Решение этой задачи потребовало обращения к первоисточникам и издания их на русском языке. Вслед за тригонометрическим сочинением ат-Туси появился русский перевод алгебраического трактата Омара Хайяма (1953 г.). Оба эти сочинения, впрочем, были широко известны по французским переводам. Первым переводом на один из современных европейских языков является перевод Б. А. Розенфельда изданного в 1953 г. комментария Хайяма к «Началам» Евклида. Б. А. Розенфельд и А. П. Юшкевич показали, что в своем комментарии Хайям, развивая работы ученых IX—XI вв., построил общую теорию отношений на определении равенства отношений с помощью так называемого алгоритма Евклида (в сущности — с помощью разложения отношения в непрерывную дробь) и доказал эквивалентность этой теории теории Евдокса — Евклида; при этом Хайям подошел к распределению понятия числа на любые положительные числа. Позднее эти идеи под несомненным влиянием великого математика и поэта развивал ат-Туси. В комментарии Хайям строит теорию параллельных линий, отправляясь от некоторого постулата, посредством которого, рассматривая так называемый четырехугольник Саккери, при-

водит к противоречию гипотезы острого и тупого углов и выводит постулат о параллельных Евклида. Эти идеи Хайяма также развивал ат-Туси. В 1963 г. вышел русский перевод небольшого сочинения Хайяма по алгебре, написанного им до знаменитого большого алгебраического трактата (пер. С. А. Красновой).

Исследование арифметики средневекового Востока было начато в 1954 г. А. П. Юшкевичем в работе о трактате по десятичной позиционной нумерации ал-Хорезми. Сопоставление сохранившейся латинской рукописи с другими средневековыми сочинениями позволило восстановить вероятное содержание всего трактата и исправить многочисленные ошибочные утверждения об арифметике ал-Хорезми, имеющиеся в литературе по истории математики. Это исследование, дополненное автором в 1964 г., было положено в основу русского издания трактата, опубликованного вместе с алгебраическим трактатом и тригонометрическими таблицами ал-Хорезми (1964 г., пер. Ю. Х. Копелевич и Б. А. Розенфельда).

В 1954 г. Б. А. Розенфельд и А. П. Юшкевич опубликовали в переводе на русский язык «Ключ арифметики» и «Трактат об окружности» Гиясаддина ал-Каши, работавшего в обсерватории Улугбека. «Ключ арифметики» был переведен впервые, «Трактат об окружности» несколько ранее издавался на немецком языке. В «Ключе арифметики» изложены десятичные дроби и правила возведения в степень бинома и извлечения корней с любым натуральным показателем по так называемому способу Руффини — Хорнера. Эти правила были обнаружены в 1963 г. С. А. Ахмедовым в арифметическом трактате ат-Туси. Совсем недавно выяснилось, что у ал-Каши были предшественники в употреблении десятичных дробей (Дамаск, X в.), хотя никто не описал их так подробно и не применил так широко, как он.

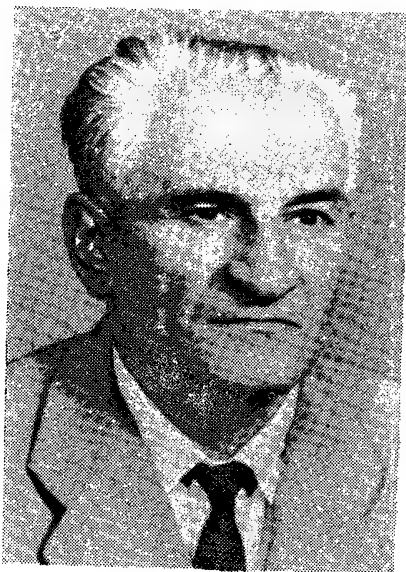
М. И. Медовой в 1960 г. изучил трактат Абу-л-Вафы по практической арифметике. Он обнаружил ряд неизвестных ранее фактов, например применение в одном случае отрицательных чисел. Медовой показал влияние трактата Абу-л-Вафы на ал-Караджи, раскрыл все детали техники операций над применявшимися в деловой практике дробями, аддитивно или мультипликативно составлявшимися из долей единицы. Он подверг критике ряд прежних предположений, в частности гипотезы Кантора и Цейтена о наличии в математике стран ислама двух школ — прогрессивной и проиндийской. В 1963 г. Медовой опубликовал исследование руководства по арифметике ан-Насави, примыкающего к трактату по арифметике ал-Хорезми.

В упоминавшихся исследованиях творчества Хайяма и ат-Туси много внимания уделяется теории составных отношений, приведшей этих ученых к распределению понятия числа. В более широком аспекте развития понятия числа на средневековом Востоке (в частности, в связи с успехами алгебры и арифметизацией евклидовой теории квадратных иррациональностей) были рассмотрены в монографии (1967 г.) Г. П. Матвиевской.

Геометрические построения изучались (1963 г.) С. А. Красновой. Ею рассмотрены разнообразные построения в геометрическом трактате Абу-л-Вафы, в том числе на сфере. Вместе с Б. А. Розенфельдом она



Г. П. Матвиенская.



Г. Б. Петросян.

опубликовала трактат ал-Бируни о хордах в круге, содержащий много важных для тригонометрии теорем (1963 г.). Несколько ранее (1959 г.) Б. А. Розенфельд показал, что ал-Бируни сформулировал правило квадратичного интерполирования в общем виде «для всех таблиц», имея в виду как таблицы синусов и тангенсов, так и таблицы более сложных зависимостей, встречающихся в астрономии. Детально зависимости, представляющие большой математический интерес, были изучены (1966 г.) М. М. Рожанской.

В таком небольшом очерке невозможно даже перечислить все работы, посвященные изучению математических элементов в творчестве ал-Фараби и Ибн Сины, открытиям ал-Бируни, ат-Туси, представителей самаркандской школы Улугбека и т. д. Роль математиков Средней Азии в развитии науки IX—XV вв. представляется теперь гораздо более значительной, чем еще 15—20 лет тому назад. Вместе с тем мы далеки еще от полноты прежде всего в охвате материала в этой области, и публикация новых рукописей остается необходимым условием дальнейших успехов истории математики.

Историю математических знаний в Грузии с древнейших времен исследовал (1959 г.) Д. Г. Цхакая. Он изучил высказывания многих авторов о грузинской устной и письменной нумерации, сопоставил между собой и с современными единицами измерений различные древнегрузинские единицы мер времени, длины, веса, жидкостей, зерна и денег, исследовал метод вычислений, примененных в грузинских солнечных и лунных календарях. Им разработаны учебники Георгия Тарханишвили (XVIII в.), а

также сборник, составленный в конце XVII в. так называемой комиссией ученых людей, куда наряду с оригинальными статьями вошли переводы на грузинский язык сочинений древнегреческих, среднеазиатских и западноевропейских математиков. Д. Г. Цхакая — автор двухтомной «Истории математики в Грузии» (т. I — с древнейших времен до XVII в., т. II — с XVII в. до второй половины XIX в.).

Математическое творчество армянских средневековых ученых Анании Ширакаци, Ованеса Саркавага, Григория Магистра и других с большой полнотой изучил (1959 г.) Г. Б. Петросян.

В. В. Бобынин, 80 лет назад положивший начало изучению раннего периода развития математики в России, дал весьма низкую оценку состояния математической культуры в рассматриваемый период и уровня знаний русских арифметиков XVI—XVII вв. Эта точка зрения, основанная на смешении формы изложения в учебниках практической арифметики с уровнем знаний авторов учебников, была подвергнута критике А. П. Юшкевичем на примере тех же рукописей XVII в., которые рассматривал Бобынин. Недавние археологические раскопки свидетельствуют о том, что следует пересмотреть представления о математической грамотности населения Древней Руси. Теперь мы знаем, что в экономическом и культурном отношениях Древняя Русь до монгольского нашествия находилась на одном уровне развития с другими странами Европы. Особенно высокой была культура Киева и Новгорода. Л. Е. Майстров собрал (1957 г.) сведения о математических терминах и знаках в древнерусских археологических памятниках (письма, завещания, хозяйственные документы и пр.); они свидетельствуют о весьма широком распространении простейших математических знаний среди новгородцев XI и следующих веков. Но совершенно новый свет на характер математических интересов в Древней Руси пролили исследования (1950—1954 гг.) В. П. Зубова. Изучая восходящий ко второй половине XV в. русский перевод (с древнееврейского перевода) некоторых отрывков «Метафизики» ал-Газали, В. П. Зубов показал ошибочность мнения о том, что в России до XVIII в. располагали только знаниями по практической арифметике и геометрии. В этих отрывках даются определения основных геометрических понятий (тела, поверхности, линии, точки), описан ряд их свойств, анализируются отличия непрерывных количеств от дискретных, приводятся аргументы против учения о том, что континуум складывается из неделимых, и отстаивается положение о том, что непрерывное потенциально бесконечно делимо. Анализируя другие рукописи начиная с «Изборника Святослава» 1073 г., В. П. Зубов выяснил, что в России издавна занимались философскими проблемами математики, восходящими к временам Зенона Элейского и Демокрита. Позднее к этим проблемам присоединились вопросы об интенсивности и ремиссии форм. В XVII и начале XVIII вв. эти проблемы освещались в лекциях по физике, т. е. натурфилософии, для студентов академий Киева и Москвы (возможно, эти лекции оказали влияние на формирование взглядов Ломоносова). Попутно В. П. Зубов рассмотрел ряд соответствующих западноевропейских руководств.

Предметом нескольких исследований являются русские математические памятники эпохи средних веков. В. П. Зубов дал новую публикацию (1953 г.) «Учения им же ведати человеку числа всех лет» Кирика Новгородца, изучил (1953 г.) вопрос о древнерусских делениях часа у Кирика Новгородца и по другим старинным рукописям. Ю. А. Белый и К. И. Швецов впервые исследовали (1959 г.) интересную рукопись по геометрии первой четверти XVII в. А. П. Юшкевич рассмотрел (1957 г.) оригинальную трактовку в рукописях XVII в. известной задачи об отыскании целого положительного числа по остаткам от деления на данные числа. И. Г. Спасский, опираясь на новые рукописные материалы,

подверг критике распространенное мнение о зарубежном происхождении русских счетов. К. И. Швецов дал (1955 г.) библиографическое описание всех известных русских рукописей по математике XVII в. В ряде статей А. П. Денисова, И. Я. Денмана, С. Е. Феля, О. Ф. Хичия, К. И. Швецова, А. П. Юшкевича подробно изучены первые русские печатные математические руководства, в том числе «Арифметика» Л. Ф. Магницкого, уточнены авторство и датировка некоторых книг.

Новые материалы собраны для изучения жизни и творчества петербургских академиков XVIII в., как первого их поколения (Хр. Гольдбах, Я. Герман, Д. и Н. Бернулли), так и школы и ближайших преемников Эйлера. В этой области работали Е. С. Кулябко, В. И. Лысенко, Н. И. Симонов, В. И. Смирнов, А. П. Юшкевич и др. В. И. Смирнов, в частности, подробно рассмотрел (1959 г.) работы по анализу и математической физике Д. Бернулли.

Особенно большая работа проведена в области эйлероведения. Помимо издания в русском переводе важнейших трудов Эйлера по анализу и аналитической геометрии были опубликованы значительная часть его переписки (1959—1961 гг.), аннотированный указатель всей переписки (1967 г.), описание его наследия, хранящегося в Архиве АН СССР, часть рукописей по механике. Всей этой работой руководили В. И. Смирнов и А. П. Юшкевич, участвовали в ней А. А. Киселев, Т. Н. Кладо, Ю. Х. Копелевич, Т. А. Лукина, И. Г. Мельников, Г. К. Михайлов и ряд ученых ГДР во главе с Э. Винтером. Эти публикации впервые осветили многие ранее неизвестные обстоятельства не только жизни и деятельности Эйлера, а также его корреспондентов, но и работы крупнейших научных учреждений XVIII в., прежде всего Петербургской и Берлинской академий наук.

В многочисленных посвященных Эйлеру статьях были по-новому раскрыты многие стороны его математического творчества. Общие характеристики Эйлера как математика даны в работах М. Я. Выгодского (1949 г.), В. И. Смирнова (1954 г.), А. О. Гельфонда (1957 г.), И. Г. Мельникова (1966 г.) и др. А. О. Гельфонд показал, что характерной для работ Эйлера по анализу является алгебраическая и конструктивная направленность идей и методов, обусловленная поисками простейших и практически удобных вычислительных алгоритмов решения задач математического естествознания и самой математики. Другая особенность этих работ — широкое применение экстремальных и вариационных принципов (также в теории чисел). Эти особенности творчества Эйлера в значительной мере определили направление методов и идей петербургской математической школы. М. Я. Выгодский и И. Г. Мельников изучили вопрос о критериях строгости, которыми руководствовался Эйлер в своих доказательствах.

Работы Эйлера по теории чисел, частично рассмотренные (1949, 1954 гг.) И. Г. Башмаковой, проанализированы А. О. Гельфондом (1958 г.). И. Г. Мельников и А. А. Киселев специально рассмотрели (1957 г.) эйлерово доказательство теоремы о существовании первообразного корня для любого простого модуля, подвергнутое в свое время критике Гауссом, и показали его принципиальную правильность. В извест-

ном смысле родственной этой статье является работа (1957 г.) И. Г. Башмаковой о доказательстве Эйлером основной теоремы алгебры, опубликованном в 1751 г. Гаусс усмотрел в доказательстве Эйлера порочный круг, и оно было почти забыто, хотя Фробениус дал ему в целом высокую оценку. И. Г. Башмакова выяснила, что, несмотря на неполноту, вывод Эйлера идейно близок к позднейшим алгебраическим доказательствам теоремы и может быть проведен со всей строгостью. Проследившая дальнейшую судьбу алгебраических доказательств теоремы, И. Г. Башмакова установила их тесную связь с общими проблемами теории уравнений, учением о симметрических функциях, группами подстановок и показала их роль в разработке теории групп и полей. А. Н. Хованский дал (1957 г.) обзор работ Эйлера и других ученых по теории цепных дробей и их приложениям. Неопубликованные рукописи Эйлера по теории чисел, как отмечалось выше, изучали Г. П. Матвиевская и др.



И. Г. Башмакова.

Н. И. Симонов в серии статей (1954—1969 гг.) и книге «Прикладные методы анализа у Эйлера» (1957 г.) подробно проанализировал работы Эйлера по дифференциальным уравнениям, впервые используя для этого многочисленные мемуары Эйлера по механике. Он установил, что Эйлеру принадлежит очень много приемов интегрирования и других открытий в области как обыкновенных дифференциальных уравнений (в частности, в теории особых решений); так и уравнений в частных производных. В своей книге Н. И. Симонов специально останавливается на усовершенствовании Эйлером введенного им для приближенного интегрирования обыкновенного уравнения 1-го порядка метода ломаных и дальнейшем развитии его Коши и другими, на разработке Эйлером метода малого параметра и приближенного интегрирования с помощью тригонометрических рядов, а также на приближенном решении отдельных краевых задач. Методы Эйлера интегрирования уравнений в частных производных и их роль в современной науке исследовал (1958 г.) также Ф. И. Франкль.

К. А. Рыбников подробно изучил (1949 г.) первые работы Эйлера по вариационному исчислению (до монографии 1744 г. включительно) и сопоставил методы Эйлера с приемами его предшественников. Непосредственным продолжением этого исследования являются статьи (1961, 1963 гг.) А. В. Дорофеевой, в которых дальнейшая история вариационного исчисления прослежена до середины XIX в.

Работы Эйлера по функциям комплексного переменного рассмотрены в монографии по истории аналитических функций (1951 г.) А. И. Маркушевича, статье (1951 г.) и книге (1962 г.) С. Е. Белозерова. Весьма

тщательно А. И. Маркушевич изучил (1958 г.) развитие в трудах Эйлера понятия функции, отметив, в частности, что уже в 1744 г. Эйлер фактически вышел за пределы класса «непрерывных» (по его определению) функций. Н. И. Симонов указал (1959 г.) на наличие в одной из работ Эйлера так называемой дельта-функции Дирака.

Вопросы обоснования анализа у Эйлера рассматривались С. Я. Лурье (1935 г.), М. Я. Выгодским (1949 г.), А. П. Юшкевичем (1959 г.) Исследованы также геометрические работы Эйлера. Б. А. Розенфельд рассмотрел (1957 г.) применявшиеся Эйлером геометрические преобразования — симметрии и движения на плоскости, движения в пространстве и связи их с кватернионами, подобие и аффинные преобразования, наконец, конформные преобразования. Б. Н. Делоне дал обзор всех геометрических работ Эйлера и специально рассмотрел несколько вопросов: парадокс Крамера, теорему о многогранниках, кривизну поверхностей, ортогональные траектории, развертывающиеся поверхности и картографию. Эйлер является зачинателем трех крупнейших направлений новой геометрии: внутренней геометрии поверхностей, теории конформных отображений и топологии.

Значительное количество работ посвящено исследованию вопросов преподавания математики в учебных заведениях XVIII в. А. Н. Боголюбовым изучена история преподавания математики в петербургских высших и технических учебных заведениях, Московском университете, Харьковском коллегиуме. Н. А. Чайковский исследовал постановку преподавания математики во Львовском университете. Ряд статей посвящен изучению математики в Дерптском и Виленском университетах. З. Жемайтис изучил математическое творчество профессора Виленского университета Ф. Норвайши. В. Е. Прудников рассмотрел педагогическое творчество ряда русских математиков-педагогов XVIII и XIX вв. Опубликованы работы о творчестве Л. Ф. Магницкого (А. П. Денисов, 1967 г.), о Н. Г. Курганове (А. П. Денисов, 1961 г.), по истории обоснования анализа в России в XVIII и начале XIX в. (Р. С. Зотина, 1958 г.), о П. Сулиме (Е. С. Шатунова, 1959 г.).

Много работ посвящено творчеству великих русских математиков XIX в. Подробными комментариями и разъясняющими статьями снабжено полное собрание сочинений Н. И. Лобачевского (главный редактор В. Ф. Каган). Статьи и комментарии для этого собрания написали В. Ф. Каган, А. П. Котельников, Б. Л. Лаптев, А. П. Норден, А. Н. Хованский, Г. Л. Лунц, А. Н. Колмогоров, Н. И. Идельсон и др. Некоторые вопросы, относящиеся к развитию геометрии Лобачевского, исследовал (1951, 1952 гг.) А. С. Смогоржевский. Наряду с глубоким изучением геометрических открытий Лобачевского тщательно изучены работы Лобачевского по анализу (Г. Л. Лунц), а также по алгебре (Н. Г. Чеботарев). А. П. Норден подробно проанализировал (1958 г.) вопросы обоснования геометрии у Лобачевского. Исследованиям Лобачевского по алгебре посвящены статьи И. Г. Башмаковой и А. П. Юшкевича (1949 г.), В. Ф. Рогаченко (1952 г.), П. Г. Конторовича и Д. И. Мильмана (1953 г.). Мировоззрение Лобачевского исследуется в статьях и книге С. А. Яновской «Передовые идеи Н. И. Лобачевского —

орудие борьбы против идеализма в математике» (1950 г.); в них подвергнуто критике истолкование воззрений Лобачевского в духе конвенционализма. Ценные документы о жизни Лобачевского опубликовали Л. Б. Модзалевский (1948 г.) и Б. В. Федоренко (1957 г.). Как отмечалось выше, биографию великого геометра написал В. Ф. Каган.

Гораздо полнее и глубже изучены жизнь и научные труды М. В. Остроградского. Выше говорилось об издании его сочинений и биографий. Рукописное наследие Остроградского изучалось (1951 г.) Е. Я. Ремезом. В 1961 г. под редакцией И. Б. Погребысского и А. П. Юшкевича издан сборник «Михаил Васильевич Остроградский», содержащий, в частности, исследования документов к его биографии, публикации В. И. Антроповой его лекций по интегральному исчислению. А. П. Юшкевичем и В. И. Антроповой опубликованы статьи Остроградского по математической физике, рукописи которых хранились в архиве Французской академии наук (1965 г.). Участие Остроградского в исследованиях школы Коши представляется теперь гораздо более значительным и непосредственным, чем ранее. Работы Остроградского по кратным интегралам изучались В. И. Антроповой (1957—1962 гг.), по математической физике — В. И. Антроповой, И. Б. Погребыским и И. З. Штокало (1959—1961 гг.), по вариационному исчислению — Е. Я. Ремезом и Н. В. Александровой (1959 г.), по теории вероятностей — Б. В. Гнеденко (1951 г.), по алгебре — И. Г. Башмаковой и Л. А. Сорокиной (1962 г.), его педагогическая деятельность — И. А. Мароном (1950—1962 гг.).

Рядом исследователей изучалось научное творчество В. Я. Буняковского и О. И. Сомова. О. И. Сомову посвящена книга (1965 г.) Ф. Д. Крамара и И. Д. Молюкова.

Исследования о творчестве Чебышева изданы в двух сборниках «Научное исследование П. Л. Чебышева» (1945 г.), дополняющих комментарии в пятитомном собрании его сочинений, вышедшем в 1944—1951 гг. Первый сборник содержит статьи о работах Чебышева по теории полино-



Н. И. Симонов.



А. С. Смогоржевский.



Г. Л. Лунц.

мов (Н. И. Ахиезер), теории вероятностей (С. Н. Бернштейн), теории чисел (И. М. Виноградов, Б. Н. Делоне), интегрированию алгебраических функций (В. В. Голубев), теории наилучшего приближения функций (В. Л. Гончаров). В этих статьях дан глубокий анализ математических трудов Чебышева, а также прослеживается дальнейшее развитие его идей и методов вплоть до середины XIX в. Во втором сборнике помещены статьи И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского, З. Ш. Блоха и В. В. Добровольского о механизмах Чебышева и его теоретических изысканиях в этой области. В 1957 г. опубликованы работы А. А. Гусака, ученика С. А. Яновской, о первых исследованиях Чебышева по теории наилучшего приближения функций и предистории этих проблем.

Советскими учеными исследованы жизнь и творчество ряда ближайших учеников и преемников Чебышева. Весьма полно рассмотрены Б. Н. Делоне (1947 г.) и другими исследования А. Н. Коркина по теории квадратичных форм, выполненные совместно с Е. И. Золотаревым. В работе Е. П. Ожиговой дан очерк жизни А. Н. Коркина и проанализированы его научные труды и лекционные курсы. Рассмотрены исследования А. Н. Коркина по теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Несколько исследований, как упоминалось выше, Р. О. Кузьмина, Б. Н. Делоне и И. Г. Башмаковой посвящено классическим работам по теории делимости Е. И. Золотарева. Важные архивные документы использованы в книге Е. П. Ожиговой о Золотареве. Ценные комментарии содержатся в «Избранных трудах по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля» А. А. Маркова, изданных под редакцией Н. И. Ахиезера (1948 г.), а также в его «Избранных трудах» (Теория чисел. Теория вероятностей), изданных под редакцией Ю. В. Линника (1951 г., комментарии Ю. В. Линника, Н. А. Сапогова, О. В. Сарманова и В. Н. Тимофеева). В обоих изданиях помещены очерки жизни знаменитого математика (во второй из названных книг очерк написан его сыном А. А. Марковым). Эти издания далеко не исчерпывают всего творчества А. А. Маркова. В архивах АН СССР, Московского университета и других хранится чрезвычайно интересная переписка крупнейших математиков. Некоторые из этих материалов опубликованы, в частности письма некоторых французских ученых к Ляпунову (В. И. Смирнов, 1957 г.) и Маркову (Е. П. Ожигова, 1968 г.). Проанализирована переписка Маркова с А. А. Чупровым по вопросам математической статистики (Х. Ондар, 1968 г.).

Неоднократно издавались труды А. М. Ляпунова (отдельными из-

даниями, в собрании сочинений в пяти томах, 1954—1965 гг.). В 20-е годы, как упоминалось выше, В. И. Смирновым были изданы некоторые оставшиеся в рукописи работы А. М. Ляпунова. В статьях, опубликованных после Великой Отечественной войны (1948—1953 гг.), В. И. Смирнов с большой полнотой проанализировал труды Ляпунова по устойчивости движения и равновесия механических систем с конечным числом степеней свободы, фигурам равновесия вращающейся жидкости и их устойчивости, теории потенциала и задаче Дирихле; работы по теории вероятностей рассмотрены (1948 г.) С. Н. Бернштейном. В. И. Смирнову принадлежит также ряд кратких очерков жизни А. М. Ляпунова.

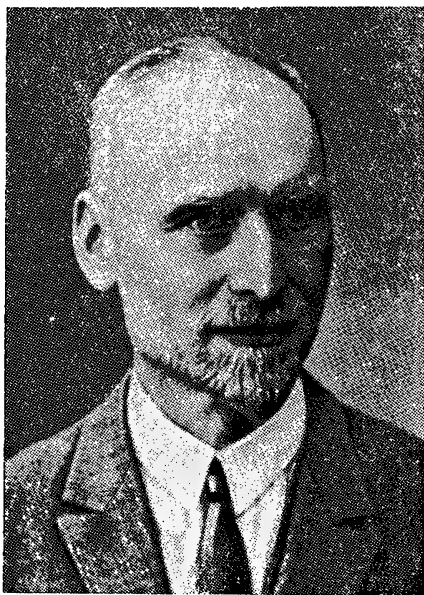
В последние годы изданы сочинения Н. Я. Сониной, Н. М. Гюнтера, С. Н. Бернштейна, Н. Н. Лузина, П. С. Урысона, О. Ю. Шмидта, В. В. Голубева и др. Их творчеству посвящены многочисленные статьи. Несомненно, что продолжение работы в этом направлении является условием более полного и точного знания истории математики в нашей стране. До сих пор недостаточно полно исследованы математические работы целого ряда видных ученых, например Ю. В. Сохоцкого, К. А. Поссе, Н. В. Бугаева. Изучение их работ и оценка (или переоценка) с точки зрения современной науки приводит иногда к неожиданным результатам. Примером может служить одно из направлений творчества Ю. В. Сохоцкого, а именно его открытия в теории аналитических функций, значение которых раскрыл (1950 г.) А. И. Маркушевич.

Исследование жизни и научной деятельности советских математиков, в сущности, еще только начинается. Несмотря на то что вклад их в развитие математики во много раз превышает все, что было сделано в этой области до 1917 г., исследован он далеко не полностью. Изучено научное творчество лишь отдельных ученых: Д. А. Граве, О. Ю. Шмидта, Н. Н. Лузина. И. А. Наумов исследовал научную, педагогическую, популяризаторскую и общественную деятельность основателя харьковской геометрической школы Д. М. Синцова. Л. А. Люстерник в ряде очерков, опубликованных в «Историко-математических исследованиях», рассмотрел зарождение и первоначальное развитие московской математической школы Н. Н. Лузина. В целом ряде статей, написанных по различным поводам, даны общие очерки жизни и деятельности многих советских математиков, уточнена биография их работ. Некоторая попытка составить схему истории современной советской математики сделана в настоящем издании (см. т. 3, гл. I—IV).

Остановимся еще на одной малоразработанной области — истории отдельных математических дисциплин. Пока можно указать лишь на немногие работы: Б. В. Гнеденко — о развитии теории вероятностей в России (1948—1956 гг.), В. В. Гуссова — о теории гамма-функций (1953 г.) и теории цилиндрических функций (1954 г.), В. В. Лихина — о теории функций и чисел Бернулли (1959 г.), А. К. Сушкевича — об алгебраических исследованиях русских ученых (1951 г.), Н. И. Стяжкина и В. Д. Силакова — «Краткий очерк истории общей и математической логики в России» (1962 г.). Изучено развитие отдельных математических наук в нашей стране за годы Советской власти. Это подробные обзоры развития математики в СССР по отраслям, написанные ведущими



И. Я. Депман.



Я. Х. Сарв.

специалистами (см. сборники «Математика в СССР за 15 лет», «Математика в СССР за 30 лет», «Математика в СССР за 40 лет», «История отечественной математики»).

Весьма многочисленны работы по истории математических исследований и математического образования в университетах *Москвы, Ленинграда, Казани, Киева, Харькова, Томска*, а также в других высших учебных заведениях страны, о математических обществах и съездах. Они представляют большую ценность, хотя и различны по степени подробности и полноты изложения. Эту сторону развития математики изучали П. С. Александров, Н. И. Ахиезер, С. Е. Белозеров, Н. Д. Беспамятных, М. Я. Выгодский, Б. М. Гагаев, Р. И. Галченкова, Б. В. Гнеденко, Л. Н. Грацианская, В. А. Добровольский, С. Н. Киро, А. А. Киселев, Н. Н. Круликовский, А. Ф. Лапко, Б. Л. Лаптев, Э. Б. Лейбман, И. И. Лихолетов, Л. А. Люстерник, Л. Е. Майстров, М. Н. Марчевский, Е. П. Ожигова, В. Е. Прудников, В. В. Степанов, А. К. Сушкевич, А. П. Юшкевич, С. А. Яновская и др.

Изучению развития математики в советских республиках посвящены отдельные работы и статьи. Таковы, например, статьи И. И. Гихмана, Б. В. Гнеденко и И. Б. Погребысского по истории математики на Украине (1956 г.), книга И. З. Штокало «Развитие математики на Украине за 40 лет Советской власти» (1958 г.), А. И. Гусейнова и З. И. Халилова — о математике в Азербайджане (1957 г.), О. А. Жаутыкова — о математике в Казахстане (1958 г.).

Систематическое изучение истории математики в Эстонии и Латвии началось лишь в 50-х годах. В первую очередь — это исследования И. Я. Депмана о М. Бартельсе, учителе Н. И. Лобачевского и с 1821 г. профессора математики в Тарту, о К. М. Петерсоне, о развитии математики в Тартуском университете (1958 г.) и некоторые другие, работа С. Д. Россинского, в которой проведен анализ кандидатской диссертации К. М. Петерсона (1959 г.; русский перевод диссертации одновременно опубликовали И. Я. Депман и Я. Х. Сарв).

Популярные очерки о жизни и деятельности четырех замечатель-

ных математиков Тартуского университета (М. Бартельса, Ф. Миндинга, Ф. Молина, Г. В. Колосова) написал (1955 г.) Г. Ряго. Несколько исследований о математике в Тартуском университете принадлежит Ю. Г. Лумисте, показавшему, в частности (1962 г.), что в работе К. Э. Зенфа содержатся формулы, равносильные формулам Френе. В 1963, 1964 гг. Ю. Г. Лумисте опубликовал очерки развития математики в Эстонии начиная с XVII в. А. Д. Мышкис и И. М. Рабинович установили (1955 г.) приоритет латвийского ученого П. Боля в открытии и доказательстве теоремы о неподвижной точке при непрерывном отображении шара в себя. Они издали «Избранные труды» П. Боля с большой вводной статьей (1960 г.) и брошюру «Математик Пирс Боля из Риги» (1965 г.). В связи со 100-летием со дня рождения П. Боля в Риге в 1965 г. проводились юбилейные чтения. В докладах, прочитанных Э. Тамме, А. Бунгом и другими (резюме их изданы отдельной брошюрой), было раскрыто много новых сторон деятельности и творчества выдающегося математика.

Ряд статей посвящен истории преподавания математики в средней школе, в частности статьи А. В. Ланкова (1949 г.) и Б. П. Бычкова (1951, 1952 гг.) о борьбе русских педагогов за реформу школьных программ и введение начал высшей математики. Издана книга А. В. Ланкова «К истории развития передовых идей в русской методике математики» (1951 г.). И. К. Андронов опубликовал (1957 г.) работу по истории математического образования в СССР. Им составлена также программа курса истории элементарной математики. Р. А. Симонов изучил (1957 г.) педагогическое наследие А. Ю. Давидова. В «Очерках истории методики математики» (1968 г.) Н. В. Метельского рассмотрена история движения за реформу преподавания математики в русской дореволюционной средней школе начала XX в. Б. Н. Белый изучал методику математики в трудах В. П. Ермакова, К. М. Щербаня, П. А. Долгушина и в Киевском физико-математическом обществе.

Исследования по истории математики зарубежных стран

Математика древнего Востока. Многие исследования советских историков науки посвящены математике древнего мира. Первые по времени работы о древнем Египте принадлежат В. В. Струве. М. Я. Выгодский в докторской диссертации (1939 г.) и книге об античной арифметике и алгебре (1941 г.) подробно рассмотрел методы арифметических вычислений и решений алгебраических уравнений в древнем Египте и Вавилоне, а также арифметические вычисления древних греков и изложил ряд новых точек зрения. Так, он подверг критике объяснения Нейгебауера и дал свое объяснение происхождения вавилонских таблиц умножения, установил возможность арифметического истолкования решения некоторых вавилонских задач,



И. Н. Веселовский.

трактуемых Нейгебауером алгебраически, выдвинул новую гипотезу¹ о происхождении египетской таблицы дробей вида $\frac{2}{2n+1}$.

В работе И. Н. Веселовского «Вавилонская математика» (1955 г.) выдвигаются возражения против гипотезы Нейгебауера о происхождении шестидесятиричной позиционной системы вавилонян из системы мер весов и денег. По мнению Веселовского, шестидесятиричный характер нумерации выработался при счете на пальцах, а принцип поместного значения без употребления нуля возник из специфической техники вычислений, которые вавилоняне выполняли, вероятно, на абаке.

Весьма интересный клинописный текст, хранящийся в Государственном Эрмитаже, расшифрован (1958 г.) А. А. Вайманом.

Это табличка № 015189, содержащая решение задачи о делении трапеции на попарно равновеликие части линиями, параллельными основаниям, при условии рациональности длин оснований и делящих линий. Решение дается в виде последовательности чисел, которые Вайман назвал вавилонскими; вавилонские числа тесно связаны с так называемыми пифагоровыми тройками, также известными в древнем Вавилоне. Вайман реконструировал способ, которым в древности могли находить тройки вавилонских чисел. Исследования А. А. Ваймана и других ученых обобщены в его книге «Шумеро-вавилонская математика» (1962 г.). В этой книге многие факты вавилонской математики объяснены по-новому, широко использованы клинописные хозяйственные тексты.

Оригинальные реконструкции египетских и вавилонских задач принадлежат Г. П. Боеву и А. Е. Раик. В частности, Боев дал (1950 г.) новое толкование задачи Московского папируса, в которой согласно В. В. Струве находится площадь поверхности полусферы, а согласно Питу — полуцилиндра. Как полагает Боев, здесь вычисляется площадь поверхности конуса. А. Е. Раик предложила (1956 г.) новое возможное объяснение происхождения данного в этом же папирусе правила вычисления объема усеченной пирамиды с квадратными основаниями, а также приближенного правила вычисления площади круга, подробно разобрала (1953 г.) многие вавилонские задачи на квадратные уравнения. Ей принадлежит (1955 г.) простая реконструкция решения задач, которые, согласно Нейгебауеру, вавилоняне сводили к биквадратным уравнениям, с помощью замены переменных и правила ложного положения. Эти и другие исследования А. Е. Раик обобщены в ее «Очерках по истории математики в древности» (1967 г.).

¹ Другие гипотезы относительно этой таблицы выдвинули С. А. Яновская (1947 г.) и И. Н. Веселовский (1948 г.).

Математикой древнего Вавилона занимался также Г. С. Раздымаха. Он широко использовал в своих исследованиях тексты, содержащие расчеты технического и экономического характера в земледелии, строительстве и ремеслах.

Греческая математика. Как упоминалось выше, М. Я. Выгодский дал (1941 г.) анализ древнегреческой арифметики от устного и пальцевого счета и абак до методов извлечения квадратных и кубических корней. Он подверг при этом убедительной критике концепцию о греческой математике как преимущественно геометрической, показал, что уже в эпоху Архимеда греки обладали развитой теорией арифметических операций, и предложил реконструкцию архимедова приема извлечения квадратного корня, подобную применению цепных дробей.

С. Я. Лурье высказал (1936 г.) предположение, что в основе методов приближенных вычислений античности лежат геометрические построения, а не арифметические преобразования.

Советские ученые обратили особое внимание на тесное переплетение философских и математических исследований в античности. Мы уже упоминали о работе М. Я. Выгодского «Платон как математик».

Инфинитезимальным вычислениям Демокрита посвящено несколько работ С. Я. Лурье. Им сделана попытка (1935 г.) реконструкции метода неделимых великого атомиста. Согласно этой реконструкции у Демокрита не только физические, но и математические величины делятся лишь на конечное, хотя и очень большое, число неделимых частей; на этой основе Демокрит и строил своеобразное исчисление и стремился доказать непротиворечивость применявшихся правил. В атомистических процедурах Лурье усматривает единственный источник античных открытий в области квадратур и кубатур. Развитый позднее Евдоксом, Евклидом и Архимедом так называемый метод исчерпывания он считает совершенно бесплодным для открытий и годным лишь для проверки результатов, найденных каким-либо иным способом. Эта концепция, разделяемая М. Я. Выгодским, вызвала ряд возражений, например со стороны Н. И. Идельсона (1946 г.), А. П. Юшкевича (1948, 1965 гг.), И. Г. Башмаковой (1953, 1958 гг.), которые, усматривая в методе предела раннюю форму теории предельных переходов, считают, что в инфинитезимальных исследованиях греков не было разрывов между приемом открытия и приемом изложения. Основными слабыми сторонами этой античной процедуры являются отсутствие упрощающих и сокращающих рассуждений, общих понятий и ограниченность запаса известных древним грекам числовых соотношений (прогрессия, сумма ряда квадратов натуральных чисел).



С. Я. Лурье.

«Началам» Евклида посвящено несколько статей и дискуссий. Общий разбор содержания евклидовых «Начал» принадлежит (1948 г.) М. Я. Выгодскому. При этом он подкрепил новыми аргументами распространенное мнение о том, что Евклид был платоником. Против такой трактовки Евклида выступили В. Н. Молодший, Л. Е. Майстров (1949 г.) и И. Г. Башмакова (1958 г.); по мнению Башмаковой, абстрактность «Начал» объясняется не идеалистическими установками Евклида, а собственно математическими задачами, ставившимися при написании «Начал». Аналогичные взгляды развивал (1956 г.) Э. Кольман.

В одном из исследований (1956 г.) С. А. Яновская поставила вопрос, почему еще в античной древности как аксиоматическая теория строилась лишь геометрия. Предлагаемое ею объяснение состоит в том, что в арифметике натуральных чисел алгоритмы решения задач носили абсолютный характер (доводили задачу до натурального числа), в геометрии же применялись алгоритмы сведения массы ее задач к немногим задачам, принятым непосредственно за решенные; аксиомы при этом играли роль не посылок, а правил вывода.

VII—IX арифметические книги «Начал» изучены И. Г. Башмаковой (1948 г.) и Н. Г. Алимовым (1955 г.). Многие историки считают построение этих книг не безупречным. Г. Цейтен находил порочный круг в выводе основной для теории делимости теоремы о том, что простое число, делящее произведение двух целых чисел, делит, по крайней мере, один из сомножителей. Опираясь на положение, что Евклид различал две категории чисел, числа-кратности, свойства которых считаются неизвестными, и общие числа-отрезки, И. Г. Башмакова показала, что евклидова теория делимости целых чисел-отрезков обоснована столь же строго, как и собственно геометрические книги «Начал». В статье выяснено значение VII—IX книг в системе «Начал» как необходимой предпосылки X книги, а следовательно и теории правильных многогранников. Н. Г. Алимов сравнил теорию отношений V и VII книг «Начал». Особенности общей теории отношений V книги он объясняет стремлением Евклида обойтись без предположения о делимости величин, как в смысле деления на равные части, так и в смысле вычитаемости меньшей величины из большей. Теория отношений V книги охватывала по существу и непрерывные и дискретные количества, и понятие величины распространилось на обе эти категории. Сохранение старой доевдоксовой теории отношений целых чисел в VII книге И. Г. Башмакова объясняет специфическим теоретико-числовым содержанием VII—IX книг. Н. Г. Алимов, напротив, видит здесь попытку Евклида оградить себя от философских упреков в смешении разнородных понятий величины и количества и даже в сведении непрерывного к дискретному. В отличие от И. Г. Башмаковой Н. Г. Алимов считает теорию отношений VII книги логически неотработанным сочетанием доевдоксовой теории пропорций с более поздней формой ее развития. Это исследование Алимова непосредственно связано с разработанной им теорией измеримых величин.

А. Е. Раик и А. И. Маркушевич написали (1948 г.) интересные работы о классификации квадратичных иррациональностей в X книге «Начал». Д. Д. Мордухай-Болтовской отметил роль «Поризмов» Евклида в предше-

тории аналитической геометрии и связь его же «Данных» с тригонометрией, а также предложил характеристику типов проблем, составляющих содержание обоих названных сочинений.

Вопреки общепринятому мнению о том, что Архимед пользовался только интегральными методами и не применял дифференциальных, И. Г. Башмакова показала (1953, 1964 гг.), что в трактате «О спирали» он дал общий метод определения касательных к плоским кривым в полярной системе координат с помощью характеристического треугольника и нескольких положений, равносильных началам пределов. В связи с исследованием задачи о делении шара (по существу требующим определения максимума $x^2 (a-x)$) Архимед разработал общий прием отыскания необходимого условия максимума сведением к задаче об отыскании общей касательной к двум плоским кривым в их общей точке и правило, равносильное дифференцированию произведения двух функций. Сочинение «О спиралях» оказало влияние на ряд ученых XVII в., занимавшихся задачами о построении касательных и экстремумах.

Итоги своих исследований в указанных направлениях И. Г. Башмакова систематизировала и развила далее в «Лекциях по истории математики в древней Греции» (1958 г.). Затем вышло еще несколько ее работ, относящихся к этой же области. В одной из них, отвергая, как и Нейгебауер, мнение (Цейтена, Ван дер Вардена и др.), что в это время греческая математика пришла в упадок, Башмакова отстаивает другую трактовку особенностей ее развития, отличную от предложенной Нейгебауером, подчеркивая связь выдвинувшихся на первый план алгебраических и вычислительных методов с классической греческой математикой (1961, 1963 гг.). Изучая в этой связи «Арифметику» Диофанта, она делает вывод, что в методе нахождения рациональных точек на кубической кривой Ферма увидел общий прием нахождения алгебраическим путем касательных и экстремумов. По мнению И. Г. Башмаковой (работы 1966, 1968 гг.), Диофант признавал существование отрицательных чисел.

Ф. А. Медведев исследовал «Математическое собрание» Паппа и установил, что оно сыграло существенную роль в распространении в XVI—XVII вв. метода неделимых (1968 г.).

Математика средних веков. Изучение истории средневековой математики связано со специфическими трудностями. В отличие от математики древней Греции или нового времени в этой области до сих пор не изучено огромное количество оригинальных научных трудов, большей частью рукописей, хранящихся в библиотеках почти всего мира. И хотя критическая публикация текстов началась давно, многочисленные арабские, санскритские, латинские, славянские и другие сочинения все еще ждут исследователей. Естественно, что значительное место в исследованиях по истории средневековой математики занимало выявление и изучение рукописей, их публикация, переводы, описания, комментирование.

Б. А. Розенфельд и А. П. Юшкевич помимо теорий параллельных линий ат-Туси и Хайяма, о которых упоминалось выше, изучили (1958—1963 гг.) еще несколько арабских сочинений по этому вопросу. В

результате стала яснее история попыток математиков арабских стран обосновать по-новому теорию параллельных линий. Такие попытки были начаты в IX в. ал-Джаухари, продолжены Сабитом ибн Коррой, Ибн ал-Хайсамом, Хайямом, ат-Туси и другими на протяжении многих веков, причем были предвосхищены многие идеи Саккери и Ламберта и в сущности доказаны простейшие теоремы неевклидовой геометрии. Эти работы математиков стран ислама оказали существенное влияние на средневековую европейскую науку.

Пересмотрены некоторые работы, посвященные инфинитезимальным методам. А. П. Юшкевич показал (1966 г.), что вычисление в трактате Сабита ибн Корры о квадратуре параболы равносильно вычислению интеграла $\int_0^1 \sqrt{x} dx$; здесь впервые интегрирование было распространено

на дробную степень $y = x^{\frac{1}{2}}$ и реализовано путем деления интервала отрезка оси абсцисс на неравные части (образующие арифметическую прогрессию). Дж. ад-Даббах (Ирак; учился в СССР, ученик И. Г. Башмаковой и Б. А. Розенфельда) рассмотрел (1965 г.) трактаты Сабита ибн Корры и его внука Ибн Синана о квадратуре параболы и кубатуре параболических тел, а также трактат братьев Бану Муса об измерении плоских и шаровых фигур и трактат Ибн ал-Хайсама об измерении шара и изопериметрических фигурах. Особенно интересен метод квадратуры параболы Ибн Синана, основанный на применении аффинного преобразования.

К изучению инфинитезимальных методов у математиков Востока относятся работа (1963 г.) А. К. Кубесова об инфинитезимальных рассуждениях ат-Туси, носящих следы атомистических рассуждений древних, а также исследование (1968 г.) А. Ю. Сансура о философском трактате Ибн Корры, в котором идея актуально бесконечного множества, применявшаяся в его трактате о карастуне, обосновывается с философской точки зрения. Б. А. Розенфельд составил (1966 г.) каталог всех математических рукописей на арабском и персидском языках, хранящихся в библиотеках СССР.

Математике в древнем и средневековом Китае посвящена работа (1955 г.) А. П. Юшкевича. В ней отмечено сходство в главном всех трех направлений восточной вычислительно-алгоритмической математики (Китай, Индия, арабские страны), показаны связи между ними. В 1955 г. изучением математики Китая занялась Э. И. Березкина. Ей принадлежит первый перевод на русский язык и публикация (1956 г.) написанной в I в. до н. э. (или еще раньше) классической «Математики в девяти книгах». В комментариях и статье к переводу Э. И. Березкина подробно рассмотрела все алгоритмы, применяющиеся в названной книге, в том числе метод «фан-чэн» решения систем линейных уравнений, в котором впервые были применены отрицательные числа (вопрос о появлении отрицательных чисел был рассмотрен ранее А. П. Юшкевичем). Русское издание «Математики в девяти книгах» впервые познакомило историков науки в деталях с древнекитайской техникой вычислений и приемами решения арифметических, алгебраических и геометрических задач и привлекло внимание многих ученых. М. Я. Выгодский исследовал (1960 г.)

вопрос о происхождении и распространении «правила двух ложных положений», встречающегося впервые в этом сочинении; А. Е. Раик предложила (1961 г.) новые убедительные реконструкции вывода правил расчета некоторых объемов.

Несколько позднее (1963 г.) Э. И. Березкина опубликовала комментированный перевод (также первый перевод на европейский язык) «Математического трактата», составленного примерно в III в. н. э. Суньцзы. Работая над этим переводом, она в деталях изучила историю десятичных дробей в древнем Китае. Березкина исследовала (1966 г.) также практическое руководство к вычислительной работе в учреждениях Китая середины I тысячелетия н. э. — анонимный «Математический трактат пяти ведомств».

Л. С. Барановская проанализировала (1954 г.) монгольское «Сочинение о координатах» 1712 г.

Изучение индийской математики в нашей стране только начинается. Э. Я. Бахмутская исследовала (1960, 1961 гг.) бесконечные ряды в работах математиков южной Индии XV—XVI вв. А. И. Володарский и О. Ф. Волкова опубликовали (1966 г.) перевод с санскрита трактата Шридхары «Патиганита» (X в.). В статье и примечаниях Володарского к переводу впервые широко использован анонимный санскритский комментарий. Володарский подробно разработал (1967 г.) труд по арифметике Магавиры.

Ряд исследований посвящен математике средневековой Европы. С. Н. Шрейдер перевел на русский язык трактат Иордана Неморария «О данных числах». В подготовке публикации этого перевода и комментариев к нему (1959 г.) принял участие И. Н. Веселовский. Им впервые разъяснен текст нескольких задач, ранее бывших загадкой для исследователей. Особенные заслуги в изучении средневековой науки в Европе принадлежат В. П. Зубову. Он опубликовал русские переводы рукописей (первые переводы на один из новых языков) важнейшего труда Н. Орема «О конфигурации качеств» (1958 г.) и трактата Н. Орема «О соизмеримости и несоизмеримости движений неба» (1960 г.), содержащего интересные соображения теоретико-вероятностного характера; оба перевода снабжены статьями и комментариями. Глубокому и оригинальному анализу В. П. Зубов подверг вопрос о математизации естествознания в XIII—XIV вв. (1959, 1962 гг.), проблему пространства и времени у парижских номиналистов XIV в. (1960 г.), концепцию точки в XIV в. (1961 г.), трактат Брэдвардина «О континууме» (1960 г.), трактат Герарда Брюссельского «О движении» (опубликован посмертно, 1965 г.) и многие другие, в значительной части рукописные сочинения. Математика оксфордской и парижской школ XIV в. неотделима от их механики,



В. П. Зубов.

и В. П. Зубов частично подытожил свои изыскания о средневековой европейской математике в большом труде «У истоков механики»; в посмертно изданной монографии «Развитие атомистических представлений до начала XIX века» (1965 г.) также использованы, хотя и в другом аспекте, эти исследования. Со всеми этими изысканиями тесно связаны и работы В. П. Зубова по истории математики в России. К упомянутым выше добавим статью об обнаруженном (1962 г.) им русском переводе «Трактата о сфере» Сакробоско.

Многочисленные работы последних десятилетий по математике средних веков обобщены А. П. Юшкевичем в книге «История математики в средние века» (1961 г., дополненный немецкий перевод — 1964 г.). В этой книге Юшкевич обосновал впервые высказанную им в 1951 г. концепцию средневековой математической мысли, в которой математика в странах Востока и Европы выступает как нечто единое целое. Характерной общей чертой этого периода является преимущественное развитие вычислительных методов, связанных с основными общественными потребностями того времени, с задачами астрономии, географии и, в меньшей степени, механики и оптики, создание на основе расчетных алгоритмов новых важных методов и понятий, а также целых разделов математики. (Эта общность особенно отчетливо выступает, если проследить историю математики той поры не по странам, а по дисциплинам, как сделали А. П. Юшкевич и Б. А. Розенфельд в работе 1960 г.) В книге рассматриваются также особенности математики в Китае, Индии, странах ислама и Европы. Содержание ее показывает, насколько увеличились знания в этой области за последние годы, в частности благодаря усилиям советских ученых. Вместе с тем возникли новые теоретические проблемы, частично историко-математические, частично общие для всей истории науки. Эти проблемы сформулированы в докладе В. П. Зубова, Б. А. Розенфельда и А. П. Юшкевича на IV Всесоюзном математическом съезде (1961 г.) и докладе А. П. Юшкевича на Международном конгрессе математиков (Москва, 1966 г.).

Математика нового времени. Эпоха формирования новой математики XVII и XVIII вв. привлекла, естественно, целый ряд исследователей. На первых порах, в 30-е годы, немалое значение имело издание переводов на русский язык работ классиков математики и составление к ним комментариев и сопровождающих статей. Так, М. Я. Выгодский дал (1935 г.) подробный анализ «Стереометрии винных бочек» Кеплера, С. Я. Лурье исследовал (1940 г.) «Геометрию» Кавальери, причем были рассмотрены и вызванные этими сочинениями возражения и споры. Вслед за Клейном, хотя и несколько по-иному, Выгодский и Лурье противопоставляли логическую строгость творческой активности и эту концепцию, развитую ими также применительно к античному методу исчерпывания, распространили на разработку инфинитезимальных приемов в XVII—XVIII вв. Против такого деления математики на творческие и критические периоды выступали другие советские историки математики, например С. А. Яновская (1950, 1966 гг.) и К. А. Рыбников (1954 г.).

«Всеобщую математику» Декарта, включающую реформированную алгебру и ее геометрические приложения, и специально вопрос о том,

в каком смысле надлежит говорить о возникновении в XVII в. аналитической геометрии, изучали с различных точек зрения Д. Д. Мордухай-Болтовской (1952 г.) и А. П. Юшкевич (1938, 1953 гг.). С. А. Яновская указала (1966 г.) на индуктивный, ступенчатый характер декартова геометрического метода решения алгебраических уравнений и последовательного расширения запаса алгебраических кривых, служащих для построения корней. И. Г. Башмакова исследовала работы Ферма по теории чисел (1949 г.), его метод касательных и экстремумов, а также связи этого метода с «Арифметикой» Диофанта (1966 г.); другие стороны метода, сближающие его с современной трактовкой вопроса, изучены А. П. Юшкевичем (1938 г.), С. А. Яновской (1940 г.) и К. А. Рыбниковым (1958 г.). «Арифметику бесконечных» Валлиса подробно проанализировал (1950, 1961 гг.) Ф. Д. Крамар, инфинитезимальные приемы Б. Паскаля исследованы (1962 г.) Э. Я. Бахмутской, а его «Опыт о конических сечениях» рассмотрен (1961 г.) Г. И. Игнациусом, работы Гюйгенса по механике и математике изучались (1951 г.) К. К. Баумгартом, биография Гюйгенса написана (1962 г.) У. И. Франкфуртом и А. М. Френком.

Большое количество работ посвящено Ньютону, особенно его взглядам на основания исчисления бесконечно малых, т. е. его варианты метода пределов (С. А. Яновская, 1933 г.; Н. Н. Лузин, 1943 г.; С. Я. Лурье, 1943 г.; А. Н. Колмогоров, 1946 г.; А. П. Юшкевич, 1947 г.; Ф. Д. Крамар, 1961 г.). Метод параллелограмма Ньютона и его дальнейшее развитие изучил Н. Г. Чеботарев (1943 г.), его теорию потенциала и произведенные при этом интеграции — Л. Н. Сретенский (1943 г.) и В. И. Антропова (1966 г.), геометрические труды — Н. А. Глаголев (1946 г.), «Всеобщую алгебру» — А. П. Юшкевич (1948 г.) и специально открытия Ньютона и Варинга в проблеме приводимости — И. Г. Башмакова (1959 г.), асимптотические ряды у Ньютона — М. В. Чириков (1960 г.).

Особенности дифференциального и интегрального исчислений Лейбница и его поиски универсального алгоритма решения задач математического естествознания охарактеризовал (1948 г.) А. П. Юшкевич; аналогичные тенденции в математическом творчестве Ньютона раскрыл (1957 г.) К. А. Рыбников. Интегрирующий механизм Лейбница рассмотрен (1952 г.) А. Б. Штыканом, им же было обращено внимание (1960 г.) на применение метода изоклин И. Бернулли. Первый курс дифференциального исчисления, составленный Лопиталем на основе лекций И. Бернулли, изучен (1935 г.) А. П. Юшкевичем. Разнообразные попытки обоснования анализа Лейбница были сопоставлены (1967 г.) А. П. Юшкевичем, а споры по этому вопросу между французскими картезианцами во главе с Роллем и сторонниками Лейбница изучала (1947 г.) С. А. Яновская. А. П. Юшкевичем сделана попытка дать характеристику (1966 г.) революционных сдвигов в математике XVII в. в связи с научной революцией нового времени.

Несколько работ посвящено крупнейшему математику XVIII в. Ж. Лагранжу. Его открытия в алгебре и теории чисел исследовал Н. Г. Чеботарев (1937 г.), подходы к теории групп — И. Г. Башмакова

(1949 г.) и Л. А. Сорокина (в связи с изучением трудов Абеля, 1959 г.), а его и Гаусса вклад в разработку вариационного исчисления — Н. В. Александрова (1959 г.) и А. В. Дорофеева (1961 г.). Дифференциально-геометрические изыскания Монжа и его предшественников подробно рассмотрены М. Я. Выгодским (1936 г.), «Начертательная геометрия» — Д. И. Каргиным (1947 г.). Теории компенсации ошибок Л. Карно посвящена статья (1929 г.) А. П. Юшкевича, позднее (1935 г.) им был написан общий очерк развития идей обоснования анализа в XVIII в. К этой проблеме он возвращался неоднократно. Е. С. Шатунова впервые раскрыла (1966 г.) интересные особенности теории пределов Люиле. О комментариях в статьях С. А. Яновской к изданию «Математических рукописей» Маркса и также посвященных проблемам обоснования исчисления бесконечно малых от времен Ньютона и Лейбница до начала XIX в. см. § 2. Трактовка вопросов обоснования анализа в учебниках первой половины XIX в. прослежена в совместной статье (1955 г.) И. И. Лихолетова и С. А. Яновской.

В работах о математике XVIII в. заметно, что они не носили систематического характера и нередко были связаны с юбилейными датами либо русским изданием тех или иных классических произведений. То же относится к работам о математике и математиках XIX—XX вв. Например, к 100-летию со дня смерти Гаусса (1956 г.) был издан сборник статей о нем с предисловием И. М. Виноградова. Весьма полный анализ гауссовских работ по теории чисел сделан в статье Б. Н. Делоне. Выделяя в современной теории чисел помимо элементарного четыре основных метода, теорию алгебраических чисел и геометрию чисел, Б. Н. Делоне показал, что Гаусс далеко продвинулся почти во всех этих направлениях; особенное значение имеют работы Гаусса для развития метода алгебраических чисел и метода тригонометрических сумм в аналитической теории. Развитие идей и методов Гаусса Б. Н. Делоне проследил до наших дней. Подробно проанализировано наследие Гаусса в области математического анализа А. И. Маркушевичем. А. П. Норден рассмотрел геометрические работы Гаусса, Б. В. Гнеденко — работы по теории вероятностей. О Гауссе написаны статьи Б. А. Венковым, А. В. Погореловым и К. А. Рыбниковым.

Жизни и творчеству Больцано посвящена книга Э. Кольмана «Бернард Больцано» (1955 г.), в которой подробно рассмотрены также основные математические сочинения этого выдающегося чешского математика. Свойства известной функции Больцано, непрерывной, но нигде не дифференцируемой, исследовал В. Ф. Бржечка (1949 г.), а некоторые его идеи в учении о натуральных числах — И. Я. Депман (1957 г.).

Краткая биография Я. Бойяи и анализ его системы гиперболической геометрии изложены в статье (1948 г.) В. Ф. Кагана, очерк научных идей Римана дан (1948 г.) В. Л. Гончаровым, труды А. Пуанкаре по качественной теории дифференциальных уравнений рассмотрели (1947 г.) А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, А. Г. Майер и В. В. Степанов, анализ «Оснований геометрии» Гильберта сделал (1948 г.) П. К. Рашевский. Все эти статьи и комментарии написаны к изданиям сочинений названных классиков математики. Изданы также работы О. Б. Шейнина

об Эдрейне (1965 г.), Л. С. Полака о Гамильтоне (1956 г.) и Пуассоне (1957 г.), Ю. М. Гайдука о Ламэ (1965 г.) и Якоби (1967 г.), Л. Н. Сретенского о Фредгольме (1966 г.), Ф. А. Медведева о функциях множеств у Пеано (1965 г.), С. Г. Ибрагимова о работах Э. Шредера, пограничных между алгеброй и логикой (1967 г.), С. С. Демидова по истории проблем Гильберта (1967 г.), В. И. Левина о Рамануджане (1960 г.) и др.

Сравнительно небольшое количество работ посвящено истории отдельных дисциплин или проблем. Некоторые из них названы выше — исследования В. В. Гусова и В. В. Лихина по истории специальных функций, А. В. Дорофеевой о развитии вариационного исчисления, А. И. Маркушевича по истории теории аналитических функций, Ф. Д. Кра-



В. Н. Молодший.

мара по истории геометрических исчислений (1963—1967 гг.). К числу этих работ относятся статья В. В. Лихина по истории теории конечных разностей (1966 г.), исследования Ю. А. Митропольского о разработке теории нелинейных колебаний (1968 г.), В. Н. Молодшего о развитии понятия числа (1953—1963 гг.), С. С. Петровой по истории принципа Дирихле (1965, 1966 гг.), Н. И. Симонова о развитии теории дифференциальных уравнений в XIX в. (1967 г.), А. П. Юшкевича об эволюции понятия функции (1965, 1967 гг.), Л. Е. Майстрова по истории теории вероятностей (1967 г.), серия статей (1960, 1961 гг.) А. Б. Паплаускаса и его обстоятельная монография по истории теории тригонометрических рядов (1966 г.), а также статьи (1955, 1956, 1965 гг.) и книга (1965 г.) Ф. А. Медведева по истории теории множеств.

Выше подчеркивалось значение исследований по истории отдельных математических дисциплин как предпосылки полноценных обобщающих трудов по истории математики. В настоящее время подготовлена к печати «История математики» в трех томах; первый том посвящен математике древности, средних веков и эпохи Возрождения, второй — математике XVII в., третий — математике XVIII в. Это коллективный труд, в написании которого приняли участие И. Г. Башмакова, Б. А. Розенфельд, Н. И. Симонов, А. П. Юшкевич и др.

Краткий и вместе с тем весьма яркий обзор развития математики и ее периодизация даны А. Н. Колмогоровым в статье «Математика» Большой Советской Энциклопедии (т. 38, 1938 г.). Согласно этой периодизации история математики подразделяется на следующие периоды: образование простейших математических понятий и создание практической математики; элементарная математика от Фалеса до Декарта; создание математики переменных величин — от Декарта до 70-х годов XIX в., когда получили широкое распространение идеи Лобачевского и Галуа;

современная математика. Последние три периода иногда называют соответственно «периодом математики постоянных величин», «периодом математики переменных величин» и «периодом математики переменных отношений» (последний термин принадлежит Э. Кольману, предложившему аналогичную периодизацию в 1936 г.).

Современная математика характеризуется расширением предмета и более высокой степенью абстракции основных понятий: от рассмотрения уже известных в естествознании количественных отношений и пространственных форм реального мира математика переходит к систематическому изучению с достаточно общей точки зрения возможных типов этих отношений и форм. Пространственные формы можно рассматривать при этом как частный вид количественных отношений в достаточно широком смысле слова; упоминание в определении математики пространственных форм является, с этой точки зрения, указанием на относительную самостоятельность геометрических дисциплин.

На подобной периодизации основана общая характеристика математики в ее историческом развитии у А. Д. Александрова (статья «Геометрия», БСЭ, т. 10, 1952 г.). А. Д. Александров приходит к выводу, что предметом математики являются не только пространственные формы и отношения в обычном понимании термина «пространство», но и другие отношения и формы действительности, сходные с пространственными; после появления «Элементов математики» Н. Бурбаки эти отношения и формы стало принятым называть структурами. Аналогичная, но более детальная характеристика этих этапов развития математики дана А. Д. Александровым в главе «Общий взгляд на математику» книги «Математика, ее содержание, методы и значение» (т. I, 1956 г.)².

Мы рассмотрели в настоящем историческом очерке развитие исследований в области истории математики, выполненных в СССР за 50 лет. Ознакомление с результатами этих исследований показывает, что не все вопросы истории математики изучаются историками науки одинаково полно. Естественно, что лучше всего изучены вопросы истории отечественной математики. Хорошо исследована история математики арабоязычных стран (благодаря ее связям с математикой народов Средней Азии и Закавказья), менее — математика стран Западной Европы, в особенности XIX и первой половины XX в. Наконец, история отдельных направлений математики изучена совсем мало. Перед советскими историками математики стоит много требующих решения проблем.

² В. П. Зубов, Б. А. Розенфельд и А. П. Юшкевич пришли к выводу (доклад на IV Всесоюзном математическом съезде, 1961 г.), что средние века естественнее рассматривать как самостоятельный период развития математики, значительно отличающийся от периода развития математики в древней Греции и эллинистических странах. В Греции и эллинистических странах наряду с элементарной математикой со времен Евдокса видное место занимали инфинитезимальные методы и приемы, родственные аналитико-геометрическим, а затем и проективно-геометрическим. Поэтому характеристика древнегреческой математики как «элементарной» неадекватна ее существу. Этот период характеризуется скорее созданием математики как теоретической науки или, лучше сказать, как совокупности нескольких наук. Название «период элементарной математики» целесообразнее отнести к математике средних веков, когда вопросы, впоследствии вошедшие в «высшую математику», играли гораздо меньшую роль, чем в Греции и эллинистических странах.

БИБЛИОГРАФИЯ

Литература к главам

К главе I. Теория вероятностей и математическая статистика

- Б е р н ш т е й н С. Н. Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей.— Зап. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2, 1917, т. 15, стр. 209—274.
- Б е р н ш т е й н С. Н. Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин.— Усп. мат. наук, 1944, вып. 10, стр. 65—114.
- Б е р н ш т е й н С. Н. Теория вероятностей. Изд. 2-е. ГГТИ, М.—Л., 1934, 412 с.
- Б о л ь ш е в Л. Н. Асимптотически пирсоновские преобразования.— Теория вероятностей и ее применения, 1963, т. 8, вып. 2, стр. 129—155; вып. 4, стр. 473.
- Б о л ь ш е в Л. Н. О преобразованиях случайных величин.— Теория вероятностей и ее применения, 1959, т. 4, вып. 2, стр. 136—149.
- Б о р о в к о в А. А. Некоторые предельные теоремы теории массового обслуживания. I, II.— Теория вероятностей и ее применения, 1964, т. 9, вып. 4, стр. 608—625; 1965, т. 10, вып. 3, стр. 409—437.
- Б о р о в к о в А. А. Предельные теоремы о распределении максимума сумм ограниченных решетчатых случайных величин. I, II.— Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. 5, вып. 2, стр. 137—171; вып. 4, стр. 377—392.
- Б о р о в к о в А. А., К о р о л ь к о в В. С. О результатах асимптотического анализа в задачах с границами.— Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, вып. 2, стр. 255—266.
- Б о р о в к о в А. А., Р о г о з и н Б. А. Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий.— Теория вероятностей и ее применения, 1964, т. 9, вып. 3, стр. 401—430.
- Б у н я к о в с к и й В. Я. Основания математической теории вероятностей. СПб, 1846, 478 с.
- В е н т ц е л ь А. Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1959, т. 4, вып. 2, стр. 172—185.
- В о л к о н с к и й В. А. Многомерная предельная теорема для однородных цепей Маркова со счетным множеством состояний.— Теория вероятностей и ее применения, 1957, т. 2, вып. 2, стр. 230—255.
- В о л к о н с к и й В. А., Р о з а н о в Ю. А. Некоторые предельные теоремы для случайных функций. I, II.— Теория вероятностей и ее применения, 1959, т. 4, вып. 2, стр. 186—207; 1961, т. 6, вып. 2, стр. 202—215.
- В о р о б ь е в Н. Н. Сложение независимых случайных величин на конечных абелевых группах.— Мат. сб., 1954, т. 34 (76), вып. 1, стр. 89—126.
- Г и х м а н И. И. К теории дифференциальных уравнений случайных процессов. I, II.— Укр. мат. журн., 1950, т. 2, № 4, стр. 37—63; 1951, т. 3, № 3, стр. 317—339.
- Г и х м а н И. И. О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями.— Укр. мат. журн., 1950, т. 2, № 3, стр. 45—69.
- Г и х м а н И. И. О некоторых предельных теоремах для условных распределений и о связанных с ними задачах математической статистики.— Укр. мат. журн., 1953, т. 5, № 4, стр. 413—433.
- Г и х м а н И. И., Г н е д е н к о Б. В., С м и р н о в Н. В. Непараметрические методы статистики.— Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 320—334.
- Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В. Введение в теорию случайных процессов. «Наука», М., 1965, 654 с.
- Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В. О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах.— Усп. мат. наук, 1966, т. 21, вып. 6 (132), стр. 83—152.

- Гнеденко Б. В. Исследования по теории вероятностей и математической статистике в системе АН УССР.— Укр. мат. журн., 1959, т. 11, № 2, стр. 123—137.
- Гнеденко Б. В. К теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1939, № 2, стр. 181—232.
- Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Изд. 4-е. «Наука», М., 1965, 400 с.
- Гнеденко Б. В. Предельные законы для сумм независимых случайных величин.— Усп. мат. наук, 1944, вып. 10, стр. 115—165.
- Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ. «Наука», М., 1965, 525 с.
- Гнеденко Б. В., Гіхман Й. І. Розвиток теорії імовірностей на Україні.— Праці Київськ. ун-ту. Природничі науки, 1954, стор. 59—94.
- Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. «Наука», М., 1966, 430 с.
- Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. ГТТИ, М.— Л., 1949, 264 с.
- Добрушин Р. Л. Одна статистическая задача теории обнаружения сигнала на фоне шума в многоканальной системе, приводящая к устойчивым законам распределения.— Теория вероятностей и ее применения, 1958, т. 3, вып. 2, стр. 173—185.
- Добрушин Р. Л. Передача информации по каналу с обратной связью.— Теория вероятностей и ее применения, 1958, т. 3, вып. 4, стр. 395—412; 1959, т. 4, вып. 2, стр. 248.
- Добрушин Р. Л. Предельные теоремы для цепи Маркова из двух состояний.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1953, т. 17, № 4, стр. 291—330.
- Добрушин Р. Л. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова.— Теория вероятностей и ее применения, 1956, т. 1, вып. 1, стр. 72—89; вып. 4, стр. 365—425.
- Доклады советских ученых на 30-й сессии Международного статистического института. Изд-во АН СССР, М., 1957, 48 с.
- Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. Пер. с англ. Р. Л. Добрушина и А. М. Яглома. ИЛ, М., 1956, 602 с.
- Дынкин Е. Б. Инфинитезимальные операторы марковских процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1956, т. 1, вып. 1, стр. 38—60.
- Дынкин Е. Б. Марковские процессы. Физматгиз, М., 1963, 859 с.
- Дынкин Е. Б. Марковские процессы и полугруппы операторов.— Теория вероятностей и ее применения, 1956, т. 1, вып. 1, стр. 25—37.
- Дынкин Е. Б. Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1955, т. 19, № 4, стр. 247—266.
- Дынкин Е. Б. Одномерные непрерывные строго марковские процессы.— Теория вероятностей и ее применения, 1959, т. 4, вып. 1, стр. 3—54.
- Дынкин Е. Б. Основания теории марковских процессов. Физматгиз, М., 1959, 223 с.
- Зимняя школа по теории вероятностей и математической статистике (Ужгород, 1964 г.). Изд. Ин-та математики АН УССР, 1964, 263 с.
- Золотарев В. М. Асимптотическое поведение распределений процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, вып. 1, стр. 33—50.
- Золотарев В. М. Об асимптотически правильных константах в уточнениях глобальной предельной теоремы.— Теория вероятностей и ее применения, 1964, т. 9, вып. 2, стр. 293—302.
- Ибрагимов И. А. Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1962, т. 7, вып. 4, стр. 361—392.
- Ибрагимов И. А. Об одном классе оценок спектральной функции стационарной последовательности.— Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, вып. 1, стр. 133—137.
- Ибрагимов И. А. Центральная предельная теорема для одного класса зависимых случайных величин.— Теория вероятностей и ее применения, 1963, т. 8, вып. 1, стр. 89—94.

- Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. «Наука», М., 1965, 524 с.
- Клосс Б. М. О вероятностных распределениях на бикompактных топологических группах. — Теория вероятностей и ее применения, 1959, т. 4, вып. 3, стр. 255—290.
- Колмогоров А. Н. Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых. — Теория вероятностей и ее применения, 1956, т. 1, вып. 4, стр. 426—436.
- Колмогоров А. Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей. — Вестн. Моск. ун-та, 1953, № 10, стр. 29—38.
- Колмогоров А. Н. Несмещенные оценки. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1950, т. 14, № 3, стр. 303—326.
- Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей. — Усп. мат. наук, 1938, вып. 5, стр. 5—41.
- Колмогоров А. Н. О приближении распределений сумм независимых слагаемых неограниченно делимыми распределениями. — Труды Моск. мат. о-ва, 1963, т. 12, стр. 437—451.
- Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. ОНТИ, М.—Л., 1936, 80 с.
- Колмогоров А. Н. Теория вероятностей. — В кн.: Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. 1. Физматгиз, М., 1959, стр. 781—795.
- Колмогоров А. Н. Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний. — Бюл. Моск. ун-та. Секция мат. и мех., 1937, т. 1, вып. 3, стр. 1—16.
- Королук В. С. Асимптотический анализ распределений максимальных отклонений в схеме Бернулли. — Теория вероятностей и ее применения, 1959, т. 4, вып. 4, стр. 369—397.
- Королук В. С. Асимптотический анализ распределений максимальных отклонений в решетчатой схеме блуждания. — Теория вероятностей и ее применения, 1962, т. 7, вып. 4, стр. 393—409.
- Крамер Г. Математические методы статистики. Пер. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова. ИЛ, М., 1948, 620 с.
- Крамер Г. Случайные величины и распределения вероятностей. ИЛ, М., 1947, 144 с.
- Крилов Н. М., Боголюбов Н. Н. Про деякі проблеми ергодичної теорії стохастичних систем. — Зап. каф. мат. фіз. АН УРСР, 1939, т. 4, стор. 243—287.
- Крилов Н. М., Боголюбов Н. Н. Про рівняння Фоккера — Планка, що виводиться в теорії пертурбацій методом, оснований на спектральних властивостях пертурбаційного гамільтоніана. — Зап. каф. мат. фіз. АН УРСР, 1939, т. 4, стор. 5—158.
- Линник Ю. В. Дисперсионный анализ в бинарных аддитивных задачах. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1961, 207 с.
- Линник Ю. В. К теории неоднородных цепей Маркова. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 1, стр. 65—94.
- Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1962, 349 с.
- Линник Ю. В. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. I. Формулировки. Три основные леммы. Необходимые условия. — Теория вероятностей и ее применения, 1958, т. 3, вып. 1, стр. 3—40; II, III. Достаточные условия. — Там же, 1959, т. 4, вып. 1, стр. 55—85; вып. 2, стр. 150—171.
- Линник Ю. В. Предельные теоремы для сумм независимых величин при учете больших отклонений. I—III. — Теория вероятностей и ее применения, 1961, т. 6, вып. 2, стр. 145—163; вып. 4, стр. 377—391; 1962, т. 7, вып. 2, стр. 121—134.
- Линник Ю. В. Разложение вероятностных законов. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1960, 260 с.
- Линник Ю. В. Статистические задачи с мешающими параметрами. «Наука», М., 1966, 252 с.
- Лозв М. Теория вероятностей. Пер. с англ. Б. А. Севастьянова под ред. Ю. В. Прохорова. ИЛ, М., 1962, 11 с.

- Марков А. А. Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей. Изд-во АН СССР, Л., 1951, 717 с.
- Марков А. А. Исчисление вероятностей. Изд. 4-е. Госиздат, М., 1924, 588 с.
- Мейзлер Д. Г., Парасюк О. С., Рвачева Е. Л. О многомерной локальной предельной теореме теории вероятностей.— Укр. мат. журн., 1949, т. 1, № 1, стр. 9—20.
- Мешалкин Л. Д. Предельные теоремы для цепей Маркова с конечным числом состояний.— Теория вероятностей и ее применения, 1958, т. 3, вып. 4, стр. 361—385.
- Минлос Р. А. Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры.— Труды Моск. мат. о-ва, 1959, т. 8, стр. 497—518.
- Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений.— Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, вып. 2, стр. 231—254.
- Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова.— Теория вероятностей и ее применения, 1957, т. 2, вып. 4, стр. 389—416.
- Нагаев С. В. Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова.— Теория вероятностей и ее применения, 1961, т. 6, вып. 1, стр. 67—86.
- Петров В. В. Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин.— Теория вероятностей и ее применения, 1959, т. 4, вып. 2, стр. 220—224; вып. 4, стр. 485.
- Петров В. В. О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин.— Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, вып. 2, стр. 310—322.
- Петров В. В. О локальных предельных теоремах для сумм независимых случайных величин.— Теория вероятностей и ее применения, 1964, т. 9, вып. 2, стр. 343—352.
- Петров В. В. Уточнение локальной предельной теоремы для неодинаковых решетчатых распределений.— Теория вероятностей и ее применения, 1962, т. 7, вып. 3, стр. 344—346.
- Пинскер М. С. Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов. Изд-во АН СССР, М., 1960, 201 с.
- Пинскер М. С. Теория кривых в гильбертовом пространстве со стационарными n -ми приращениями.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1955, т. 19, № 5, стр. 319—344.
- Прохоров Ю. В. Об усиленном законе больших чисел.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1950, т. 14, № 6, стр. 523—536.
- Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятностей и ее применения, 1956, т. 1, вып. 2, стр. 177—238.
- Прохоров Ю. В. Характеризация класса распределений распределением некоторой статистики.— Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, вып. 3, стр. 479—487.
- Розанов Ю. А. О вероятностных мерах в функциональных пространствах, отвечающих гауссовским стационарным процессам.— Теория вероятностей и ее применения, 1964, т. 9, вып. 3, стр. 448—465.
- Розанов Ю. А. Спектральная теория многомерных стационарных случайных процессов с дискретным временем.— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 2 (80), стр. 93—142.
- Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. Физматгиз, М., 1963, 284 с.
- Романовский В. И. Дискретные цепи Маркова. ГИТТЛ, М.— Л., 1949, 436 с.
- Романовский В. И. Теория вероятностей, статистика и анализ.— В кн.: Романовский В. И. Избранные труды. Т. 2. «Наука», Ташкент, 1964, 389 с.
- Сазонов В. В., Тутубалин В. Н. Распределение вероятностей на топологических группах.— Теория вероятностей и ее применения, 1966, т. 11, вып. 1, стр. 3—55.
- Сарымсаков Т. А. Основы теории процессов Маркова. ГИТТЛ, М., 1954, 208 с.
- Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы с превращениями, зависящими от

- возраста частиц.— Теория вероятностей и ее применения, 1964, т. 9, вып. 4, стр. 577—594.
- Севастьянов Б. А. Теория ветвящихся случайных процессов.— Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 6 (46), стр. 47—99.
- Синай Я. Г. О распределении первой положительной суммы для последовательности независимых случайных величин.— Теория вероятностей и ее применения, 1957, т. 2, вып. 1, стр. 126—135.
- Скорород А. В. Исследования по теории случайных процессов. Стохастические дифференциальные уравнения и предельные теоремы для процессов Маркова. Изд-во Киевск. ун-та, К., 1961, 215 с.
- Скорород А. В. Конструктивные методы задания случайных процессов (докл. на юб. научн. сессии Моск. мат. о-ва, 1964 г.).— Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 3 (123), стр. 67—87.
- Скорород А. В. О локальном строении непрерывных марковских процессов.— Теория вероятностей и ее применения, 1966, т. 11, вып. 3, стр. 381—423.
- Скорород А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. «Наука», М., 1964, 278 с.
- Скорород А. В. Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами. I, II.— Теория вероятностей и ее применения, 1961, т. 6, вып. 3, стр. 287—298; 1962, т. 7, вып. 1, стр. 5—25.
- Слущкий Е. Е. Избранные труды. Теория вероятностей. Математическая статистика. Изд-во АН СССР, М., 1960, 291 с.
- Смирнов Н. В. Об уклонениях эмпирической кривой распределения.— Мат. сб., 1939, т. 6 (48), вып. 1, стр. 3—26.
- Смирнов Н. В. Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках.— Бюл. Моск. ун-та. Мат., 1939, т. 2, вып. 2, стр. 3—14.
- Смирнов Н. В. Предельные законы распределения для членов вариационного ряда.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1949, т. 25, 60 с.
- Смирнов Н. В. Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным.— Усп. мат. наук, 1944, вып. 10, стр. 179—206.
- Статюлявичус В. А. Предельные теоремы для плотностей и асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин.— Теория вероятностей и ее применения, 1965, т. 10, вып. 4, стр. 645—659.
- Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. Изд-во Моск. ун-та, М., 1966, 318 с.
- Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Изд. 2-е. Пер. Р. Л. Добрушина, А. А. Юшкевича, С. А. Молчанова под ред. Е. Б. Дынкина. Предисловие А. Н. Колмогорова. «Мир», М., 1964, 493 с.
- Хасминский Р. З. Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений Коши для параболических уравнений.— Теория вероятностей и ее применения, 1960, т. 5, вып. 2, стр. 196—214.
- Хинчин А. Я. Асимптотические законы теории вероятностей. ОНТИ, М.— Л., 1936, 96 с.
- Хинчин А. Я. Математические основания квантовой статистики. ГИТТЛ, М.— Л., 1951, 256 с.
- Хинчин А. Я. Математические основания статистической механики. ГТТИ, М.— Л., 1943, 126 с.
- Хинчин А. Я. Предельные законы для сумм независимых случайных величин. ГОНТИ, М.— Л., 1938, 116 с.
- Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. Физматгиз, М., 1963, 235 с.
- Чебышев П. Л. Теория вероятностей. Лекции, читанные в 1879—80 гг. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1936, 252 с.
- Шур М. Г. Эргодические свойства марковских цепей, инвариантных на однородных пространствах.— Теория вероятностей и ее применения, 1958, т. 3, вып. 2, стр. 137—152.
- Юшкевич А. А. О строго марковских процессах.— Теория вероятностей и ее применения, 1957, т. 2, вып. 2, стр. 187—213.

- Я г л о м А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций.— Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 5 (51), стр. 3—168.
- Я г л о м А. М. Корреляционная теория процессов со случайными стационарными n -ми приращениями.— Мат. сб., 1955, т. 37 (79), вып. 1, стр. 141—196.
- Я д р е н к о М. И. Изотропные случайные поля марковского типа в евклидовом и гильбертовом пространствах.— Труды Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике (Ереван, 1958 г.), 1960, стр. 263—279.

К главе II. Численные и приближенные методы

- А б р а м о в А. А. Вариант метода прогонки.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1961, т. 1, № 2, стр. 349—351.
- А б р а м о в А. А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки).— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1961, т. 1, № 3, стр. 542—545.
- А б р а м о в А. А. Об одном способе ускорения итерационных процессов.— ДАН СССР, 1950, т. 74, № 6, стр. 1051—1052.
- А г е е в а З. Г., И в а н о в В. К. О численном решении задачи Коши для уравнения эллиптического типа.— Мат. зап. Уральск. ун-та, 1964, т. 4, тетрадь 4, стр. 3—5.
- А к с е н ь М. Б., Т у р е ц к и й А. Х. О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов функций.— ДАН СССР, 1966, т. 165, № 5, стр. 1019—1021.
- А л е к с и д з е М. А. К решению методом сеток уравнений эллиптического типа с краевыми условиями, содержащими производные.— Труды Вычисл. центра АН ГрССР, 1960, т. 1, стр. 201—210.
- А м е р б а е в В. М. Некоторые применения ортогональных многочленов к восстановлению функций, заданных изображением Лапласа.— Изв. АН КазССР. Сер. мат. и мех., 1961, вып. 9 (13), стр. 79—95.
- А м е р б а е в В. М. Разложение функций-оригиналов, заданных изображениями Лапласа, в ряды типа Неймана.— Труды Сектора мат. и мех. АН КазССР, 1963, т. 2, стр. 78—97.
- А н д р е е в В. Б. Итерационные схемы переменных направлений для численного решения третьей краевой задачи в p -мерном параллелепипеде.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, т. 5, № 4, стр. 626—637.
- А н д р е е в В. Б. О равномерной сходимости некоторых разностных схем.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, т. 6, № 2, стр. 238—250.
- А н т о х и н Ю. Т. Некорректные задачи в гильбертовом пространстве и устойчивые методы их решения.— Диф. ур-я, 1967, т. 3, № 7, стр. 1135—1156.
- А н у ч и н а Н. Н. Некоторые разностные схемы для гиперболических систем.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1965, т. 76, ч. 1, стр. 5—15.
- А н у ч и н а Н. Н., Я н е н к о Н. Н. Неявные схемы расщепления для гиперболических уравнений и систем.— ДАН СССР, 1959, т. 128, № 6, стр. 1103—1105.
- Б а г р и н о в с к и й К. А., Г о д у н о в С. К. Разностные схемы для многомерных задач.— ДАН СССР, 1957, т. 115, № 3, стр. 431—433.
- Б а д а г а д з е В. В. О построении разностных схем для дифференциального уравнения эллиптического типа второго порядка.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, т. 6, № 3, стр. 512—520.
- Б а к л а н о в с к а я В. Ф. Численное решение одномерной задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1961, т. 1, № 3, стр. 461—469.
- Б а к у ш и н с к и й А. Б. Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1967, т. 7, № 3, стр. 672—677.
- Б а к у ш и н с к и й А. Б. Один способ решения «вырожденных» и «почти вырожденных» линейных алгебраических уравнений.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, т. 3, № 6, стр. 1113—1114.
- Б а х в а л о в Н. С. К вопросу о числе арифметических действий при решении уравнения Пуассона для квадрата методом конечных разностей.— ДАН СССР, 1957, т. 113, № 2, стр. 252—254.

- Бахвалов Н. С. О накоплении вычислительной погрешности при численном решении дифференциальных уравнений.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та. Вып. 1. Изд-во Моск. ун-та, М., 1962, стр. 47—68.
- Бахвалов Н. С. О составлении уравнений в конечных разностях при приближенном решении уравнения Лапласа.— ДАН СССР, 1957, т. 114, № 6, стр. 1146—1148.
- Бахвалов Н. С. О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, т. 6, № 5, стр. 861—883.
- Бахвалов Н. С. О численном решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех., astron., физ., хим., 1959, № 5, стр. 171—195.
- Бахвалов Н. С. Об одном способе приближенного решения уравнения Лапласа.— ДАН СССР, 1957, т. 114, № 3, стр. 455—458.
- Бахвалов Н. С. Об определении начального шага и оценке главного члена погрешности при численном интегрировании с автоматическим выбором шага.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та. Вып. 1. Изд-во Моск. ун-та, М., 1962, стр. 69—79.
- Бахвалов Н. С. Об оптимальных способах задания информации при решении дифференциальных уравнений.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1962, т. 2, № 4, стр. 569—592.
- Бахвалов Н. С. Оптимальные свойства формул численного интегрирования Адамса и Грегори.— В кн.: Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники. Машгиз, М., 1963, стр. 9—26.
- Белоцерковский О. М., Чушкин П. И. Численный метод интегральных соотношений.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1962, т. 2, № 5, стр. 731—759.
- Белютюков Б. А. Построение быстроходящихся итерационных алгоритмов для решения интегральных уравнений.— Сиб. мат. журн., 1965, т. 6, № 6, стр. 1415—1419.
- Бернштейн С. Н. О сходимости многочленов $\sum_{m=0}^n C_n^m f\left(\frac{m}{n}\right) x^m (1-x)^{n-m}$ в комплексной области.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1943, т. 7, № 2, стр. 49—88.
- Благовещенский Ю. В. О некоторых приближенных методах конформного преобразования.— Сб. трудов Ин-та строит. мех. АН УССР, 1950, № 14, стр. 145—152.
- Бобков В. В. Метод интегральных соотношений при решении задачи Гурса для системы двух уравнений первого порядка.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 2, стр. 267—274.
- Бобков В. В. Об одном способе построения одношаговых правил приближенного решения дифференциальных уравнений.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1967, № 4, стр. 27—35.
- Бондаренко П. С. Дослідження обчислювальних алгоритмів наближеного інтегрування диференціальних рівнянь методом скінчених різниць. Вид-во Київськ. ун-ту, К., 1962, 243 с.
- Будак Б. М. О методе прямых для некоторых краевых задач.— ДАН СССР, 1956, т. 109, № 1, стр. 9—12.
- Будак Б. М., Горбунов А. Д. Метод прямых для решения одной нелинейной краевой задачи в области с криволинейной границей.— ДАН СССР, 1958, т. 118, № 5, стр. 858—861.
- Будак Б. М., Горбунов А. Д. О многоточечных разностных методах решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та. Вып. 1. Изд-во Моск. ун-та, М., 1962, стр. 19—46.
- Булеев Н. И. Численный метод решения двумерных и трехмерных уравнений диффузии.— Мат. сб., 1960, т. 51 (93), вып. 2, стр. 227—238.
- Буриев Т. Применение локально-одномерного метода переменных направлений к расчету упругих колебаний тонких плит.— В кн.: Вопросы вычислительной

- математики и техники. Вып. 8. «Наука» УзССР, Ташкент, 1965, стр. 54—75.
- В а й н и к к о Г. М. Возмущенный метод Галеркина и общая теория приближенных методов для нелинейных уравнений.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1967, т. 7, № 4, стр. 723—751.
- В е р т г е й м Б. А. О приближенном построении некоторых конформных отображений.— ДАН СССР, 1958, т. 119, № 1, стр. 12—14.
- В и т у ш к и н А. Г. Условия на множество, необходимые и достаточные для возможности равномерного приближения аналитическими (или рациональными) функциями всякой непрерывной на этом множестве функции.— ДАН СССР, 1959, т. 128, № 1, стр. 17—20.
- В и ш и к М. И., М ы ш к и с А. Д., О л е й н и к О. А. Дифференциальные уравнения с частными производными.— В кн.: Математика в СССР за сорок лет. 1917—1957. Т. 1. Физматгиз, М., 1959, стр. 563—636.
- В л а с о в а З. А. О методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1959, т. 53, стр. 16—36.
- В о е в о д и н В. В. Об одном порядке исключения неизвестных.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, т. 6, № 4, стр. 758—760.
- В о е в о д и н В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. «Наука», М., 1966, 248 с.
- В о л к о в Е. А. К решению методом сеток уравнений эллиптического типа с крайними условиями, содержащими производные.— ДАН СССР, 1955, т. 102, № 3, стр. 437—440.
- В о л к о в Е. А. Метод сеток для конечных и бесконечных областей с кусочно-гладкой границей.— ДАН СССР, 1966, т. 168, № 5, стр. 978—981.
- В о л к о в Е. А. О методе сеток для краевой задачи с косой и нормальной производной.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1961, т. 1, № 4, стр. 607—621.
- В о л к о в Е. А. О решении краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике.— ДАН СССР, 1962, т. 147, № 1, стр. 13—16.
- В о л к о в Е. А. Оценка ошибки при решении методом сеток задачи Дирихле для уравнения Лапласа.— ДАН СССР, 1954, т. 96, № 5, стр. 897—899.
- В о л к о в Е. А. Решение задачи Дирихле методом уточнений разностями высших порядков. I, II.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 7, стр. 946—960; № 8, стр. 1070—1084.
- В о л к о в Е. А. Эффективные оценки погрешности решений методом сеток краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике и некоторых треугольниках.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1966, т. 74, ч. 1, стр. 55—85.
- В о л о в и ч В. М. О решении систем линейных алгебраических уравнений клеточными методами.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та. Вып. 3. Изд-во Моск. ун-та, М., 1965, стр. 106—133.
- В о р о н о в с к а я Е. В. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна.— ДАН СССР. Сер. А, 1932, № 1, стр. 79—85.
- Г а в у р и н М. К. О плохо-обусловленных системах линейных алгебраических уравнений.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1962, т. 2, № 3, стр. 387—397.
- Г а в у р и н М. К., К а н т о р о в и ч Л. В. Приближенные и численные методы.— В кн.: Математика в СССР за сорок лет. 1917—1957. Т. 1. Физматгиз, М., 1959, стр. 809—856.
- Г е л ь ф а н д И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений.— Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 2 (86), стр. 87—158.
- Г е л ь ф о н д А. О. Исчисление конечных разностей. Изд. 3-е. «Наука», М., 1967, 375 с.
- Г е р ш г о р и н С. А. О конформном отображении односвязной области на круг.— Мат. сб., 1933, т. 40, вып. 1, стр. 48—58.
- Г е р ш г о р и н С. А. О приближенном интегрировании дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона.— Изв. Ленингр. политехн. ин-та. Отд. естествозн., мат., 1927, т. 30, стр. 75—95.
- Г е х т Б. И. О сингулярном уравнении, встречающемся при конформном отображении двусвязных областей.— Труды Новочеркасск. политехн. ин-та, 1955, т. 28 (42), стр. 3—12.

- Г о д у н о в С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики.— Мат. сб., 1959, т. 47, вып. 3, стр. 271—306.
- Г о д у н о в С. К. Спектральные признаки устойчивости краевых задач для несамосопряженных разностных уравнений.— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 3 (111), стр. 3—14.
- Г о д у н о в С. К., З а б р о д и н А. В. О разностных схемах второго порядка точности для многомерных задач.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1962, т. 2, № 4, стр. 706—708.
- Г о д у н о в С. К., Р я б е н ь к и й В. С. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, М., 1962, 340 с.
- Г о р б у н о в А. Д., Ш а х о в Ю. А. О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом знаков.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, т. 3, № 2, стр. 239—253.
- Г о р д е з и а н и Д. Г. О применении локально-одномерного метода для решения многомерного уравнения параболического типа $2m$ -го порядка.— Сообщ. АН ГрССР, 1965, т. 39, № 3, стр. 535—541.
- Д а в и д е н к о Д. Ф. К вопросу о решении методом сеток осесимметрической задачи Дирихле для уравнения Лапласа.— ДАН СССР, 1959, т. 126, № 3, стр. 471—473.
- Д е м ь я н о в и ч Ю. К. Метод сеток для некоторых задач математической физики.— ДАН СССР, 1964, т. 159, № 2, стр. 250—253.
- Д е м ь я н о в и ч Ю. К. Об оценках скорости сходимости некоторых проекционных методов решения эллиптических уравнений.— ДАН СССР, 1967, т. 174, № 3, стр. 518—521.
- Д з я д ы к В. К., К о в а л ь ч у к Р. Н. Об интерполировании функций многих комплексных переменных.— В кн.: Вопросы математической физики и теории функций. II. «Наукова думка», К., 1964, стр. 32—39.
- Д о м б р о в с к а я И. Н., И в а н о в В. К. К теории некоторых линейных уравнений в абстрактных пространствах.— Сиб. мат. журн., 1965, т. 6, № 3, стр. 499—508.
- Д о р о д н и ц ы н А. А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя.— Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1960, т. 1, № 3, стр. 111—118.
- Д о р о д н и ц ы н А. А. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики.— Труды Третьего Всесоюз. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.). Изд-во АН СССР, М., 1958, т. 3, стр. 447—453.
- Д ь я к о н о в Е. Г. Метод переменных направлений решения систем конечноразностных уравнений.— ДАН СССР, 1961, т. 138, № 2, стр. 271—274.
- Д ь я к о н о в Е. Г. О некоторых итерационных методах решения систем разностных уравнений, возникающих при решении методом сеток уравнений в частных производных эллиптического типа.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та. Вып. 3. Изд-во Моск. ун-та, М., 1965, стр. 191—222.
- Д ь я к о н о в Е. Г. О построении итерационных методов на основе использования операторов, эквивалентных по спектру.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, т. 6, № 1, стр. 12—34.
- Д ь я к о н о в Е. Г. О применении разностных схем с расщепляющимся оператором для некоторых систем уравнений параболического и гиперболического типов.— Сиб. мат. журн., 1965, т. 6, № 3, стр. 509—515.
- Д ь я к о н о в Е. Г. Разностные схемы второго порядка точности с расщепляющимся оператором для многомерных параболических уравнений с переменными коэффициентами.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та. Вып. 3. Изд-во Моск. ун-та, М., 1965, стр. 163—190.
- Д ь я к о н о в Е. Г. Разностные схемы второго порядка точности с расщепляющимся оператором для параболических уравнений без смешанных производных.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, т. 4, № 5, стр. 935—941.
- Д ь я к о н о в Е. Г. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для нестационарных уравнений.— ДАН СССР, 1962, т. 144, № 1, стр. 29—32.

- Дьяконов Е. Г. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для общих параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, т. 4, № 2, стр. 278—291.
- Евграфов М. А. Интерполяционная задача Абея — Гончарова. Гостехиздат, М., 1954, 126 с.
- Еремин С. А. Некоторые вопросы приближения функций многих комплексных переменных. Изд-во АН УССР, К., 1958, 144 с.
- Ершов А. П. Об одном методе обращения матриц.— ДАН СССР, 1955, т. 100, № 2, стр. 209—211.
- Жидков Н. П. Несколько замечаний по поводу обусловленности систем линейных алгебраических уравнений.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, т. 3, № 5, стр. 803—811.
- Жуков А. И. Применение метода характеристик к численному решению однородных задач газовой динамики.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1960, т. 58, 150 с.
- Иванов В. В. Методы приближенного решения системы сингулярных интегральных уравнений.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, т. 3, № 4, стр. 664—682.
- Иванов В. В., Кудринский В. Ю. Приближенное решение линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве методом наименьших квадратов. I, II.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, т. 6, № 5, стр. 831—841; 1967, т. 7, № 3, стр. 475—496.
- Иванов В. К. О линейных некорректных задачах.— ДАН СССР, 1962, т. 145, № 2, стр. 270—272.
- Иванов В. К. О некорректно поставленных задачах.— Мат. сб., 1963, т. 61 (103), вып. 2, стр. 211—223.
- Иванов В. К. О равномерной регуляризации неустойчивых задач.— Сиб. мат. журн., 1966, т. 7, № 3, стр. 546—558.
- Иванов В. К. Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода.— Диф. ур-я, 1967, т. 3, № 3, стр. 410—421.
- Иванов В. К. Об одном типе некорректных линейных уравнений в векторных топологических пространствах.— Сиб. мат. журн., 1965, т. 6, № 4, стр. 832—839.
- Иванов В. К. Обратная задача потенциала для тела, близкого к данному.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1956, т. 20, № 6, стр. 793—818.
- Ильин А. М. Устойчивость разностных схем задачи Коши для систем уравнений в частных производных.— ДАН СССР, 1965, т. 164, № 3, стр. 491—494.
- Инербаев М. С. О погрешностях сеточных решений второй и третьей краевых задач для эллиптических уравнений.— В кн.: Методы вычислений. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1963, вып. 2, стр. 50—59.
- Канторович Л. В. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных.— ДАН СССР, 1934, т. 2, № 9, стр. 532—536.
- Канторович Л. В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла.— Изв. АН СССР. Отд. мат. и естеств. наук, 1933, № 5, стр. 647—652.
- Канторович Л. В. О конформном отображении.— Мат. сб., 1933, т. 40, вып. 3, стр. 294—325.
- Канторович Л. В. О методе наискорейшего спуска.— ДАН СССР, 1947, т. 56, № 3, стр. 233—236.
- Канторович Л. В. О сходимости метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям.— ДАН СССР, 1941, т. 30, № 7, стр. 579—582.
- Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика.— Усп. мат. наук, 1948, т. 3, вып. 6 (28), стр. 89—185.
- Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы.— В кн.: Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947. ГИТТЛ, М.— Л., 1948, стр. 759—801.
- Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Изд. 5-е. Физматгиз, М.— Л., 1962, 708 с.
- Кац І. С. Розв'язок третьої граничної задачі методом змінних напрямків.— ДАН УРСР, 1965, № 9, стор. 1117—1120.
- Качанов Л. М. О вариационных методах решения задач теории пластичности.— Прикл. мат. и мех., 1959, т. 23, вып. 3, стр. 616—617.

- К е л д ы ш М. В. О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1942, т. 6, № 6, стр. 309—330.
- К е л д ы ш М. В. О представлении функций комплексного переменного рядами полиномов в замкнутых областях.— Мат. сб., 1945, т. 16 (58), вып. 3, стр. 249—258.
- К и м Г. О решении некоторых систем линейных алгебраических уравнений высокого порядка.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та. Вып. 3. Изд-во Моск. ун-та, М., 1965, стр. 134—146.
- К л ю е в В. В., К о к о в к и н - Щ е р б а к Н. И. О минимизации числа арифметических операций при решении линейных алгебраических систем уравнений.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, т. 5, № 1, стр. 21—33.
- К о л м о г о р о в А. Н. Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции.— Усп. мат. наук, 1948, т. 3, вып. 1 (23), стр. 216—221.
- К о н о в а л о в А. Н. Метод дробных шагов решения задачи Коши для многомерного уравнения колебаний.— ДАН СССР, 1962, т. 147, № 1, стр. 25—27.
- К о н о в а л о в А. Н. Об одной итерационной схеме решения статических задач теории упругости.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, т. 4, № 5, стр. 942—945.
- К о н о в а л о в А. Н. Применение метода расщепления к численному решению динамических задач теории упругости.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, т. 4, № 4, стр. 760—764.
- К о н о в а л ь ц е в И. В. Пример разностной схемы, неустойчивой в классе непрерывных коэффициентов.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, т. 5, № 1, стр. 132—135.
- К о н о в а л ь ц е в И. В. Разностная краевая задача для общей параболической системы.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, т. 4, № 5, стр. 835—847.
- К о р о б о в Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов.— ДАН СССР, 1959, т. 124, № 6, стр. 1207—1210.
- К о р о б о в Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел.— ДАН СССР, 1957, т. 115, № 6, стр. 1062—1065.
- К о р о б о в Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. Физматгиз, М., 1963, 224 с.
- К р ы л о в А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Изд. 6-е. Гостехиздат, М., 1954, 400 с.
- К р ы л о в В. И. О вычислении неопределенного интеграла с малым числом значений интегрируемой функции.— ДАН СССР, 1954, т. 94, № 4, стр. 613—614.
- К р ы л о в В. И. Об определении наименьшей области, голоморфность в которой обеспечивает сходимость эрмитовского интерполирования при любой системе узлов.— ДАН СССР, 1951, т. 78, № 5, стр. 857—859.
- К р ы л о в В. И. Приближенное вычисление интегралов. Изд. 2-е. «Наука», М., 1967, 500 с.
- К р ы л о в В. И. Приложение формулы Эйлера — Лапласа к приближенному решению интегральных уравнений типа Вольтерра.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1949, т. 28, стр. 33—72.
- К р ы л о в В. И. Сходимость и устойчивость численного решения дифференциального уравнения второго порядка.— ДАН БССР, 1960, т. 4, № 5, стр. 187—189.
- К р ы л о в В. И. Увеличение точности механических квадратур. Формулы эйлера вида.— ДАН СССР, 1954, т. 96, № 3, стр. 429—432.
- К р ы л о в В. И., А р л ю к Т. К. О сходимости квадратурных процессов, содержащих значения производных от интегрируемой функции.— ДАН БССР, 1963, т. 7, № 11, стр. 721—723.
- К р ы л о в В. И., Б о б к о в В. В. О методе интегральных соотношений для задачи Гурса.— ДАН БССР, 1963, т. 7, № 7, стр. 433—438.
- К р ы л о в В. И., Л и с к о в е ц О. А. Оценка погрешности метода прямых для задачи Гурса.— ДАН БССР, 1963, т. 7, № 8, стр. 505—508.
- К р ы л о в В. И., М о н а с т ы р н ы й П. И. Об особых случаях метода «прогонки».— ДАН БССР, 1963, т. 7, № 3, стр. 145—148.
- К р ы л о в В. И., С к о б л я Н. С. О численном обращении преобразования Лапласа.— Инж.-физ. журн., 1961, т. 4, № 4, стр. 85—101.

- Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. «Наука», М., 1966, 369 с.
- Крылов В. И., Янович Л. А. О сходимости тригонометрического интерполирования для аналитических периодических функций. — ДАН БССР, 1963, т. 7, № 10, стр. 649—652.
- Кублановская В. Н. О вычислении обобщенной обратной матрицы и проектора. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, т. 6, № 2, стр. 326—332.
- Кублановская В. Н. Об одном процессе доортогонализации системы векторов. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, т. 5, № 2, стр. 326—329.
- Кублановская В. Н. Об одном способе переортогонализации системы векторов. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, т. 4, № 2, стр. 338—340.
- Кублановская В. Н. Применение аналитического продолжения посредством замены переменных в численном анализе. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1959, т. 53, стр. 145—185.
- Кублановская В. Н. Решение проблемы собственных значений для произвольной матрицы. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1962, т. 66, стр. 113—135.
- Курмит А. А. Теория погрешности метода Рунге — Кутты. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1964, № 19, сер. мат. мех., астроном., вып. 4, стр. 35—48.
- Куфарев П. П. Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца — Кристоффеля. — ДАН СССР, 1947, т. 57, № 6, стр. 535—537.
- Лаврентьев М. К теории конформных отображений. — Труды Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. Отд. мат., 1934, т. 5, стр. 159—246.
- Лаврентьев М. А. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. ГИТТЛ, М. — Л., 1946, 159 с.
- Лаврентьев М. М. К вопросу об обратной задаче теории потенциала. — ДАН СССР, 1956, т. 106, № 3, стр. 389—390.
- Лаврентьев М. М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка. — ДАН СССР, 1957, т. 112, № 2, стр. 195—197.
- Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1956, т. 20, № 6, стр. 819—842.
- Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа. — Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1956, т. 2, стр. 118.
- Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962, 92 с.
- Лаврентьев М. М., Васильев В. Г. О постановке некоторых некорректных задач математической физики. — Сиб. мат. журн., 1966, т. 7, № 3, стр. 559—576.
- Ладженская О. А. Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными. — Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 5 (77), стр. 123—148.
- Ладженская О. А. О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов. — ДАН СССР, 1954, т. 97, № 3, стр. 395—398.
- Ладженская О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. Гостехиздат, М., 1953, 280 с.
- Ландау Л. Д., Мейман Н. Н., Халатников И. М. Численные методы интегрирования уравнений в частных производных методом сеток. — Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1958, т. 3, стр. 92—100.
- Ландис Е. М. О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений. — Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 2 (68), стр. 235—237.
- Лебедев В. И. Метод сеток при второй краевой задаче для уравнения Пуассона. — ДАН СССР, 1959, т. 127, № 4, стр. 742—745.
- Лебедев В. И. Метод характеристик для решения кинетического уравнения. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, т. 6, № 2, стр. 251—275.
- Лебедев В. И. О задаче Дирихле и Неймана на треугольных и шестиугольных сетках. — ДАН СССР, 1961, т. 138, № 1, стр. 33—36.
- Лебедев В. И. О методе сеток для одной системы уравнений в частных производных. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1958, т. 22, № 5, стр. 717—734.
- Лебедев В. И. О методе сеток для третьей краевой задачи. — ДАН СССР, 1960, т. 134, № 2, стр. 267—270.

- Лебедев В. И. Разностные аналоги ортогональных разложений основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики. I, II.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, т. 4, № 3, стр. 449—465; № 4, стр. 649—659.
- Лебедев В. И. Уравнения и сходимость дифференциально-разностного метода (метода прямых).— Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ.-мат. и естеств. наук, 1955, № 10, стр. 47—57.
- Левинсон Э. Д. О квадратичной сходимости метода Якоби в случае кратных собственных значений.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, т. 6, № 3, стр. 556—559.
- Лисковец О. А. Метод прямых.— Диф. ур-я, 1965, т. 1, № 12, стр. 1662—1678.
- Лозинский С. М. О формулах механических квадратур.— Изв. АН СССР, Сер. мат., 1940, т. 4, № 1, стр. 113—126.
- Лозинский С. М. Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.— Изв. вузов. Математика, 1958, № 5, стр. 52—90.
- Люстерник Л. А. Конечно-разностный аналог функции Грина в трехмерном случае.— В кн.: Вычислительная математика. Сб. 1. Изд-во АН СССР, М., 1957, стр. 3—22.
- Люстерник Л. А. О разностном аналоге функции Грина для оператора Лапласа.— Труды Сем. по функц. анализу Воронежск. ун-та, 1956, вып. 1, стр. 43—53.
- Люстерник Л. А. О разностных аппроксимациях оператора Лапласа.— Усп. мат. наук, 1954, т. 9, вып. 2 (60), стр. 3—66.
- Марчук Г. И. Численные методы расчета ядерных реакторов. Атомиздат, М., 1958, 381 с.
- Марчук Г. И. Численные методы решения задач прогноза погоды и теории климата. Ч. 1. Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1965, 101 с.
- Марчук Г. И., Яненко Н. Н. Применение метода расщепления (дробных шагов) для решения задач математической физики.— В кн.: Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. «Наука», Сиб. отд., Новосибирск, 1966, стр. 5—22.
- Мейман Н. Н. К теории уравнений в частных производных.— ДАН СССР, 1954, т. 97, № 4, стр. 593—596.
- Мергелян С. Н. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа.— Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 5 (71), стр. 3—26.
- Мергелян С. Н. О представлении функций рядами полиномов на замкнутых множествах.— ДАН СССР, 1951, т. 78, № 3, стр. 405—408.
- Микеладзе Ш. Е. Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений и их приложения к задачам теории упругости. Гостехиздат, М.— Л., 1951, 291 с.
- Микеладзе Ш. Е. О численном интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными.— Изв. АН СССР. Отд. мат. и естеств. наук, 1934, № 6, стр. 819—842.
- Микеладзе Ш. Е. О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1941, т. 5, № 1, стр. 57—74.
- Микеладзе Ш. Е. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1936, 108 с.
- Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. Гостехиздат, М., 1957, 476 с.
- Михлин С. Г. Об устойчивости метода Рунге.— ДАН СССР, 1960, т. 135, № 1, стр. 16—19.
- Михлин С. Г. По поводу метода Рунге.— ДАН СССР, 1956, т. 106, № 3, стр. 391—394.
- Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехиздат, М.— Л., 1952, 216 с.
- Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике. ГИТТЛ, М.—Л., 1950, 428 с.
- Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. «Наука», М., 1966, 430 с.

- М и х л и н С. Г., С м о л и ц к и й Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. «Наука», М., 1965, 383 с.
- М о л ч а н о в И. Н. О методах решения эллиптических уравнений второго порядка, экономящих память вычислительной машины.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, т. 3, № 4, стр. 720—729.
- М о н а с т ы р н ы й П. И. Приведение многоточечной задачи для системы дифференциальных уравнений к задачам Коши методом ортогональных преобразований.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1957, т. 7, № 2, стр. 284—295.
- М о р о з о в В. А. О регуляризирующих семействах операторов.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та. Вып. 8. Изд-во Моск. ун-та, М., 1967, стр. 63—95.
- М ы с о в с к и х И. П. О сходимости метода механических кубатур для решения интегральных уравнений.— В кн.: Методы вычислений. Вып. 4. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1967, стр. 63—72.
- М ы с о в с к и х И. П. О точности вычисления характеристических чисел интегрального уравнения методом механических квадратур.— В кн.: Методы вычислений. Вып. 3. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1966, стр. 13—21.
- Н г у е н К о н г Т у й. О сходимости метода характеристик.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1966, № 3, стр. 5—9.
- Ч и к о л а е в а Г. А. О приближенном построении конформного преобразования методом сопряженных тригонометрических рядов.— ДАН СССР, 1956, т. 110, № 2, стр. 180—183.
- Н и к о л ь с к и й С. М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами.— Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 2 (36), стр. 165—177.
- Н и к о л ь с к и й С. М. Квадратурные формулы. Физматгиз, М., 1958, 124 с.
- Н о в и к о в П. С. Об единственности решения обратной задачи потенциала.— ДАН СССР, 1938, т. 18, № 3, стр. 163—168.
- П а н о в Д. Ю. Численное решение квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных. Гостехиздат, М., 1957, 216 с.
- П и л а т о в с к и й В. П. О приближенном вычислении значений функции, заданной лапласовым изображением.— ДАН СССР, 1952, т. 82, № 2, стр. 197—200.
- П о л о ж и й Г. Н. Об одном методе решения интегральных уравнений.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, т. 23, № 2, стр. 295—312.
- П о л о ж и й Г. Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киевск. ун-та, К., 1962, 161 с.
- П р и к а з ч и к о в В. Г. Асимптотика собственных значений для схем высокого порядка точности в классе кусочно-непрерывных коэффициентов.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, т. 6, № 5, стр. 927—930.
- П р и к а з ч и к о в В. Г. Однородные разностные схемы четвертого порядка точности для задачи Штурма — Лиувилля. В кн.: Вычислительные методы и программирование. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та. Вып. 3. Изд-во Моск. ун-та, М., 1965, стр. 232—236.
- Р е м е з Е. Я. О чебышевских приближениях в комплексной области.— ДАН СССР, 1951, т. 77, № 6, стр. 965—968.
- Р и в к и н д В. Я. Приближенный метод решения задачи Дирихле и об оценках скорости сходимости решений разностных уравнений к решениям эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами.— Вестн. Ленингр. ун-та, сер. мат., мех. и астрон., 1964, № 13, вып. 3, стр. 37—52.
- Р я б е н ь к и й В. С. О применении метода конечных разностей к решению задачи Коши.— ДАН СССР, 1952, т. 86, № 6, стр. 1071—1074.
- Р я б е н ь к и й В. С., Ф и л и п п о в А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений. Гостехиздат, М., 1956, 171 с.
- С а в е н к о в В. Н. Визначення констант інтеграла Крістоффеля — Шварца для довільного однозв'язного чотирикутника.— ДАН УРСР, 1964, № 5, стор. 574—576.
- С а м а р с к и й А. А. Априорные оценки для разностных уравнений.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1961, т. 1, № 6, стр. 972—1000.
- С а м а р с к и й А. А. К теории разностных схем.— ДАН СССР, 1965, т. 165, № 5, стр. 1007—1010.

- Самарский А. А. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, т. 3, № 3, стр. 431—466.
- Самарский А. А. О принципе аддитивности для построения экономичных разностных схем.— ДАН СССР, 1965, т. 165, № 6, стр. 1253—1256.
- Самарский А. А. О регуляризации разностных схем.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1967, т. 7, № 1, стр. 62—93.
- Самарский А. А. О сходимости и точности однородных разностных схем для одномерных и многомерных параболических уравнений.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1962, т. 2, № 4, стр. 603—634.
- Самарский А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1962, т. 2, № 5, стр. 787—811.
- Самарский А. А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, т. 3, № 5, стр. 812—840.
- Самарский А. А. Экономичные разностные схемы для гиперболической системы уравнений со смешанными производными и их применение для уравнений теории упругости.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, т. 5, № 1, стр. 34—43.
- Самарский А. А., Андреев В. Б. Итерационные схемы переменных направлений для численного решения задачи Дирихле.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, т. 4, № 6, стр. 1025—1036.
- Самарский А. А., Фрязинов И. В. О сходимости однородных разностных схем для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1961, т. 1, № 5, стр. 806—824.
- Сапеговас М. П. Метод конечных разностей для решения квазилинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, т. 5, № 4, стр. 638—647.
- Саульев В. К. Замечание к вопросу о расчете цилиндрических реакторов.— Атомная энергия, 1957, т. 3, № 7, стр. 53—54.
- Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. Физматгиз, М., 1960, 324 с.
- Саульев В. К. Об одном методе автоматизации решения краевых задач на быстродействующих вычислительных машинах.— ДАН СССР, 1962, т. 144, № 3, стр. 497—500.
- Саульев В. К. Об одном способе численного интегрирования уравнений диффузии.— ДАН СССР, 1957, т. 115, № 6, стр. 1077—1079.
- Саульев В. К. Об оценке погрешности при нахождении собственных функций методом конечных разностей.— В кн.: Вычислительная математика. № 1. Изд-во АН СССР, М., 1957, стр. 87—115.
- Саульев В. К. О многопараметрических семействах сеточных уравнений для численного интегрирования нестационарных уравнений диффузии.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, т. 3, № 1, стр. 198—201.
- Сердюкова С. И. Равномерная устойчивость по начальным данным шеститочечной симметричной схемы для уравнения теплопроводности.— В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. «Наука», М., 1964, стр. 212—216.
- Скобля Н. С. Таблицы для численного обращения преобразования Лапласа
- $$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xp} F(p) dp. \text{ «Наука и техника», Минск, 1964, 44 с.}$$
- Слободянский М. Г. Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости.— Прикл. мат. и мех., 1939, т. 3, вып. 1, стр. 75—82.
- Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. «Наука», М.—Л., 1964, 438 с.
- Соболев С. Л. Лекции по теории кубатурных формул. Ч. 1, 2. Изд-во Новосиб. ун-та, Новосибирск, 1964, 1965.
- Соболев С. Л. О формулах механических кубатур на поверхности сферы.— Сиб. мат. журн., 1962, т. 3, № 5, стр. 769—796.

- С о б о л е в С. Л. Об одном разностном аналоге полигармонического уравнения. — ДАН СССР, 1965, т. 164, № 1, стр. 54—57.
- С о к о л о в Ю. Д. О методе осреднения функциональных поправок. — Укр. мат. журн., 1957, т. 9, № 1, стр. 82—100.
- С т е к л о в В. А. О приближенном вычислении определенных интегралов при помощи формул механических квадратур. Сходимость формул механических квадратур. I. — Изв. Имп. Акад. наук. Сер. 6, 1916, т. 10, № 3, стр. 169—186.
- Т и х о н о в А. Н. О методах регуляризации задач оптимального управления. — ДАН СССР, 1965, т. 162, № 4, стр. 763—765.
- Т и х о н о в А. Н. О некорректных задачах оптимального планирования. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, т. 6, № 1, стр. 81—89.
- Т и х о н о в А. Н. О нелинейных уравнениях первого рода. — ДАН СССР, 1965, т. 161, № 5, стр. 1023—1026.
- Т и х о н о в А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. — ДАН СССР, 1963, т. 153, № 1, стр. 49—52.
- Т и х о н о в А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. — ДАН СССР, 1963, т. 151, № 3, стр. 501—504.
- Т и х о н о в А. Н. О решении нелинейных интегральных уравнений первого рода. — ДАН СССР, 1964, т. 156, № 6, стр. 1296—1299.
- Т и х о н о в А. Н. Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, т. 5, № 4, стр. 718—722.
- Т и х о н о в А. Н. Об устойчивости задачи оптимизации функционалов. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, т. 6, № 4, стр. 631—634.
- Т и х о н о в А. Н. Об устойчивости обратных задач. — ДАН СССР, 1943, т. 39, № 5, стр. 195—198.
- Т и х о н о в А. Н. Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье. — ДАН СССР, 1964, т. 156, № 2, стр. 268—271.
- Т и х о н о в А. Н., Г л а с к о В. Б. О приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма I рода. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, т. 4, № 3, стр. 564—571.
- Т и х о н о в А. Н., Г л а с к о В. Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, т. 5, № 3, стр. 463—473.
- Т и х о н о в А. Н., Г о р б у н о в А. Д. Асимптотические разложения погрешности разностного метода решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1962, т. 2, № 4, стр. 537—548.
- Т и х о н о в А. Н., Г о р б у н о в А. Д. Об оптимальности неявных разностных схем типа Адамса. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1962, т. 2, № 5, стр. 930—933.
- Т и х о н о в А. Н., Г о р б у н о в А. Д. Оценки погрешности метода типа Рунге — Кутты и выбор оптимальных сеток. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, т. 4, № 2, стр. 232—241.
- Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Об однородных разностных схемах. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1961, т. 1, № 1, стр. 5—63.
- Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Об устойчивости разностных схем. — ДАН СССР, 1963, т. 149, № 3, стр. 529—531.
- Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1962, т. 2, № 5, стр. 812—832.
- Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Разностная задача Штурма — Лиувилля. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1961, т. 1, № 5, стр. 784—805.
- Ф а д д е е в Д. К., Ф а д д е е в а В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1963, 734 с.
- Ф а д д е е в а В. Н. Сдвиг для систем с плохо-обусловленными матрицами. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, т. 5, № 5, стр. 907—911.
- Ф а д д е е в а В. Н. Треугольно-ортогональные методы для решения полной проблемы собственных значений. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, т. 3, № 3, стр. 559—560.

- Федоренко Р. П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1961, т. 1, № 5, стр. 922—927.
- Филиппов А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений.— ДАН СССР, 1955, т. 100, № 6, стр. 1045—1048.
- Фильчаков П. Ф. Об одном методе определения констант интеграла Кристоффеля — Шварца.— ДАН СССР, 1961, т. 139, № 1, стр. 44—47.
- Фрязинов И. В. О разностной аппроксимации граничных условий для третьей краевой задачи.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, т. 4, № 6, стр. 1106—1112.
- Фрязинов И. В. О решении третьей краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности в произвольной области локально-одномерным методом.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, т. 6, № 3, стр. 487—502.
- Фрязинов И. В. Об устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1961, т. 1, № 6, стр. 1122—1127.
- Хажалия Г. Я. К теории конформных отображений двухсвязных областей.— Мат. сб., 1940, т. 8 (50), вып. 1, стр. 97—106.
- Хара И. С. Несколько приближенных формул в теории конформных отображений.— ДАН СССР, 1959, т. 126, № 6, стр. 1210—1213.
- Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч. 1. Линейные краевые задачи. Изд-во АН УССР, 1963, 195 с.
- Шаманский В. Е. Численное решение разностных краевых задач с помощью разностных задач эволюционного типа.— Укр. мат. журн., 1965, т. 17, № 1, стр. 102—108.
- Шрейдер Ю. А. Решение систем линейных совместных алгебраических уравнений.— ДАН СССР, 1951, т. 76, № 5, стр. 651—654.
- Шура-Бура М. Р. Оценки ошибок численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.— Прикл. мат. и мех., 1952, т. 16, вып. 5, стр. 575—588.
- Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. «Наука», Сиб. отд., Новосибирск, 1967, 194 с.
- Яненко Н. Н. О сходимости метода расщепления для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1962, т. 2, № 5, стр. 933—937.
- Яненко Н. Н. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности.— ДАН СССР, 1959, т. 125, № 6, стр. 1207—1210.
- Яненко Н. Н. Об экономичных неявных схемах (метод дробных шагов).— ДАН СССР, 1960, т. 134, № 5, стр. 1034—1036.
- Яненко Н. Н., Бояринцев Ю. Е. О сходимости разностных схем для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.— ДАН СССР, 1961, т. 139, № 6, стр. 1322—1324.
- Яненко Н. Н., Сучков В. А., Погодин Ю. Я. О разностном решении уравнения теплопроводности в криволинейных координатах.— ДАН СССР, 1959, т. 128, № 5, стр. 903—905.
- Янович Л. А. Приближение периодических аналитических функций тригонометрическими многочленами и рациональными тригонометрическими функциями. II.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1967, № 3, стр. 40—50.

К главе III. Математические методы в теоретической физике

- Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1959, 915 с.
- Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы.— ДАН СССР, 1937, т. 14, № 5, стр. 247—250.
- Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 6 (114), стр. 91—192.

- А р н о л ь д В. И. Устойчивость и неустойчивость динамических систем со многими степенями свободы.— В кн.: Труды Второго Всесоюзн. съезда по теор. и прикл. мех. Вып. 1. «Наука», М., 1965, стр. 16—19.
- А х и е з е р А. И. Дифракционное излучение фотонов частицами со спином $\frac{1}{2}$.— ДАН СССР, 1959, т. 94, № 4, стр. 651—654.
- А х и е з е р А. И. Квантовая электродинамика.— В кн.: Развитие физики в СССР. Кн. 1. «Наука», М., 1967, стр. 19—34.
- А х и е з е р А. И., Б а р ь я х т а р В. Г., П е л е т м и н с к и й С. В. Спиновые волны. «Наука», М., 1967, 368 с.
- А х и е з е р А. И., Б е р е с т е ц к и й В. Б. Квантовая электродинамика. ГИТТЛ, М., 1953, 428 с. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1959, 656 с.
- А х и е з е р А., П о м е р а н ч у к И. Некоторые вопросы теории ядра. ГИТТЛ, М.— Л., 1948, 320 с. Изд. 2-е. ГИТТЛ, М.— Л., 1950, 416 с.
- Б е л е н ь к и й С. З. Лавинные процессы в космических лучах. ГИТТЛ, М.— Л., 1948, 343 с.
- Б е р е с т е ц к и й В. Б. Асимптотическое поведение электромагнитной поляризации вакуума при наличии мезонных взаимодействий.— Журн. exper. и теор. физ., 1955, т. 29, вып. 5, стр. 585—598.
- Б е р е с т е ц к и й В. Б., Л а н д а у Л. Д. О взаимодействии между электроном и позитроном.— Журн. exper. и теор. физ., 1949, т. 19, вып. 8, стр. 673—679.
- Б о г о л ю б о в Н. Н. К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости. Р-1395. Объедин. ин-т ядерн. исслед. Лабор. теор. физ., Дубна, 1963, 41 с.
- Б о г о л ю б о в Н. Н. К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости. Р-511. Объедин. ин-т ядерн. исслед., Дубна, 1960, 99 с.
- Б о г о л ю б о в Н. Н. К вопросу об условии сверхтекучести в теории ядерной материи.— ДАН СССР, 1958, т. 119, № 1, стр. 52—55.
- Б о г о л ю б о в Н. Н. Квазисредние в задачах статистической механики. Д-781. Объедин. ин-т ядерн. исслед. Лабор. теор. физ., Дубна, 1961, 123 с.
- Б о г о л ю б о в Н. Н. К теории сверхпроводящего состояния.— Научн. докл. высш. шк. Физ.-мат. науки, 1958, № 1, стр. 3—11.
- Б о г о л ю б о в Н. Н. К теории сверхтекучести.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1947, т. 11, № 1, стр. 77—90.
- Б о г о л ю б о в Н. Кинетические уравнения.— Журн. exper. и теор. физ., 1946, т. 16, вып. 8, стр. 691—702.
- Б о г о л ю б о в Н. Н. Кинетические уравнения в теории сверхтекучести.— Журн. exper. и теор. физ., 1948, т. 18, вып. 7, стр. 622—630.
- Б о г о л ю б о в М. М. Лекції з квантової статистики. Питання статистичної механіки квантових систем. «Рад. школа», К., 1949, 227 с.
- Б о г о л ю б о в Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд-во АН УССР, К., 1945, 137 с.
- Б о г о л ю б о в Н. Н. О новом методе в теории сверхпроводимости. I.— Журн. exper. и теор. физ., 1958, т. 34, вып. 1, стр. 58—65.
- Б о г о л ю б о в Н. Н. О принципе компенсации и методе самосогласованного поля.— Усп. физ. наук, 1959, т. 67, вып. 4, стр. 549—580.
- Б о г о л ю б о в Н. Н. Об одном вариационном принципе в задаче многих тел.— ДАН СССР, 1958, т. 119, № 2, стр. 244—246.
- Б о г о л ю б о в Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. Гостехиздат, М.— Л., 1946, 119 с.
- Б о г о л ю б о в Н. Н. Уравнения с вариационными производными в проблемах статистической физики и квантовой теории поля.— Вестн. Моск. ун-та, 1955, № 4-5, стр. 115—124.
- Б о г о л ю б о в Н. Н., В л а д и м и р о в В. С. О некоторых математических вопросах квантовой теории поля.— В кн.: Международный математический конгресс в Эдинбурге 1958 (обзорные доклады). Физматгиз, М., 1962, стр. 24—47.
- Б о г о л ю б о в Н. Н., Г у р о в К. П. Кинетические уравнения в квантовой механике.— Журн. exper. и теор. физ., 1947, т. 17, вып. 7, стр. 614—628.

- Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н. Волновая функция нижнего состояния системы взаимодействующих бозе-частиц.— Журн. exper. и теор. физ., 1955, т. 28, вып. 2, стр. 129—139.
- Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н. Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле.— Укр. мат. журн., 1955, т. 7, № 1, стр. 5—17.
- Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Церковников Ю. А. Асимптотически точное решение для модельного гамильтониана теории сверхпроводимости.— Журн. exper. и теор. физ., 1960, т. 39, вып. 1, стр. 120—129.
- Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Церковников Ю. А. К теории фазового перехода.— ДАН СССР, 1957, т. 117, № 5, стр. 788—791.
- Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. Физматгиз, М., 1958, 203 с.
- Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 3-е. Физматгиз, М., 1963, 410 с.
- Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике.— Труды Межд. симп. по нелинейн. колебаниям. К., 1963, т. 1, стр. 93—154.
- Боголюбов Н. Н., Соловьев В. Г. Об одном вариационном принципе в проблеме многих тел.— ДАН СССР, 1959, т. 124, № 5, стр. 1011—1014.
- Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В. Новый метод в теории сверхпроводимости. Изд-во АН СССР, М., 1958, 128 с.
- Боголюбов Н. Н., Тябликов С. В. Запаздывающие и опережающие функции Грина в статистической физике.— ДАН СССР, 1959, т. 126, № 1, стр. 53—56.
- Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, М., 1957, 442 с.
- Бонч-Бруевич В. Л., Тябликов С. В. Метод функций Грина в статистической механике. Физматгиз, М., 1961, 312 с.
- Векслер В. И. Новый метод ускорения релятивистских частиц.— ДАН СССР, 1944, т. 43, № 8, стр. 346—348.
- Векслер В. И. О новом методе ускорения релятивистских частиц.— ДАН СССР, 1944, т. 44, № 9, стр. 393—396.
- Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. «Наука», М., 1964, 411 с.
- Галанин А. Д., Иоффе Б. Л., Померанчук И. Я. Перенормировка массы и заряда в ковариантных уравнениях квантовой теории поля.— ДАН СССР, 1954, т. 98, № 3, стр. 361—364.
- Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. Изд. 2-е. ГИТТЛ, М.— Л., 1950, 360 с.
- Гельфанд И. М., Минлос Р. А. Решение уравнений квантованных полей.— ДАН СССР, 1954, т. 97, № 2, стр. 209—212.
- Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. Физматгиз, М., 1958, 368 с.
- Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Изд. 2-е. «Наука», М., 1967, 683 с.
- Горшков В. Г., Грибов В. Н., Фролов Г. В. Дважды логарифмическая асимптотика Комpton-эффекта при рассеянии на большие углы.— Журн. exper. и теор. физ., 1966, т. 51, вып. 4, стр. 1093—1106.
- Грибов В. Н., Колкунов В. А., Окунь Л. Б., Шехтер В. М. Ковариантный вывод формул Вайцекера—Вильямса.— Журн. exper. и теор. физ., 1961, т. 41, вып. 6, стр. 1839—1841.
- Гуревич Л. Э. Теория плазмы.— В кн.: Развитие физики в СССР. Кн. 1. «Наука», М., 1967, стр. 141—150.
- Гуревич Л. Э. Физическая кинетика.— В кн.: Развитие физики в СССР. Кн. 1. «Наука», М., 1967, стр. 113—140.
- Давыдов А. С. Возбужденные состояния атомных ядер. Атомиздат, М., 1967, 263 с.
- Давыдов А. С. Теория атомного ядра. Физматгиз, М., 1958, 611 с.

- З е л ь д о в и ч Я. Б. Теория горения и детонации газов. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1944, 70 с.
- З е л ь д о в и ч Я. Б., Н о в и к о в И. Д. Излучение гравитационных волн телами, движущимися в поле коллапсирующей звезды.— ДАН СССР, 1964, т. 155, № 5, стр. 1033—1036.
- З у б а р е в Д. Н. К теории сверхпроводимости.— ДАН СССР, 1960, т. 132, № 5, стр. 1055—1058.
- И в а н е н к о Д. Д., С о к о л о в А. А. К теории «светящегося» электрона.— ДАН СССР, 1948, т. 59, № 9, стр. 1551—1554.
- И о р д а н с к и й С. В. О гидродинамике вращающейся бозе-системы ниже точки конденсации.— ДАН СССР, 1963, т. 153, № 1, стр. 74—77.
- К а п и ц а П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса.— Журн. exper. и теор. физ., 1951, т. 21, вып. 5, стр. 588—597.
- К о л м о г о р о в А. Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона.— ДАН СССР, 1954, т. 98, № 4, стр. 527—530.
- К о л м о г о р о в А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика.— В кн.: Международный математический конгресс в Амстердаме 1954 (обзорные доклады). Физматгиз, М., 1961, стр. 187—208.
- К о ч и н Н. Е. Собр. соч. Т. 1, 2. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1949.
- К р е й н М. Г. Основные положения теории λ -зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— В кн.: Памяти А. А. Андропова. Изд-во АН СССР, М., 1955, стр. 413—498.
- К р ы л о в Н. М., Б о г о л ь б о в Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд-во АН УССР, К., 1937, 365 с.
- К р ы л о в Н. М., Б о г о л ь б о в Н. Н. Основные проблемы нелинейной механики.— Изв. АН СССР. Отд. мат. и естеств. наук, 1933, № 4, стр. 475—498.
- Л а н д а у Л. Д. Собрание трудов. Т. 1, 2. «Наука», М., 1969.
- Л а н д а у Л. Теория сверхтекучести гелия-II.— Журн. exper. и теор. физ., 1941, т. 11, вып. 6, стр. 592—614.
- Л а н д а у Л. Д., А б р и к о с о в А. А., Х а л а т н и к о в И. М. Асимптотическое выражение для гриновской функции электрона в квантовой электродинамике.— ДАН СССР, 1954, т. 95, № 4, стр. 773—776.
- Л а н д а у Л. Д., А б р и к о с о в А. А., Х а л а т н и к о в И. М. Об устранении бесконечностей в квантовой электродинамике.— ДАН СССР, 1954, т. 95, № 3, стр. 497—500.
- Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1963, 702 с.
- Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика. Изд. 2-е. «Наука», М., 1965, 203 с.
- Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е. ГИТТЛ, М., 1954, 795 с.
- Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Статистическая физика. Изд. 2-е. «Наука», М., 1964, 567 с.
- Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Теория поля. Изд. 5-е. «Наука», М., 1967, 460 с.
- Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, М., 1957, 532 с.
- Л а н д а у Л. Д., П о м е р а н ч у к И. Я. Излучение γ -квантов при столкновении быстрых π -мезонов с нуклонами.— Журн. exper. и теор. физ., 1953, т. 24, вып. 5, стр. 505—515.
- Л а н д а у Л. Д., П о м е р а н ч у к И. Я. Электронно-лавинные процессы при сверхвысоких энергиях.— ДАН СССР, 1953, т. 92, № 4, стр. 735—738.
- Л е в и ч В. Г., К р ы л о в В. С. Статистическая физика.— В кн.: Развитие физики в СССР. Кн. 1. «Наука», М., 1967, стр. 74—98.
- Л е о н т о в и ч М. А. О силах, действующих на прямолинейный ток, находящийся внутри проводящей цилиндрической трубы.— В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1958, стр. 110—114.

- Л и ф ш и ц Е. М. Теория сверхтекучести гелия II.— Усп. физ. наук, 1948, т. 34, вып. 4, стр. 512—559.
- Л и ф ш и ц Е. М. Тормозное излучение при столкновении электронов.— Журн. эксперим. и теор. физ., 1948, т. 18, вып. 6, стр. 562—565.
- Л и ф ш и ц И. М., К а г а н о в М. И. Теория твердого тела.— В кн.: Развитие физики в СССР. Кн. 1. «Наука», М., 1967, стр. 257—273.
- Л о г у н о в А. А. Спектральное представление и ренормализационная группа.— ДАН СССР, 1956, т. 109, № 4, стр. 740—742.
- Л о г у н о в А. А., Л ю И-ч е н ь, Т о д о р о в И. Т., Ч е р н и к о в Н. А. Дисперсионные соотношения и аналитические свойства парциальных амплитуд в теории возмущений.— Укр. мат. журн., 1963, т. 15, № 3, стр. 250—276.
- Л о й ц я н с к и й Л. Г. Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока.— Труды ЦАГИ, 1939, вып. 440, стр. 1—23.
- М а н д е л ь ш т а м Л. И. Полное собрание трудов. Т. 1—5. Изд-во АН СССР, М., 1947—1955.
- М а н д е л ь ш т а м Л. И., П а п а л е к с и Н. Д., А н д р о н о в А. А., В и т т А. А., Г о р е л и к Г. С., Х а й к и н С. Э. Новые исследования нелинейных колебаний.— В кн.: М а н д е л ь ш т а м Л. И. Полное собрание трудов. Т. 3. Изд-во АН СССР, 1950, стр. 89—177.
- М и г д а л А. Б. Влияние многократного рассеяния на тормозное излучение при больших энергиях.— ДАН СССР, 1954, т. 96, № 1, стр. 49—52.
- М и л л и о н щ и к о в М. Д. Вырождение однородной изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости.— ДАН СССР, 1939, т. 22, № 5, стр. 236—240.
- Н а й м а р к М. А. Линейные представления группы Лоренца. Физматгиз, М., 1958, 376 с.
- П а р а с ю к О. С. К теории R -операции Боголюбова.— Укр. мат. журн., 1960, т. 12, № 3, стр. 287—307.
- П е т р и н а Д. Я. Комплексные особые точки вкладов диаграмм Фейнмана и теорема непрерывности.— Укр. мат. журн., 1964, т. 16, № 1, стр. 31—40.
- П е т р о в А. З. Новые методы в общей теории относительности. «Наука», М., 1966, 495 с.
- П о м е р а н ч у к И. Равенство нулю перенормированного заряда в квантовой электродинамике.— ДАН СССР, 1955, т. 103, № 6, стр. 1005—1008.
- С а х а р о в А. Д. Теория магнитного термоядерного реактора.— В кн.: Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. Т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1958, стр. 20—30.
- С е д о в Л. И. О некоторых неустановившихся движениях сжимаемой жидкости.— Прикл. мат. и мех., 1945, т. 9, вып. 4, стр. 293—311.
- С у д а к о в В. В. Вершинные части для сверхвысоких энергий в квантовой электродинамике.— Журн. эксперим. и теор. физ., 1956, т. 30, вып. 1, стр. 87—95.
- Т а м м И. Е., Ф р а н к И. М. Когерентное излучение быстрого электрона в среде.— ДАН СССР, 1937, т. 14, № 3, стр. 107—112.
- Т е р - М и к а е л я н М. Л. Интерференционное излучение сверхбыстрых электронов.— Журн. эксперим. и теор. физ., 1953, т. 25, вып. 3, стр. 296—306.
- Т о д о р о в И. Т. Аналитические свойства диаграмм Фейнмана в квантовой теории поля. Изд-во Болг. акад. наук, София, 1966, 135 с.
- Т я б л и к о в С. В. Низкотемпературные разложения в теории ферромагнетизма. I, II.— Физика металлов и металловедение, 1963, т. 15, вып. 5, стр. 641—651; вып. 6, стр. 801—812.
- Т я б л и к о в С. В., Т о л м а ч е в В. В. К классической теории сильных электролитов.— Научн. докл. высш. шк. Физ.-мат. науки, 1958, № 1, стр. 101—109.
- Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. «Наукова думка», К., 1967, 815 с.
- Ф о к В. А. Собственное время в классической и квантовой механике.— Изв. АН СССР. Отд. мат. и естеств. наук. Сер. физ., 1937, № 4-5, стр. 551—568.
- Ф о к В. А. Теория пространства, времени и тяготения. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1961, 563 с.
- Ф р а д к и н Е. С. О некоторых общих соотношениях в квантовой электродинамике.— Журн. эксперим. и теор. физ., 1955, т. 29, вып. 2, стр. 258—261.

- Ф радкин Е. С. Функции Грина для взаимодействия нуклеонов с мезонами.— ДАН СССР, 1954, т. 98, № 1, стр. 47—50.
- Френкель Я. И. Собрание избранных трудов. Т. 1, 2. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1956, 1958.
- Фридман А. А. Избранные труды. «Наука», М., 1966, 462 с.
- Шапиро И. С. Коэффициент внутренней конверсии с испусканием пар для электрического и магнитного излучений любой мультипольности.— Журн. эксперим. и теор. физ., 1949, т. 19, вып. 7, стр. 597—604.
- Achieser A. Über die Streuung von Licht an Licht.— Phys. Z. Sowjet. 1937, Bd 11, H. 3, S. 263—283.
- Андронов А. Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues.— Comptes rendus Acad. sci., 1929, t. 189, p. 559—562.
- Arzimovich L., Pomeranchuk I. The radiation of fast electrons in the magnetic field.— J. Phys. USSR, 1945, v. 9, N 4, p. 267—276.
- Bogoliubov N. N. On some problems of the theory of superconductivity.— Proc. of the Intern. congress on many particle problems. Suppl. to Physica, 1960, d. 26, p. 1—16.
- Bogoliubov N. N., Parasiuk O. S. Über die Multiplikation der Kausal-funktionen in der Quantentheorie der Felder.— Acta Math., 1957, 97, N 3-4, S. 227—266.
- Fock V. Konfigurationsraum und zweite Quantelung.— Z. Phys., 1932, Bd 75, H. 9-10, S. 622—647.
- Fock V. Näherungsmethode zur Lösung des quantenmechanischen Mehrkörper-problems.— Z. Phys., 1930, Bd 61, H. 1-2, S. 126—148.
- Gachok V. P. Quasi-analytic functionals and self-adjointness of field operators.— Nuovo Cimento. Ser. X, 1966, v. 45A, N 1, p. 158—165.
- Hepp K. Proof of the Bogoliubov—Parasiuk theorem on renormalization.— Commu-nications in math. phys., 1966, v. 2, p. 301—326.
- Kompанеев А. Multiple scattering of fast electrons and α -particles in heavy elements.— J. Phys. USSR, 1945, v. 9, N 1, p. 17—24.
- Landau L., Peierls R. Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzips für die relativistische Quantentheorie.— Z. Phys., 1931, Bd 69, H. 1/2.
- Landau L., Rumer G. The cascade theory of electronic showers.— Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1938, v. 166, N 925.
- Markov M. Das Mehrkörperproblem in der klassischen relativistischen Theorie.— J. Phys. USSR, 1943, v. 7, N 1, p. 42—47.
- Markov M. On a certain criterion of relativistic invariance.— J. Phys. USSR, 1946, v. 10, N 4, p. 333—340.
- Pomeranchuk I., Smorodinsky J. On the energy levels of systems with $Z > 137$.— J. Phys. USSR, 1945, v. 9, N 2, p. 97—100.
- Tamm Ig. Relativistic interaction of elementary particles.— J. Phys. USSR, 1945, v. 9, N 6, p. 449—460.
- Tamm I. Über die Quantentheorie der molekularen Lichtzerstreuung in festen Körpern.— Z. Phys., 1930, Bd 60, H. 3/4, S. 345—363.
- Tamm I. Über die Wechselwirkung der freien Elektronen mit der Strahlung nach der Diracschen Theorie des Elektrons und nach der Quantenelektrodynamik.— Z. Phys., 1930, Bd 62, H. 7/8, S. 544—568.

К главе IV. Математические методы в механике

- Андронов А. А. Математические проблемы теории автоколебаний.— В кн.: I Всесоюзная конференция по колебаниям. Сб. 1. ГТТИ, М.—Л., 1933, стр. 32—71.
- Андронов А., Майер А. Задача Вышнеградского в теории прямого регу-лирования. I. Теория регулятора прямого действия при наличии кулонов-ского и вязкого трения.— Автоматика и телемеханика, 1947, т. 8, № 5, стр. 314—334.
- Анилович В. Я., Эпштейн Ю. В. Численный метод и ряды Фурье в

- задачах анализа цепей Ассура с вращательными парами. — Теория машин и механизмов, 1962, вып. 92-93, стр. 48—68.
- Аржаных И. С. Поле импульсов. «Наука», УзССР, Ташкент, 1965, 231 с.
- Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. — Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 6 (114), стр. 91—192.
- Артоболовский И. И. Геометрические методы решения некоторых задач теории плоских механизмов. — Труды Сем. по теории машин и механизмов. М., 1947, т. 1, вып. 3, стр. 129—152.
- Артоболовский И. И. Основные проблемы современной динамики машин. — Труды Ин-та машиновед. АН СССР. Сем. по теории машин и механизмов. М., 1961, т. 21, вып. 83—84, стр. 5—28.
- Артоболовский И. И. Основные проблемы современной теории машин. — Машиноведение, 1965, № 1, стр. 5—13.
- Артоболовский И. И. Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых. Изд-во АН СССР, М., 1959, 255 с.
- Артоболовский И. И. Теория механизмов и машин. Гостехиздат, М.—Л., 1940, 762 с.
- Артоболовский И. И., Блох З. Ш., Добровольский В. В. Синтез плоских механизмов. Гостехиздат, М., 1944, 387 с.
- Артоболовский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А. Синтез плоских механизмов. Физматгиз, М., 1959, 1084 с.
- Ассур Л. В. Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации. Изд-во АН СССР, М., 1952, 592 с.
- Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. «Наука», М., 1967, 223 с.
- Баренблатт Г. И. О некоторых задачах неустановившейся фильтрации. — Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, 1954, № 6, стр. 97—110.
- Берг А. И., Кобзарев Ю. Б. Теория расчета ламповых генераторов. Госэнергоиздат, М.—Л., 1932, 433 с.
- Бессонов А. П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев. «Наука», М., 1967, 279 с.
- Блох З. Ш. Приближенный синтез механизмов. Изложение, применение и развитие метода акад. П. Л. Чебышева. Машгиз, М.—Л., 1948, 172 с.
- Боголюбов А. Н. История механики машин. «Наукова думка», К., 1964, 464 с.
- Боголюбов А. Н. Развитие проблем механики машин. Библиография. «Наукова думка», К., 1967, 291 с.
- Боголюбов Н. Кинетические уравнения. — Журн. экспер. и теор. физ., 1946, т. 16, вып. 8, стр. 691—702.
- Боголюбов Н. Н. О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики. — Труды Первой летней мат. школы. К., 1964, ч. 1, стр. 11—101.
- Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 3-е. Физматгиз, М., 1963, 410 с.
- Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике. — Труды Межд. симпоз. по нелинейн. колебаниям. К., 1963, т. 1, стр. 93—154.
- Борисов Ю. П. К гидравлическим расчетам при упругом режиме. — Труды Всесоюзн. нефтегазового научно-исслед. ин-та, 1956, вып. 8, стр. 208—231.
- Бруевич Н. Г. Точность механизмов. ГТТИ, М.—Л., 1946, 332 с.
- Булгаков Б. В. Колебания. Гостехиздат, М., 1954, 891 с.
- Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. Изд. 2-е. Гостехиздат, М., 1955, 355 с.
- Бюшгенс С. С. Метод комплексного переменного в кинематике плоских механизмов. Изд-во АН СССР, М., 1939, 72 с.
- Вагнер В. В. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем. — Труды Сем. по векторн. и тензорн. анализу. М., 1941, вып. 5, стр. 301—327.
- Василенко М. В., Писаренко Г. С. Змущені поперечно-крутильні коливання стержнів з урахуванням внутрішнього тертя. — ДАН УРСР, 1959, № 8, стор. 833—836.
- Бевиоровская М. А., Кравченко И. П., Румянцев С. А. Метод

- гидравлических аналогий В. С. Лукьянова и метод электрогидродинамических аналогий Н. Н. Павловского применительно к фильтрационным расчетам. Изд-во Моск. ун-та, М., 1962, 257 с.
- Г а в р и л е н к о В. А. Зубчатые передачи в машиностроении. Теория эвольвентных зубчатых передач. Машгиз, М., 1962, 531 с.
- Г а л е р к и н Б. Г. Собрание сочинений. Т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1952, 392 с.
- Г а н т м а х е р Ф. Р., Я к у б о в и ч В. А. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем.— Труды Второго Всесоюз. съезда по теор. и прикл. мех., 1965, вып. 1, стр. 30—63.
- Г е р о н и м у с Я. Л. Геометрический аппарат теории синтеза плоских механизмов. Физматгиз, М., 1962, 399 с.
- Г е р о н и м у с Я. Л. Динамический синтез механизмов по методу Чебышева. Изд-во Харьк. ун-та, Харьков, 1958, 136 с.
- Г е р о н и м у с Я. Л. О некоторых применениях римановой геометрии к изучению динамических систем.— Труды Харьк. авиац. ин-та, 1955, вып. 16, стр. 135—140.
- Г е р с е в а н о в Н. М. Приложение функционального анализа при решении задач по фильтрации грунтовых вод.— Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, 1943, № 7, стр. 73—89.
- Г е р ш г о р и н С. А. О механизмах для построения функций комплексного переменного.— Журн. Ленингр. физ.-мат. о-ва, 1926, т. 1, № 1, стр. 102—113.
- Г е р ш г о р и н С. А. О приближенном интегрировании дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона.— Изв. Ленингр. политехн. ин-та. Отд. естествозн., мат., 1927, т. 30, стр. 75—95.
- Г л у щ е н к о А. А., Б е з д е т н ы й Б. П. Применение метода суммарных представлений к обратным задачам теории фильтрации.— В кн.: Вычислительная и прикладная математика, вып. 4. Изд-во Киевск. ун-та, К., 1967, стр. 14—27.
- Г о л у б е н ц е в А. Н. Динамика переходных процессов в машинах со многими массами. Машгиз, М.— К., 1959, 146 с.
- Г о л у б е н ц е в А. Н. Интегральные методы в динамике. К., 1967, 350 с.
- Г р о б о в В. А. Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин. Изд-во АН СССР, М., 1961, 166 с.
- Г у с е й н о в Г. П. Некоторые вопросы гидродинамики нефтяного пласта. «Азерб. недр», Баку, 1961, 231 с.
- Г ю н т е р Н. М. О движении жидкости, заключенной в данном перемещающемся сосуде. I—VI.— Изв. АН СССР. Сер. 6, 1926, т. 20, стр. 1323—1348, 1503—1532; 1927, т. 21, стр. 621—650, 735—756, 1139—1162; сер. 7, 1928, т. 1, стр. 9—30.
- Г ю н т е р Н. М. О нахождении скорости по вихрю в случае жидкости, заключенной в замкнутом сосуде.— Журн. Ленингр. физ.-мат. о-ва, 1926, т. 1, вып. 1, стр. 12—36.
- Г ю н т е р Н. М. О решениях уравнений гидродинамики.— Изв. АН СССР. Сер. 6, 1925, т. 19, стр. 217—232.
- Г ю н т е р Н. М. Об основной задаче гидродинамики.— Изв. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1927, т. 2, стр. 1—168.
- Г ю н т е р Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. ГИТТЛ, М., 1953, 416 с.
- Д и м е н т б е р г Ф. М. Винтовое исчисление и его приложения в механике. «Наука», М., 1965, 199 с.
- Д и м е н т б е р г Ф. М. Определение положений пространственных механизмов. Применение метода «винтов» к исследованию перемещений пространственных механизмов. Изд-во АН СССР, М., 1950, 143 с.
- Д и м е н т б е р г Ф. М., Ш а т а л о в К. Т., Г у с а р о в А. А. Колебания машин. «Машиностроение», М., 1964, 308 с.
- Д и н н и к А. Н. Устойчивость упругих систем. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1950, 132 с.
- Д о б р о в о л ь с к и й В. В. Теория механизмов для образования плоских кривых. Изд-во АН СССР, М., 1953, 147 с.
- Д о б р о н р а в о в В. В. Об уравнениях движения неголономных механических систем с линейными и нелинейными связями.— Труды Моск. гидрометеорол. ин-та, 1939, вып. 1, стр. 273—316.

- Д о л и д з е Д. Е. Некоторые вопросы нестационарного течения вязкой жидкости. Изд-во АН ГрССР, Тбилиси, 1960, 332 с.
- Д о р о д н и ц ы н А. А. Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля. — Прикл. мат. и мех., 1947, т. 11, вып. 3, стр. 313—328.
- Д р у ж и н и н Н. И. Метод электрогидродинамических аналогий и его применение при исследовании фильтрации. Госэнергоиздат, М.— Л., 1956, 346 с.
- Д у б о ш и н Г. Н., О х о ц и м с к и й Д. Е. Некоторые проблемы аэродинамики. — Труды Второго Всесоюзн. съезда по теор. и прикл. мех., 1965, вып. 1, стр. 208—213.
- Е р у г и н Н. П. Методы решения вопросов устойчивости в большом. — Труды Второго Всесоюзн. совещ. по теории автомат. регулирования, 1955, т. 1, стр. 133—141.
- Е р у г и н Н. П. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. — Прикл. мат. и мех., 1952, т. 16, вып. 5, стр. 620—628.
- Е р у г и н Н. П. Теоремы о неустойчивости. — Прикл. мат. и мех., 1952, т. 16, вып. 3, стр. 355—361.
- Ж а у т ы к о в О. А. Некоторые теоремы устойчивости движения. — Изв. АН КазССР. Сер. мат. и мех., 1947, № 42, вып. 1, стр. 88—100.
- З а д и р а к а К. В. Исследование сингулярно возмущенных систем нелинейных дифференциальных уравнений. — Труды Межд. симп. по нелинейн. колебаниям. К., 1963, т. 1, стр. 204—212.
- З а д и р а к а К. В. О периодическом интегральном многообразии нелинейной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. — Укр. мат. журн., 1959, т. 11, № 3, стр. 243—251.
- З е й л и г е р Д. Н. Комплексная линейчатая геометрия. ГТТИ, М.— Л., 1934, 195 с.
- З и н о в ь е в В. А. Аналитические методы расчета плоских механизмов. ГТТИ, М.— Л., 1949, 204 с.
- З и н о в ь е в В. А. Пространственные механизмы с низшими парами. Кинематический анализ и синтез. ГИТТЛ, М.— Л., 1952, 432 с.
- З л о т о п о л ь с к и й М. Д. Основы винтовой теории пространственных зацеплений. — Труды Ленингр. технол. ин-та, 1953, вып. 25, стр. 58—78.
- З у б о в В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Судпромгиз, Л., 1959, 324 с.
- З у б о в В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. Изд-во ЛГУ, Л., 1957, 241 с.
- И в а н и л о в Ю. П., М о и с е е в Н. Н., Т е р - К р и к о р о в А. М. Асимптотические методы в задачах о движении жидкости со свободными границами. — Труды Всесоюзн. съезда по теор. и прикл. мех., 1962, стр. 135—144.
- И ш л и н с к и й А. Ю. Механика гироскопических систем. Изд-во АН СССР, М., 1963, 482 с.
- И ш л и н с к и й А. Ю. С л е п ц о в а Г. П. К вопросу об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду. — Прикл. мех., 1965, т. 1, вып. 2, стр. 1—9.
- К е л д ы ш М. В., С е д о в Л. И. Приложения теории функций комплексного переменного к гидродинамике и аэродинамике. «Наука», М., 1964, 46 с.
- К е л д ы ш М., Ф р а н к л ь Ф. Строгое обоснование теории винта Жуковского. — Мат. сб., 1935, т. 42, вып. 2, стр. 241—273.
- К и л ь ч е в с к и й Н. А. Элементы тензорного исчисления и его приложения к механике. Гостехиздат, М., 1954, 167 с.
- К и с л и ц ы н С. Г. Тензорный метод в теории пространственных механизмов. — Труды Сем. по теории машин и механизмов. М., 1954, т. 14, вып. 54, стр. 51—75.
- К о б р и н с к и й А. Е. Механизмы с упругими связями. Динамика и устойчивость. «Наука», М., 1964, 390 с.
- К о ж е в н и к о в С. Н. Динамика машин с упругими звеньями. Изд-во АН УССР, К., 1961, 160 с.
- К о л м о г о р о в А. Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. — ДАН СССР, 1954, т. 98, № 4, стр. 527—530.
- К о л м о г о р о в А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика. — В кн.: Международный математический конгресс в Амстердаме 1954 (обзорные доклады). Физматгиз, М., 1961, стр. 187—208.

- К о н о н е н к о В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. «Наука», М., 1964, 254 с.
- К о с м о д е м ь я н с к и й А. А. Общие теоремы динамики тела переменной массы.— Уч. зап. Моск. ун-та, 1951, вып. 152, механика, т. 3, стр. 13—42.
- К о т е л ь н и к о в А. П. Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1895.
- К о т е л ь н и к о в А. П. Точки Бурместера, их свойства и построение.— Мат. сб., 1927, т. 34, вып. 3-4, стр. 207—348.
- К о ч и н Н. Е. О неустойчивости вихревых цепочек Кармана.— ДАН СССР, 1939, т. 24, № 1, стр. 18—23.
- К р а с н о с е л ь с к и й М. А., К р е й н С. Г. О принципе усреднения в нелинейной механике.— Усп. мат. наук, 1955, т. 10, вып. 3 (65), стр. 147—153.
- К р а с о в с к и й Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, М., 1959, 211 с.
- К р е й н М. Г., Я к у б о в и ч В. А. Гамильтоновы системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— Труды Межд. симп. по нелинейным колебаниям. К., 1963, т. 1, стр. 277—305.
- К р е й н е с М. А., Р о з о в с к и й М. С. Зубчатые механизмы. Математические основы выбора оптимальных схем. Изд-во Моск. ун-та, М., 1965, 333 с.
- К р ы л о в Н. М., Б о г о л ь б о в Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд-во АН УССР, К., 1937, 365 с.
- К р ы л о в Н. М., Б о г о л ь б о в Н. Н. Основные проблемы нелинейной механики.— Изв. АН СССР. Отд. мат. и естеств. наук, 1933, № 4, стр. 475—498.
- К р ы л о в Н. М., Б о г о л ь б о в Н. Н. Символические методы нелинейной механики в их приложениях к исследованию резонанса в электронном генераторе. Изд-во АН СССР, Л., 1934, 34 с.
- К у ф а р е в П. П. Решение задачи о контуре нефтеносности для полосы с цепочкой скважин.— ДАН СССР, 1950, т. 75, № 3, стр. 353—356.
- К у х т е н к о А. И. О предмете и методах общей динамики машин.— Теория машин и механизмов, 1964, вып. 98-99, стр. 104—118.
- К у х т е н к о А. И. Об одном классе механизмов с неголономными связями.— Труды Ин-та машиновед. АН СССР. Сем. по теории машин и механизмов. М., 1955, т. 15, вып. 58, стр. 46—71.
- К у х т е н к о А. И. Теоретико-вероятностный метод описания процесса работы машины.— Труды Второго Всесоюз. сов. по основн. пробл. теории машин и механизмов, 1960, стр. 128—139.
- Л а в р е н т ь е в М. А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. Изд-во АН СССР, М., 1962, 135 с.
- Л а в р е н т ь е в М. А. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. ГИТТЛ, М.— Л., 1946, 159 с.
- Л а в р е н т ь е в М. А., П о г р е б и с ь к и й И. Б. До питання про рух ґрунтових вод в неоднорідному ґрунті.— ДАН УРСР, 1940, № 1, стор. 23—25.
- Л а в р е н т ь е в М. А., Ш а б а т Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 3-е. «Наука», М., 1965, 713 с.
- Л а д ы ж е н с к а я О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физматгиз, М., 1961, 203 с.
- Л е б е д е в П. А. Кинематика пространственных механизмов. «Машиностроение», М.— Л., 1966, 280 с.
- Л е в и т с к и й Н. И. Проектирование плоских механизмов с низшими парами. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1950, 183 с.
- Л е в и т с к и й Н. И. Синтез механизмов по Чебышеву. Изд-во АН СССР, М., 1946, 168 с.
- Л е й б е н з о н Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Гостехиздат, М.— Л., 1947, 244 с.
- Л е й б е н з о н Л. С. Нефтепромысловая механика. Ч. II. Горгеонефтеиздат, Москва — Грозный — Ленинград — Новосибирск, 1934, 352 с.
- Л е т о в А. М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1962, 477 с.
- Л и т в и н Ф. Л. Применение винтового исчисления и матриц к исследованию

- пространственных зацеплений.— Труды Ленингр. политехн. ин-та, 1955, № 182, стр. 12—27.
- Л и т в и н Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. Физматгиз, М., 1960, 444 с.
- Л у р ь е А. И. Операционное исчисление и его применения к задачам механики. ГИТТЛ, М.— Л., 1951, 432 с.
- Л у р ь е А. И., П о с т н и к о в В. Н. К теории устойчивости регулируемых систем.— Прикл. мат. и мех., 1944, т. 8, вып. 3, стр. 246—248.
- Л ы к о в а О. Б. Исследование решений системы $n + m$ нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности интегрального многообразия.— Укр. мат. журн., 1964, т. 16, № 1, стр. 13—30.
- Л ы к о в а О. Б. О квазипериодических решениях системы, близкой к канонической.— Укр. мат. журн., 1964, т. 16, № 6, стр. 752—768.
- Л ы к о в а О. Б. Об исследовании решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром на двумерном локальном интегральном многообразии в «нерезонансном» случае.— Укр. мат. журн., 1958, т. 10, № 3, стр. 239—250.
- Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГИТТЛ, М.— Л., 1950, 472 с.
- Л я п у н о в А. М. Собр. соч. в пяти томах. Т. 3, 4. Изд-во АН СССР, М., 1959.
- Л я ш к о И. И. Решение фильтрационных задач методом суммарных представлений. Изд-во Киевск. ун-та, К., 1963, 175 с.
- М а й з е л ь В. М. Температурная задача теории упругости. Изд-во АН СССР, К., 1951, 152 с.
- М а л к и н И. Г. Теория устойчивости движения. ГТТИ, М.— Л., 1952, 431 с.
- М а н д е л ь ш т а м Л. И. Полн. собр. трудов. Изд-во АН СССР, М., 1948—1955.
- М а т р о с о в В. М. К теории устойчивости движения.— Прикл. мат. и мех., 1962, т. 26, вып. 6, стр. 992—1002.
- Механика в СССР за 50 лет. Т. 1. Общая и прикладная механика. «Наука», М., 1968, 416 с.
- М е щ е р с к и й И. В. Работы по механике тел переменной массы. ГИТТЛ, М.— Л., 1949, стр. 258—270.
- М и л л и о н щ и к о в М. Д. Движение газированной нефти в пористой среде.— Инж. сб., 1949, т. 5, вып. 2, стр. 190—193.
- М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. Изд-во АН УССР, К., 1955, 283 с.
- М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. О построении общего решения нелинейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего «ускоренную» сходимость.— Укр. мат. журн., 1964, т. 16, № 4, стр. 475—501.
- М и т р о п о л ь с к и й Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. «Наука», М., 1964, 431 с.
- М и т р о п о л ь с к и й Ю. А., Л ы к о в а О. Б. Исследование поведения решений нелинейных уравнений в окрестности положения равновесия. Изд. Ин-та мат. АН УССР, К., 1964, 44 с.
- М и т р о п о л ь с к и й Ю. О., М о с с е н к о в Б. І. Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи). Вид-во Київськ. ун-ту, К., 1961, 122 с.
- М и х а й л о в Г. К. О фильтрации в трапециoidalных плотинах на горизонтальном водоупоре.— Гидротехника и мелиорация, 1952, № 1, стр. 33—42.
- М и щ е н к о Е. Ф. Асимптотическая теория релаксационных колебаний, описываемых системами второго порядка.— Мат. сб., 1958, т. 44 (86), вып. 4, стр. 457—480.
- М о и с е е в Н. Н., Р у м я н ц е в В. В. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. «Наука», М., 1965, 439 с.
- М о н и н А. С., Я г л о м А. М. О законах мелкомасштабных турбулентных движений жидкостей и газов.— Усп. мат. наук, 1963, т. 18, вып. 5 (113), стр. 93—114.
- М о р о ш к и н Ю. Ф. Основы аналитической теории механизмов.— Труды Сем. по теории машин и механизмов. М., 1954, т. 14, вып. 54, стр. 25—50.
- М у с х е л и ш в и л и Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1962, 599 с.

- Н а у м о в И. А. Работы математиков Украины по неголономной дифференциальной геометрии.— В кн.: История и методология естественных наук. Вып. 5. Математика. Изд-во Моск. ун-та, М., 1966, стр. 105—117.
- Н е й м а р к Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.— Изв. вузов. Радиофизика, 1958, т. 1, № 5-6, стр. 146—165.
- Н е к р а с о в А. И. О прерывном течении жидкости в двух измерениях вокруг препятствия в форме дуги круга.— В кн.: Н е к р а с о в А. И. Собр. соч. Т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1961, стр. 52—68.
- Н е л ь с о н - С к о р н я к о в Ф. Б. Фильтрация в однородной среде. Изд. 2-е. «Советская наука», М., 1949, 568 с.
- Н и к о л а и Е. Л. Гироскоп в кардановом подвесе. Изд. 2-е. «Наука», М., 1964, 134 с.
- Н и к о л а и Е. Л. Труды по механике. Гостехиздат, М., 1955, 583 с.
- Н о в о с е л о в В. С. Сведение задачи неголономной механики к условной задаче механики голономных систем.— Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук, вып. 31, механика, № 217, 1957, стр. 28—49.
- О б м о р ш е в А. Н. Колебания и устойчивость неголономных систем.— Сб. ст. МВТУ. Механика, 1956, вып. 50, стр. 75—96.
- О г л о б л и н Н. В. Некоторые применения комплексных переменных в кинематике.— Изв. Крымск. пед. ин-та, 1928, т. 2, стр. 1—12.
- О з о л О. Г. Аналитический метод треугольников в метрическом синтезе плоских шарнирных механизмов.— Труды Латв. СХА, 1968, вып. 21.
- О з о л О. Г. Исследование топологических свойств кинематических цепей.— Труды Латв. СХА, 1965, вып. 17, стр. 3—17.
- О з о л О. Г. Новая структурная формула механизмов и ее теоретическое и практическое значение.— Труды Латв. СХА, 1962, вып. 11, стр. 113—129.
- О л е й н и к О. А. О системе уравнений теории пограничного слоя.— Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, т. 3, № 3, стр. 489—507.
- О х о ц и м с к и й Д. Е. К теории движения ракет.— Прикл. мат. и мех., 1946, т. 10, вып. 2, стр. 251—272.
- П а в л о в с к и й Н. Н. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения.— В кн.: П а в л о в с к и й Н. Н. Собр. соч. Т. 2. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1956, стр. 3—352.
- П а п а л е к с и Н. Д. Собр. трудов. Изд-во АН СССР, М., 1948, 428 с.
- П а х а р е в а Н. А., Л я ш к о И. И. О решении фильтрационных задач методом мажорантных областей.— Укр. мат. журн., 1960, т. 12, № 4, стр. 402—411.
- П е р с и д с к и й К. П. Ко второй методе Ляпунова.— Изв. АН КазССР. Сер. мат. и мех., 1947, № 42, вып. 1, стр. 48—55.
- П и с а р е н к о Г. С. К теории колебаний нелинейных систем гистерезисного типа.— Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1954, т. 15, стр. 112—125.
- П и с а р е н к о Г. С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале. Изд-во АН УССР, К., 1955, 239 с.
- П и с а р е н к о Г. С. Рассеяние энергии при механических колебаниях. Изд-во АН УССР, К., 1962, 436 с.
- П л и с с В. А. Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом. Изд-во ЛГУ, Л., 1958, 183 с.
- П л и с с В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. «Наука», М.— Л., 1964, 368 с.
- П о ж а р и ц к и й Г. К., Р у м я н ц е в В. В. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью.— Прикл. мат. и мех., 1963, т. 27, вып. 1, стр. 16—26.
- П о л а к Л. С. Вариационные принципы механики, их развитие и применения в физике. Физматгиз, М., 1960, 599 с.
- П о л о ж и й Г. Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киевск. ун-та, К., 1962, 161 с.
- П о л у б а р и н о в а - К о ч и н а П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, М., 1952, 676 с.
- П о н т р я г и н Л. С., Б о л т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., М и щ е н к о Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, М., 1961, 392 с.

- Развитие механики в СССР. Под ред. А. Ю. Ишлинского. «Наука», М., 1967, 367 с.
- Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. — Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех., астрон., физ., хим., 1957, № 4, стр. 9—16.
- Румянцев В. В. Устойчивость вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью. — Прикл. мат. и мех., 1957, т. 21, вып. 6, стр. 740—748.
- Савин Г. Н., Георгиевская В. В. Развитие механики на Украине за годы Советской власти. Изд-во АН УССР, К., 1961, 284 с.
- Савин Г. Н., Путята Т. В., Фрадли Б. Н. Очерки развития некоторых фундаментальных проблем механики. «Наукова думка», К., 1964, 376 с.
- Свешников А. А. Применение вероятностных методов к решению некоторых нелинейных задач прикладной теории гироскопов. — Изв. вузов. Приборостроение, 1961, т. 4, № 4, стр. 39—47.
- Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 5-е. «Наука», М., 1965, 386 с.
- Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Изд. 2-е. «Наука», М., 1966, 447 с.
- Седов Л. И. Теория плоских движений идеальной жидкости. Оборонгиз, М. — Л., 1939, 143 с.
- Слезкин Н. А. О дифференциальных уравнениях фильтрации. — ДАН СССР, 1951, т. 79, № 5, стр. 755—758.
- Соболев С. Л. Уравнения математической физики. Изд. 4-е. «Наука», М., 1966, 443 с.
- Сokolov Ю. Д. Метод осреднения функциональных поправок. «Наукова думка», К., 1967, 336 с.
- Сokolov Ю. Д. О расчете фильтрации из канала трапециoidalного сечения. — ДАН СССР, 1951, т. 79, № 5, стр. 759—762.
- Сokolov Ю. Д. Об одной задаче теории неустановившихся движений грунтовых вод. — Укр. мат. журн., 1953, т. 5, № 2, стр. 159—170.
- Сokolov Ю. Д. Особые траектории системы свободных материальных точек. Изд-во АН УССР, К., 1951, 127 с.
- Сokolovский В. В. Теория пластичности. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1946, 306 с.
- Сретенский Л. Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гироската. — ДАН СССР, 1963, т. 149, № 2, стр. 292—294.
- Темченко М. Б. Гальмування в шарі в'язко-пружної рідини. — ДАН УРСР, 1952, № 3, стор. 180—185.
- Фещенко С. Ф. Питання теорії звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з повільно-змінними коефіцієнтами та деякі застосування. — Наук. зап. Київськ. пед. ін-ту. Фіз.-мат. сер., 1948, т. 6, № 3, стор. 74—111.
- Фильчаков П. Ф. Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями. Т. 1, 2. Изд-во АН УССР, К., 1959, 1960.
- Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. — Прикл. мат. и мех., 1940, т. 4, вып. 1, стр. 33—52.
- Христианович С. А., Михлин С. Г., Девисон Б. Б. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Неустановившееся движение в каналах и реках. Математическая теория пластичности. Движение грунтовых вод. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1938, 407 с.
- Чаплыгин С. А. К теории триплана. — В кн.: Чаплыгин С. А. Избр. труды по механике и математике. ГИТТЛ, М., 1954, стр. 274—293.
- Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд-во АН СССР, М., 1962, 535 с.
- Штокало И. З. Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. — Мат. сб., 1946, т. 19 (61), вып. 2, стр. 263—286.
- Штокало И. З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами (асимптотические методы и критерии устойчивости и неустойчивости решений). Изд-во АН УССР, К., 1960, 78 с.

- Шульгин М. Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Изд-во Среднеазиатск. ун-та, Ташкент, 1958, 183 с.
- Юдович В. И. Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область.— Мат. сб., 1964, т. 64 (106), вып. 4, стр. 562—588.

К главе V. Вычислительная математика и кибернетика

- Агеев М. И. Основы алгоритмического языка АЛГОЛ-60. Изд. 2-е. Изд. Вычисл. центра АН СССР, М., 1965, 118 с.
- Айзерман М. А., Гусев Л. А., Розоноэр Л. И., Смирнов И. М., Таль А. А. Логика, автоматы, алгоритмы. Физматгиз, М., 1963, 535 с.
- Альфа — система автоматизации программирования. Сб. Под ред. А. П. Ершова. «Наука», Сиб. отд., Новосибирск, 1967, 308 с.
- Аркин В. И. О бесконечномерном аналоге задач невыпуклого программирования.— Кибернетика, 1967, № 2, стр. 87—93.
- Бабенко Л. П., Довгополая Л. И., Корниенко Г. М., Ющенко Е. Л. Система автоматического программирования для машины М-20. Транслятор с адресного языка. Справочное руководство. «Наукова думка», К., 1965, 154 с.
- Библиотека стандартных программ. Сб. Под общей ред. М. Р. Шура-Буры. Изд. ЦБТИ, М., 1961, 228 с.
- Биркган А. Ю., Воскресенский Г. П. Программирование для цифровой вычислительной машины «Урал-2». «Сов. радио», М., 1962, 207 с.
- Бондаренко В. Н., Плотников И. Т., Полозов П. П. Программирование задач для машины «Урал». Изд. Арт. инж. академии им. Ф. Э. Дзержинского, М., 1957, 417 с.
- Брехов А. М. Сетевое планирование и управление в судостроении (машинная обработка информации). «Судостроение», Л., 1967, 363 с.
- Бруевич Н. Г., Доступов Б. Г. Основы теории счетно-решающих устройств. «Сов. радио», М., 1964, 818 с.
- Брук И. С. Машина для интегрирования дифференциальных уравнений. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1941, 44 с.
- Булавский В. А. Итеративный метод решения задачи линейного программирования.— ДАН СССР, 1961, т. 137, № 2, стр. 258—260.
- Бусленко Н. П. Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах. «Наука», М., 1964, 362 с.
- Бухтияров А. М., Зикевская Л. М., Фролов Г. Д. Сборник задач по программированию с ответами и решениями. «Наука», М., 1965, 410 с.
- Быстродействующая вычислительная машина М-2. Под ред. И. С. Брука. Гостехиздат, М., 1957, 228 с.
- Быховский М. Л. Основы динамической точности электрических и механических цепей. Изд-во АН СССР, М., 1958, 157 с.
- Веников В. А. Применение теории подобия и физического моделирования в электротехнике. Госэнергоиздат, М.— Л., 1949, 168 с.
- Веников В. А. Теория подобия и моделирование применительно к задачам электроэнергетики. «Высшая школа», М., 1966, 487 с.
- Волконский В. А. Схема оптимального перспективного планирования и оценки ресурсов.— В кн.: Применение математики в экономических исследованиях. Т. 3. «Мысль», М., 1965, стр. 88—106.
- Волынский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. Физматгиз, М., 1960, 451 с.
- Гельфанд И. М., Цетлин М. Л. О некоторых способах управления сложными системами.— Усп. мат. наук, 1962, т. 17, вып. 1 (103), стр. 3—25.
- Гершгорин С. А. Об электрических сетях для приближенного решения дифференциального уравнения Лапласа.— Журн. прикл. физ., 1929, т. 6, вып. 3-4, стр. 3—30.
- Глушков В. М. Абстрактная теория автоматов.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 5 (101), стр. 3—62.

- Глушков В. М. Введение в кибернетику. Изд-во АН УССР, К., 1964, 324 с.
- Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, М., 1962, 476 с.
- Глушков В. М. Теория алгоритмов. Изд. КВИРТУ, К., 1961, 167 с.
- Глушков В. М., Ющенко Е. Л. Вычислительная машина «Киев». Математическое описание. Гостехиздат УССР, К., 1962, 182 с.
- Гнеденко Б. В., Королюк В. С., Ющенко Е. Л. Элементы программирования. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1963, 346 с.
- Голенко Д. И. Статистические методы сетевого планирования и управления. «Наука», М., 1968, 400 с.
- Гутенмахер Л. И. Электрические модели. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1949, 404 с.
- Гухман А. А. Введение в теорию подобия. «Высшая школа», М., 1963, 254 с.
- Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. — Журн. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, т. 5, № 3, стр. 395—453.
- Дымарский Я. С., Лозинский Н. Н., Макушкин А. Т., Розенберг В. Я., Эрглис В. Р. Справочник программиста. Т. 1, 2. Судпромгиз, Л., 1963, 1964.
- Ермольев Ю. М., Мельник И. М. Экстремальные задачи на графах. «Наукова думка», К., 1968, 175 с.
- Ермольев Ю. М., Шор Н. З. Метод случайного поиска для двухэтапной задачи стохастического программирования и его обобщение. — Кибернетика, 1968, № 1, стр. 90—92.
- Ершов А. П. Программирующая программа для быстродействующей электронной счетной машины. Изд-во АН СССР, М., 1958, 116 с.
- Ершов А. П., Кожухин Г. И., Волошин Ю. М. Входной язык для систем автоматического программирования. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1964, 176 с.
- Жданов Г. М. Конспект лекций по курсу «Счетно-решающая автоматика». Вып. 4. Изд-во МЭИ, М., 1961, 179 с.
- Жоголев Е. А., Росляков Г. С., Трифонов Н. П., Шура-Бура М. Р. Система стандартных подпрограмм. Физматгиз, М., 1958, 230 с.
- Жоголев Е. А., Трифонов Н. П. Курс программирования. «Наука», М., 1964, 388 с.
- Жуковский Н. Е. Гидродинамика. — В кн.: Жуковский Н. Е. Собр. соч. Т. 2. ГИТТЛ, М.—Л., 1948, 763 с.
- Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. Изд. 2-е. «Наука», М., 1967, 460 с.
- Илзinja И. Г. Программирование для двухадресных цифровых вычислительных машин. Изд-во АН ЛатвССР, Рига, 1962, 168 с.
- Калиниченко Л. А. СЛЕНГ — экспериментальный язык программирования, ориентированный на описание и моделирование вычислительных машин и систем. — В кн.: Теория автоматов. Семинар. Вып. 1. Изд. Ин-та кибернетики АН УССР, К., 1967, стр. 33—56.
- Камынин С. С., Любимский Э. З. Алгоритмический машинно-ориентированный язык — АЛМО. — В кн.: Алгоритмы и алгоритмические языки. Вып. 1. Изд. Вычисл. центра АН СССР, М., 1967, стр. 5—58.
- Камынин С. С., Любимский Э. З., Шура-Бура М. Р. Об автоматизации программирования при помощи программирующей программы. — В кн.: Проблемы кибернетики. Вып. 1. Физматгиз, М., 1958, стр. 135—171.
- Канторович Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд-во АН СССР, М., 1959, 344 с.
- Канторович Л. В., Макаров В. Л. Оптимальные модели перспективного планирования. — В кн.: Применение математики в экономических исследованиях. Т. 3. «Мысль», М., 1965, стр. 7—87.
- Керопян К. К., Чеголин П. М. Электрическое моделирование в строительной механике. Госстройиздат, М., 1963, 390 с.
- Кирпичев М. В., Михеев М. А. Моделирование тепловых устройств. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1936, 320 с.
- Китов А. И. Программирование информационно-логических задач. «Сов. радио», М., 1967, 326 с.

- К и т о в А. И. Электронные цифровые машины. «Сов. радио», М., 1956, 276 с.
- К и т о в А. И., К р и н и ц к и й Н. А. Электронные вычислительные машины. Изд. 2-е. «Наука», М., 1965, 174 с.
- К и т о в А. И., К р и н и ц к и й Н. А. Электронные цифровые машины и программирование. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1961, 572 с.
- К и т о в А. И., К р и н и ц к и й Н. А., К о м о л о в П. Н. Элементы программирования. Изд. Арт. инж. академии им. Ф. Э. Дзержинского, М., 1956, 288 с.
- К о б р и н с к и й Н. Е. Математические машины непрерывного действия. Основы их устройств. Гостехиздат, М., 1954, 447 с.
- К о б р и н с к и й Н. Е., Т р а х т е н б р о т Б. А. Введение в теорию конечных автоматов. Физматгиз, М., 1962, 404 с.
- К о г а н Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1963, 510 с.
- К о р о л е в М. А. Обработка экономической информации на электронных машинах (теоретические вопросы). Изд. 2-е. «Экономика», М., 1965, 286 с.
- К о р о л е в М. А., К у з ь м и н К. С., Л а в р о в С. С., Л е т и ч е в с к и й А. А., С т о л я р о в Г. К., Ш у р а - Б у р а М. Р. Сообщение об алгоритмическом языке АЛГЭК.— Кибернетика, 1966, № 2, стр. 57—102.
- К р е й н М. Г., Р у т м а н М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха.— Усп. мат. наук, 1948, т. 3, вып. 1 (23), стр. 3—95.
- К р и н и ц к и й Н. А., М и р о н о в Г. А., Ф р о л о в Г. Д. Программирование. Изд. 2-е. «Наука», М., 1966, 599 с.
- К у х т е н к о А. И. О теории сложных систем с иерархической структурой управления.— В кн.: Сложные системы управления. «Наукова думка», К., 1966, стр. 6—20.
- Л а в р о в С. С. Универсальный язык программирования (АЛГОЛ-60). «Наука», М., 1964, 169 с.
- Л а т ы ш е в а Т. С. Программирование и решение задач на двухадресных машинах. Изд-во АН СССР, М., 1963, 134 с.
- Л е б е д е в А. Н. Счетно-решающие устройства. Изд. 2-е. «Машиностроение», М., 1966, 424 с.
- Л е б е д е в С. А., М е л ь н и к о в В. А. Общее описание БЭСМ и методика выполнения операций. Физматгиз, М., 1959, 208 с.
- Л е н о в Н. Н. Об устойчивости электронных моделирующих схем с усилителями постоянного тока.— В кн.: Цифровая техника и вычислительные устройства. Изд-во АН СССР, М., 1959, стр. 94—115.
- Логический язык для представления алгоритмов синтеза релейных устройств. Сб. ст. Под ред. М. А. Гаврилова. «Наука», М., 1966, 341 с.
- Л у к ь я н о в В. С. Технические расчеты на гидравлических приборах Лукьянова. Трансжелдориздат, М., 1937, 28 с.
- Л ю с т е р н и к Л. А., А б р а м о в А. А., Ш е с т а к о в В. И., Ш у р а - Б у р а М. Р. Решение математических задач на автоматических цифровых машинах. Программирование для быстродействующих электронных счетных машин. Изд-во АН СССР, М., 1952, 327 с.
- Л я п у н о в А. А. Математические исследования, связанные с эксплуатацией электронных вычислительных машин.— В кн.: Математика в СССР за сорок лет. 1917—1957. Т. 1. Физматгиз, М., 1959, стр. 857—877.
- Л я п у н о в А. А. О логических схемах программ.— В кн.: Проблемы кибернетики. Вып. 1. Физматгиз, М., 1958, стр. 46—74.
- Л я ш е н к о В. Ф. Программирование для цифровых вычислительных машин М-20, БЭСМ-3М, БЭСМ-4, М-220. «Сов. радио», М., 1967, 432 с.
- М а й о р о в Ф. В. Электронные цифровые интегрирующие машины. Цифровые дифференциальные анализаторы. Машгиз, М., 1962, 408 с.
- М а л ь ц е в А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. «Наука», М., 1965, 391 с.
- М а р к о в А. А. Теория алгорифмов.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1954, т. 42, 374 с.
- М и р о н о в Г. А. Испытательные программы для контроля электронных цифровых машин. «Наука», М., 1964, 268 с.

- Михалевич В. С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение.— Кибернетика, 1965, № 1, стр. 45—56; № 2, стр. 85—89.
- Михалевич В. С., Ермольев Ю. М., Шкурба В. В., Шор Н. З. Сложные системы и решение экстремальных задач.— Кибернетика, 1967, № 5, стр. 29—39.
- Моисеев Н. Н. Численные методы теории оптимальных управлений, использующие вариации в пространстве состояний. — Кибернетика, 1966, № 3, стр. 1—29.
- Моцкус И. Б. Многоэкстремальные задачи в проектировании. «Наука», М., 1967, 215 с.
- Павловский Н. Н. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения.— В кн.: Павловский Н. Н. Собр. соч. Т. 2. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1956, стр. 3—352.
- Первая Всесоюзная конференция по программированию (Киев, ноябрь 1968 г.). Пленарные доклады; А — К. Изд. Ин-та кибернетики АН УССР, К., 1968.
- Петров Б. Н., Поспелов Г. С. О путях развития больших систем управления.— Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1966, № 2, стр. 3—10.
- Полонников Д. Е. Электронные усилители автоматических компенсаторов. Физматгиз, М., 1960, 334 с.
- Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, М., 1961, 391 с.
- Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. Изд-во АН УССР, К., 1964, 264 с.
- Пчельников Н. И. Приборы управления артиллерийским зенитным огнем (ПУАЗО). Кн. 1, 2. Воениздат, М., 1940.
- Пшеничный Б. Н. Выпуклое программирование в нормированном пространстве.— Кибернетика, 1965, № 5, стр. 46—54.
- Растрингин Л. А. Случайный поиск в задачах оптимизации многопараметрических систем. «Зинатне», Рига, 1965, 211 с.
- Ремез Е. Я. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Изд-во АН УССР, К., 1957, 454 с.
- Система автоматизации программирования. Сб. Под ред. Н. П. Трифонова, М. Р. Шура-Буры. Физматгиз, М., 1961, 188 с.
- Смольников Н. Я. Основы программирования для цифровой машины «Урал». «Сов. радио», М., 1961, 326 с.
- Соосис П. М. Алгоритмический язык АЛГОЛ-60 и применение его в строительной механике. «Будівельник», К., 1965, 170 с.
- Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. Физматгиз, М., 1959, 317 с.
- Тозони О. В. Математические модели для расчета электрических и магнитных полей. «Наукова думка», К., 1964, 304 с.
- Трапезников В. А., Коган Б. Я. Состояние и основные направления развития электронного моделирования в автоматике.— В кн.: Сессия Академии наук СССР по научным проблемам автоматизации производства (15—20 октября 1956 г.). Основные проблемы автоматического регулирования и управления. Изд-во АН СССР, М., 1957, стр. 285—318.
- Трахтенброт Б. А. Алгоритмы и машинное решение задач. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1960, 119 с.
- Угодчиков А. Г. Построение конформно отображающих функций при помощи электромоделирования и интерполяционных полиномов Лагранжа. «Наукова думка», К., 1966, 77 с.
- Успенский В. А. Лекции о вычислимых функциях. Физматгиз, М., 1960, 492 с.
- Ушаков В. Б. Направления развития аналоговой вычислительной техники.— В кн.: Аналоговая и аналого-цифровая вычислительная техника. «Машиностроение», М., 1965, стр. 7—35.
- Фельдбаум А. А. Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, М., 1959, 800 с.
- Фильчаков П. Ф., Панчишин В. И. Интеграторы ЭГДА. Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге. Изд-во АН УССР, К., 1961, 171 с.

- Черников С. Н. Линейные неравенства. «Наука», М., 1968, 488 с.
- Ширяев А. Н. Последовательный анализ и управляемые случайные процессы (дискретное время).— Кибернетика, 1965, № 3, стр. 1—24.
- Шкурба В. В., Подчасова Т. П., Пшичук А. Н., Тур Л. П. Задачи календарного планирования и методы их решения. «Наукова думка», К., 1966, 155 с.
- Шор Н. З. Применение обобщенного градиентного спуска в блочном программировании.— Кибернетика, 1967, № 3, стр. 53—55.
- Шура-Бура М. Р. Программирование.— В кн.: Математика в СССР за сорок лет. 1917—1957. Т. 1. Физматгиз, М., 1959, стр. 879—886.
- Шура-Бура М. Р., Ершов А. П. Машинные языки и автоматическое программирование.— Труды Четвертого Всесоюз. мат. съезда (Ленинград, 3—12 июля 1961 г.). Т. 1. Изд-во АН СССР, Л., 1963, стр. 243—250.
- Этерман И. И. Математические машины непрерывного действия. Машгиз, М., 1957, 235 с.
- Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. «Сов. радио», М., 1961, 491 с.
- Ющенко Е. Л. Адресное программирование. Гостехиздат УССР, К., 1963, 284 с.
- Ющенко Е. Л. Адресное программирование и особенности решения задач на машине «Урал». Изд. КВИРТУ, К., 1960, 230 с.
- Ющенко Е. Л., Гринченко Т. А. Программирующая программа с входным адресным языком для машины «Урал-1». Справочник программиста. «Наукова думка», К., 1964, 108 с.
- Ющенко Е. Л., Малиновский Б. Н., Полищук Г. А., Ядренко Э. К., Никитин А. И. Управляющая машина широкого назначения «Дніпро» и программирующая программа к ней. Справочник программиста. «Наукова думка», К., 1964, 280 с.
- Яровицкий Н. В. Вероятностно-автоматное моделирование дискретных систем.— Кибернетика, 1966, № 5, стр. 35—43.
- Krilloff A. Sur un intégrateur des équations différentielles ordinaires.— Изв. Имп. Акад. наук. Сер. 5, 1904, т. 20, № 1, стр. 17—37.

К главе VI. Основания математики и математическая логика

- Адян С. И. Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1966, т. 85, 123 с.
- Айзенберг Н. Н., Юрчук А. П. О некоторых задачах исчисления высказываний.— Докл. и сообщ. Ужгородск. ун-та. Сер. физ.-мат. наук, 1960, № 3, стр. 66—67.
- Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций. Гостехиздат, М.—Л., 1948, 411 с.
- Алмагамбетов Ж. А. О классах аксиом, замкнутых относительно заданных приведенных произведений и степеней.— Алгебра и логика. Семинар, 1965, т. 4, вып. 3, стр. 71—77.
- Амстиславский В. О рекурсивных решетках.— Сиб. мат. журн., 1966, т. 7, № 2, стр. 233—241.
- Амстиславский В. И. Расширение рекурсивных иерархий и R-операции.— ДАН СССР, 1968, т. 180, № 5, стр. 1023—1026.
- Арсенин В. Я., Ляпунов А. А. Теория A-множеств.— Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 5 (39), стр. 45—108.
- Барздин Я. М. Об одном классе машин Тьюринга (машины Минского).— Алгебра и логика. Семинар, 1962, т. 1, вып. 6, стр. 42—51.
- Белякин Н. В. Машины Тьюринга, работающие на плоскости.— ДАН СССР, 1966, т. 168, № 3, стр. 502—503.
- Белякин Н. В. Об одной полной системе классической арифметики.— Алгебра и логика. Семинар, 1967, т. 6, вып. 2, стр. 5—11.

- Бочвар Д. А. К вопросу о парадоксах и к проблеме расширенного исчисления предикатов.— Мат. сб., 1957, т. 42 (84), вып. 1, стр. 3—10.
- Бочвар Д. А. Некоторые логические теоремы о нормальных множествах и предикатах.— Мат. сб., 1945, т. 16 (58), вып. 3, стр. 345—352.
- Бочвар Д. А. Об антиномиях, основанных на группах определений предикатов, каждое из которых непротиворечиво в отдельности.— Мат. сб., 1960, т. 52 (94), вып. 1, стр. 641—646.
- Бочвар Д. А. Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления.— Мат. сб., 1938, т. 4 (46), вып. 2, стр. 287—308.
- Варпачовский Ф. Л. О нереализуемости дизъюнкции нереализуемых формул логики высказываний.— ДАН СССР, 1965, т. 161, № 6, стр. 1257—1258.
- Воробьев Н. Н. Конструктивное исчисление высказываний с сильным отрицанием.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 72, стр. 195—227.
- Воробьев Н. Н. Новый алгоритм выводимости в конструктивном исчислении высказываний.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1958, т. 52, стр. 193—225.
- Гастев Ю. А. О построении анализа на основе аксиоматизированной геометрии прямой. I, II.— Уч. зап. Моск. гор. заочн. пед. ин-та. Сер. физ.-мат., 1959, вып. 3, стр. 46—57; в кн.: Проблемы логики. Изд-во АН СССР, М., 1963, стр. 137—143.
- Гастев Ю. А. Содержательная и формальная математика.— В кн.: О некоторых вопросах современной математики и кибернетики. «Просвещение», М., 1965, стр. 198—229.
- Гладкий А. В. Некоторые алгоритмические проблемы для контекстно-свободных грамматик.— Алгебра и логика. Семинар, 1965, т. 4, вып. 1, стр. 3—13.
- Гладкий А. В. О взаимоотношении между дескриптивной измеримостью, абсолютной измеримостью и свойством Бэра.— Мат. сб., 1957, т. 41 (83), вып. 1, стр. 3—6.
- Глушков В. М. Теория алгоритмов. Изд. КВИРТУ, К., 1961, 167 с.
- Гриндлингер М. К магнусовой обобщенной проблеме тождества слов.— Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 4, стр. 955—957.
- Гуревич Ю. Ш. Наследственная неразрешимость одного класса структурно упорядоченных абелевых групп.— Алгебра и логика. Семинар, 1967, т. 6, вып. 1, стр. 45—62.
- Гуревич Ю. Ш. Об эффективном распознавании выполнимости формул УИП.— Алгебра и логика. Семинар, 1966, т. 5, вып. 2, стр. 25—55.
- Гуревич Ю. Ш. Экзистенциальная интерпретация.— Алгебра и логика. Семинар, 1965, т. 4, вып. 4, стр. 71—85.
- Гуревич Ю. Ш. Элементарные свойства упорядоченных абелевых групп.— Алгебра и логика. Семинар, 1964, т. 3, вып. 1, стр. 5—39.
- Детловс В. К. Эквивалентность нормальных алгоритмов и рекурсивных функций.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1958, т. 52, стр. 75—139.
- Донченко В. В. Некоторые вопросы, связанные с проблемой разрешения для исчисления строгой импликации Аккермана.— В кн.: Проблемы логики. Изд-во АН СССР, М., 1963, стр. 18—24.
- Драгалин А. Г. К обоснованию принципа конструктивного подбора А. А. Маркова.— ДАН СССР, 1967, т. 177, № 5, стр. 997—1000.
- Ермолаева Н. М. Об арифметических суммах рекурсивно-проективных множеств.— ДАН СССР, 1967, т. 172, № 5, стр. 1011—1013.
- Ермолаева Н. М., Шиханович Ю. А. Проблематика создания машинного языка для геометрии.— Сообщ. лабор. электро моделирования. Ин-т научн. информ. АН СССР, 1960, вып. 1, стр. 211—215.
- Ершов А. П. Об операторных алгоритмах.— ДАН СССР, 1958, т. 122, № 6, стр. 967—970.
- Ершов Ю. Л. Новые примеры неразрешимых теорий.— Алгебра и логика. Семинар, 1966, т. 5, вып. 5, стр. 37—47.
- Ершов Ю. Л. Нумерации семейств общерекурсивных функций.— Сиб. мат. журн., 1967, т. 8, № 5, стр. 1015—1025.

- Ершов Ю. Л. Об аксиоматизируемых классах моделей с бесконечной сигнатурой. — Алгебра и логика. Семинар, 1962, т. 1, вып. 4, стр. 32—44.
- Ершов Ю. Л. Об одной иерархии множеств. I, II. — Алгебра и логика. Семинар, 1968, т. 7, вып. 1, стр. 47—74; вып. 4, стр. 15—47.
- Ершов Ю. Л. Об элементарных теориях многообразий Поста. — Алгебра и логика. Семинар, 1967, т. 6, вып. 5, стр. 7—15.
- Ершов Ю. Л. Разрешимость некоторых неэлементарных теорий. — Алгебра и логика. Семинар, 1964, т. 3, вып. 2, стр. 45—47.
- Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А. Элементарные теории. — Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 4 (124), стр. 37—108.
- Есенин-Вольпин А. С. Анализ потенциальной осуществимости. — В кн.: Логические исследования. Изд-во АН СССР, М., 1959, стр. 218—262.
- Есенин-Вольпин А. С. К обоснованию теории множеств. — В кн.: Применение логики в науке и технике. Изд-во АН СССР, М., 1960, стр. 22—118.
- Есенин-Вольпин А. С. Недоказуемость гипотезы Суслина без помощи аксиомы выбора в системе аксиом Бернайса-Мостовского. — ДАН СССР, 1954, т. 96, № 1, стр. 9—12.
- Есенин-Вольпин А. С. О теории модальностей. — В кн.: Логика и методология науки. «Наука», М., 1967, стр. 56—67.
- Журавлев Ю. И. О различных понятиях минимальности дизъюнктивных нормальных форм. — Сиб. мат. журн., 1960, т. 1, № 4, стр. 609—610.
- Журавлев Ю. И. Об оптимальных алгоритмах выбора. — ДАН СССР, 1958, т. 121, № 3, стр. 411—414.
- Заславский И. Д. Граф-схемы с памятью. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 72, стр. 99—192.
- Заславский И. Д. Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1962, т. 67, стр. 385—457.
- Заславский И. Д. Опровержение некоторых теорем классического анализа в конструктивном анализе. — Усп. мат. наук, 1955, т. 10, вып. 4 (66), стр. 209—210.
- Заславский И. Д., Цейтин Г. С. К вопросу об обобщениях принципа конструктивного подбора. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 72, стр. 344—347.
- Захаров Д. А. О конвексных классах моделей. — Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1963, т. 31, стр. 54—55.
- Зыков А. А. Проблема спектра в расширенном исчислении предикатов. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1953, т. 17, № 1, стр. 63—76.
- Идельсон А. В. Исчисления конструктивной логики с подчиненными переменными. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 72, стр. 228—343.
- Исследования по конструктивной математике и математической логике. I, II. — Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1967, т. 4, 218 с.; 1968, т. 8, 280 с.
- Кабачков Ф. А. Выводимость некоторых реализуемых формул исчисления высказываний. — Z. math. Logik und Grundlagen Math., 1963, Bd 9, N 2, S. 97—107.
- Калужнин Л. А. Об алгоритмизации математических задач. — Проблемы кибернетики, 1959, вып. 2, стр. 51—67.
- Калужнин Л. А. Что такое математическая логика? «Наука», М., 1964, 151 с.
- Келдыш Л. В. Об открытых отображениях A -множеств. — ДАН СССР, 1945, т. 49, № 9, стр. 646—648.
- Келдыш Л. В. Структура B -множеств. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1945, т. 17, 76 с.
- Кипнис М. М. Об одном свойстве пропозициональных формул. — ДАН СССР, 1967, т. 174, № 2, стр. 277—278.
- Когаловский С. Р. К семантике теории типов. — Изв. вузов. Математика, 1965, № 5, стр. 85.

- К о г а л о в с к и й С. Р. О логике высших ступеней.— ДАН СССР, 1966, т. 171, № 6, стр. 1272—1274.
- К о г а л о в с к и й С. Р. О финитно редукционных классах моделей.— Сиб. мат. журн., 1965, т. 6, № 5, стр. 1021—1025.
- К о з л о в а З. И. Аксиома конструктивности и кратная отделимость и неотделимость в классах аналитической иерархии.— Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 6, стр. 1239—1258.
- К о з л о в а З. И. О проективных операциях и отделимости проективных множеств.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1962, т. 26, № 2, стр. 223—260.
- К о л м о г о р о в А. Н. О принципе *tertium non datur*.— Мат. сб., 1925, т. 32, вып. 4, стр. 646—667.
- К о л м о г о р о в А. Н. Об операциях над множествами.— Мат. сб., 1928, т. 35, вып. 3-4, стр. 414—422.
- К о л м о г о р о в А. Н. Три подхода к определению понятия «количество информации».— Проблемы передачи информации, 1965, т. 1, вып. 1, стр. 3—11.
- К о л м о г о р о в А. Н., У с п е н с к и й В. А. К определению алгоритма.— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 4 (82), стр. 3—28.
- К о с т ы р к о В. Ф. К проблеме разрешимости для случая Аккермана.— Сиб. мат. журн., 1965, т. 6, № 2, стр. 342—353.
- К о с т ы р к о В. Ф. О классе сведения $\forall \exists \mid \forall$.— Кибернетика, 1966, № 1, стр. 17—22.
- К р а т к о М. И. О существовании неперекрывающихся базисов конечных автоматов.— Алгебра и логика. Семинар, 1964, т. 3, № 2, стр. 33—44.
- К р е й н и н Я. Л. О множествах, эффективно отличных от всех Ф-множеств.— Мат. сб., 1956, т. 38 (80), вып. 2, стр. 129—148.
- К у з н е ц о в А. В. Алгоритмы как операции в алгебраических системах.— Усп. мат. наук, 1958, т. 13, вып. 3 (81), стр. 240—241.
- К у з н е ц о в А. В. Аналоги «штриха Шеффера» в конструктивной логике.— ДАН СССР, 1965, т. 160, № 2, стр. 274—277.
- К у з н е ц о в А. В. Некоторые вопросы классификации предикатов и функций.— Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1959, т. 4, стр. 86—87.
- К у з н е ц о в А. В. О неразрешимости общих проблем полноты, разрешения и эквивалентности для исчислений высказываний.— Алгебра и логика. Семинар, 1963, т. 2, вып. 4, стр. 47—66.
- К у з н е ц о в А. В. О примитивно рекурсивных функциях большого размаха.— ДАН СССР, 1950, т. 71, № 2, стр. 233—236.
- К у з н е ц о в А. В. Полнота системы аксиом арифметики с правилом конструктивно-бесконечной индукции.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 4 (76), стр. 218—219.
- К у з н е ц о в А. В., Т р а х т е н б р о т Б. А. Исследование частично-рекурсивных операторов средствами теории бэровского пространства.— ДАН СССР, 1955, т. 105, № 5, стр. 897—900.
- К у з н е ц о в Б. Г. Об основах квантово-релятивистской логики.— В кн.: Логические исследования. Изд-во АН СССР, М., 1959, стр. 99—112.
- К у з ь м и н В. А. Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгоритмами и машинами Тьюринга.— Проблемы кибернетики, 1965, вып. 13, стр. 75—96.
- К у ш н е р Б. А. К конструктивной теории интеграла Римана.— ДАН СССР, 1965, т. 165, № 6, стр. 1238—1240.
- К у ш н е р Б. А. Некоторые свойства квазичисел и операторов из квазичисел в квазичисла.— ДАН СССР, 1966, т. 171, № 2, стр. 275—277.
- Л а в р о в И. А. Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно опровержимых формул некоторых элементарных теорий.— Алгебра и логика. Семинар, 1963, т. 2, вып. 1, стр. 5—18.
- Л а в р о в И. А., П о л я к о в Е. А. О базисах алгебр рекурсивных функций.— Сиб. мат. журн., 1966, т. 7, № 5, стр. 1059—1067.
- Л и ф ш и ц В. А. Специализация формы вывода в исчислении предикатов с равенством и функциональными символами. I.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968, т. 98, стр. 5—25.

- Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. Гостехиздат, М.—Л., 1951, 550 с.
- Лузин Н. Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. Гостехиздат, М., 1953, 360 с.
- Лузин Н. Н. О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1935, 86 с.
- Лузин Н. Н. Собрание сочинений. Т. 1—3. Изд-во АН СССР, М., 1953—1959.
- Лупанов О. Б. О вентильных и контактно-вентильных схемах.— ДАН СССР, 1956, т. 111, № 6, стр. 1171—1174.
- Лупанов О. Б. О возможностях синтеза схем из разнообразных элементов.— ДАН СССР, 1955, т. 103, № 4, стр. 561—563.
- Ляпунов А. А. В-функции.— Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 5 (39), стр. 109—119.
- Ляпунов А. А. Об операциях над множествами.— Алгебра и логика. Семинар, 1963, т. 2, вып. 2, стр. 47—56.
- Ляпунов А. А. R-множества.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1953, т. 40, 68 с.
- Маканин Г. С. К проблеме тождества в конечно-определенных полугруппах.— ДАН СССР, 1966, т. 171, № 2, стр. 285—287.
- Маканин Г. С. Новый разрешимый случай проблемы разрешения исчисления предикатов первой ступени.— В кн.: Формальная логика и методология науки. «Наука», М., 1964, стр. 125—153.
- Максимова Л. Л. Топологические пространства и квазиупорядоченные множества.— Алгебра и логика. Семинар, 1967, т. 6, вып. 4, стр. 51—59.
- Максимова Л. Л. Формальные выводы в исчислении строгой импликации.— Алгебра и логика. Семинар, 1966, т. 5, вып. 6, стр. 33—39.
- Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. «Наука», М., 1965, 391 с.
- Мальцев А. И. К теории вычислимых семейств объектов.— Алгебра и логика. Семинар, 1964, т. 3, вып. 4, стр. 5—31.
- Мальцев А. И. Конструктивные алгебры. I.— Усп. мат. наук, 1961, т. 16, вып. 3 (99), стр. 3—60.
- Мальцев А. И. О включении ассоциативных систем в группы.— Мат. сб., 1939, т. 6 (48), вып. 2, стр. 331—336.
- Мальцев А. И. О неразрешимости элементарных теорий некоторых полей.— Сиб. мат. журн., 1960, т. 1, № 1, стр. 71—77.
- Мальцев А. И. О представлениях моделей.— ДАН СССР, 1956, т. 108, № 1, стр. 27—29.
- Мальцев А. И. О производных операциях и предикатах.— ДАН СССР, 1957, т. 116, № 1, стр. 24—27.
- Мальцев А. И. Позитивные и негативные нумерации.— ДАН СССР, 1965, т. 160, № 2, стр. 278—280.
- Мальцев А. И. Полнонумерованные множества.— Алгебра и логика. Семинар, 1963, т. 2, № 2, стр. 4—29.
- Марков А. А. К проблеме представимости матриц.— Z. math. Logik und Grundlagen Math., 1958, Bd 4, N 2, S. 157—168.
- Марков А. А. Невозможность алгоритмов распознавания некоторых свойств ассоциативных систем.— ДАН СССР, 1951, т. 77, № 6, стр. 953—956.
- Марков А. А. Неразрешимость проблемы гомеоморфии.— ДАН СССР, 1958, т. 121, № 2, стр. 218—220.
- Марков А. А. О конструктивной математике.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1962, т. 67, стр. 8—14.
- Марков А. А. О конструктивных функциях.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1958, т. 52, стр. 315—348.
- Марков А. А. О некоторых алгоритмах, связанных с системами слов.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, т. 27, № 1, стр. 101—160.
- Марков А. А. О некоторых неразрешимых проблемах, касающихся матриц.— ДАН СССР, 1947, т. 57, № 3, стр. 539—542.
- Марков А. А. О неотличимости по инвариантам в теории ассоциативных исчислений.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, т. 27, № 4, стр. 907—936.

- Марков А. А. О неразрешимости некоторых проблем топологии. — ДАН СССР, 1958, т. 123, № 6, стр. 978—980.
- Марков А. А. О нормальных алгорифмах, вычисляющих булевы функции. — ДАН СССР, 1964, т. 157, № 2, стр. 262—264.
- Марков А. А. О представлении рекурсивных функций. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, т. 13, № 5, стр. 417—424.
- Марков А. А. Об инверсионной сложности системы булевых функций. — ДАН СССР, 1963, т. 150, № 3, стр. 477—479.
- Марков А. А. Об одном принципе конструктивной математической логики. — Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1956, т. 2, стр. 146—147.
- Марков А. А. Теория алгорифмов. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1954, т. 42, 376 с.
- Маслов С. Ю. Некоторые свойства аппарата канонических исчислений Э. Л. Поста. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 72, стр. 5—56.
- Маслов С. Ю. О некоторых способах задания множеств в базисах порождения. — ДАН СССР, 1963, т. 153, № 2, стр. 266—269.
- Маслов С. Ю. О строгой представимости множеств исчислениями. — ДАН СССР, 1963, т. 152, № 2, стр. 272—274.
- Маслов С. Ю. О «Tag»-проблеме Э. Л. Поста. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 72, стр. 57—68.
- Маслов С. Ю. Обратный метод установления выводимости для логических исчислений. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968, т. 98, стр. 26—87.
- Маслов С. Ю., Минц Г. Е., Орехов В. П. Неразрешимость в конструктивном исчислении предикатов некоторых классов формул, содержащих только одноместные предикатные переменные. — ДАН СССР, 1965, т. 163, № 2, стр. 295—297.
- Матиясевич Ю. В. Простые примеры неразрешимых ассоциативных исчислений. — ДАН СССР, 1967, т. 173, № 6, стр. 1264—1266.
- Матулис В. А. Два варианта классического исчисления предикатов без структурных правил вывода. — ДАН СССР, 1962, т. 147, № 5, стр. 1029—1031.
- Матулис В. А. О вариантах классического исчисления предикатов с единственным деревом вывода. — ДАН СССР, 1963, т. 148, № 4, стр. 768—770.
- Машурян А. С. Об аксиомах дистрибутивности в исчислении строгой импликации Аккермана. — Изв. АН АрмССР. Математика, 1966, т. 1, № 4, стр. 226—230.
- Медведев Ю. Т. Интерпретация логических формул посредством финитных задач и связь ее с теорией реализуемости. — ДАН СССР, 1963, т. 148, № 4, стр. 771—774.
- Медведев Ю. Т. О классе событий, допускающих представление в конечном автомате. — В кн.: Автоматы. ИЛ, М., 1956, стр. 385—401.
- Медведев Ю. Т. О неизоморфных рекурсивно-перечислимых множествах. — ДАН СССР, 1955, т. 102, № 2, стр. 211—214.
- Медведев Ю. Т. Об интерпретации логических формул посредством финитных задач. — ДАН СССР, 1966, т. 169, № 1, стр. 20—23.
- Медведев Ю. Т. Степени трудности массовых проблем. — ДАН СССР, 1955, т. 104, № 4, стр. 501—504.
- Медведев Ю. Т. Финитные задачи. — ДАН СССР, 1962, т. 142, № 5, стр. 1015—1018.
- Минц Г. Е. О некоторых исчислениях модальной логики. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968, т. 98, стр. 88—111.
- Минц Г. Е. О построении консервативных логических выводов. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968, т. 98, стр. 112—120.
- Минц Г. Е. О предикате дифференцируемости и операторе дифференцирования в конструктивном математическом анализе. — ДАН СССР, 1962, т. 147, № 5, стр. 1032—1034.
- Минц Г. Е. О предикатных и операторных вариантах построения теорий конструктивной математики. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 72, стр. 383—436.

- М и н ц Г. Е. Разрешимость проблемы выводимости в LJ для класса формул, не содержащих отрицательных вхождений кванторов.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968, т. 98, стр. 121—130.
- М и н ц Г. Е. Сколемовский метод элиминации положительных кванторов в секвенциальных исчислениях.— ДАН СССР, 1966, т. 169, № 1, стр. 24—27.
- М и н ц Г. Е. Теорема Эрбрана.— В кн.: Математическая теория логического вывода. «Наука», М., 1967, стр. 311—350.
- М и н ц Г. Е., О р е в к о в В. П. Обобщение теорем В. И. Гливенко и Г. Крейсела на один класс формул исчисления предикатов.— ДАН СССР, 1963, т. 152, № 3, стр. 553—554.
- М и х а й л о в а К. А. Проблема вхождения для прямых произведений групп.— ДАН СССР, 1958, т. 119, № 6, стр. 1103—1105.
- М и х а й л о в а К. А. Проблема вхождения для свободных произведений групп.— ДАН СССР, 1959, т. 127, № 4, стр. 746—748.
- М о л о д ш и й В. Н. Гипотеза континуума и арифметика алефов.— Уч. зап. МГУ, 1939, т. 15, стр. 170—178.
- М у р с к и й В. Л. Существование в трехзначной логике замкнутого класса с конечным базисом, не имеющего конечной полной системы тождеств.— ДАН СССР, 1965, т. 163, № 4, стр. 815—818.
- М у ч н и к А. А. Изоморфизм систем рекурсивно-перечислимых множеств с аффективными свойствами.— Труды Моск. мат. о-ва, 1958, т. 7, стр. 407—412.
- М у ч н и к А. А. Неразрешимость проблемы сводимости теории алгоритмов.— ДАН СССР, 1956, т. 108, № 2, стр. 194—197.
- М у ч н и к А. А. О сводимости проблем разрешения перечислимых множеств к проблемам делимости.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, т. 29, № 3, стр. 717—724.
- М у ч н и к А. А. Решение проблемы сводимости Поста и некоторых других проблем теории алгоритмов. I.— Труды Моск. мат. о-ва, 1958, т. 7, стр. 391—405.
- Н а г о р н ы й Н. М. К усилению теоремы приведения теории алгоритмов.— ДАН СССР, 1953, т. 90, № 3, стр. 341—342.
- Н а г о р н ы й Н. М. Некоторые обобщения понятия нормального алгоритма.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1958, т. 52, стр. 7—65.
- Н а г о р н ы й Н. М. О минимальном алфавите алгоритмов над данным алфавитом.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1958, т. 52, стр. 66—74.
- Н а г о р н ы й Н. М. О разыскании изоморфизмов ассоциативных исчислений.— Z. math. Logik und Grundlagen Math., 1960, Bd 6, N 3—4, S. 319—324.
- Н а г о р н ы й Н. М. О реализуемых и восполнимых логико-арифметических формулах.— ДАН СССР, 1964, т. 157, № 3, стр. 529—531.
- Н а т а н с о н И. П. Теория функций вещественной переменной. Изд. 2-е. ГИТТЛ, М., 1957, 552 с.
- Н е п о м н я щ и й В. А. Об одном базисе для рекурсивно-перечислимых множеств.— ДАН СССР, 1966, т. 170, № 6, стр. 1262—1264.
- Н о в и к о в П. С. Неразрешимость проблемы сопряженности в теории групп.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1954, т. 18, № 6, стр. 485—524.
- Н о в и к о в П. С. О логических парадоксах.— ДАН СССР, 1947, т. 56, № 3, стр. 451—453.
- Н о в и к о в П. С. О множествах эффективно-нечетных.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1939, № 1, стр. 35—40.
- Н о в и к о в П. С. О непротиворечивости некоторых логических исчислений.— Infinitistic methods. Proc. of the Symposium on foundations of math. Warszawa, 1961, p. 71—74.
- Н о в и к о в П. С. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1951, т. 38, стр. 279—316.
- Н о в и к о в П. С. О проекциях некоторых B -множеств.— ДАН СССР, 1939, т. 23, № 9, стр. 863—864.
- Н о в и к о в П. С. Об аксиоме полной индукции.— ДАН СССР, 1949, т. 64, № 3, стр. 457—459.
- Н о в и к о в П. С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества.— ДАН СССР, 1952, т. 85, № 5, стр. 709—712.

- Новиков П. С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1955, т. 44, 444 с.
- Новиков П. С. Отделимость C -множеств.— Изв. АН СССР. Отд. мат. и естеств. наук. Сер. мат., 1937, № 2, стр. 253—264.
- Новиков П. С. Элементы математической логики. Физматгиз, М., 1959, 400 с.
- Новиков П. С., Адян С. И. Проблема тождества для полугрупп с односторонним сокращением.— *Z. math. Logik und Grundlagen Math.*, 1958, Bd 4, N 1, S. 66—88.
- Ногина Е. Ю. Об эффективно топологических пространствах.— ДАН СССР, 1966, т. 169, № 1, стр. 28—31.
- Оревков В. П. Некоторые вопросы теории полиномов с конструктивными вещественными коэффициентами.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 72, стр. 462—487.
- Оревков В. П. Некоторые классы сведения и разрешимые классы секвенций для конструктивного исчисления предикатов.— ДАН СССР, 1965, т. 163, № 1, стр. 30—32.
- Оревков В. П. Неразрешимость в конструктивном исчислении предикатов класса формул типа $\neg \neg \forall \exists$.— ДАН СССР, 1965, т. 163, № 3, стр. 581—583.
- Оревков В. П. О гливенковских классах секвенций.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968, т. 98, стр. 131—154.
- Оревков В. П. О конструктивных отображениях круга в себя.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 72, стр. 437—461.
- Орловский Э. С. Некоторые вопросы теории алгорифмов.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1958, т. 52, стр. 140—171.
- Очан Ю. С. Некоторые вопросы эквивалентности семейств множеств.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1942, т. 6, № 1-2, стр. 171—188.
- Очан Ю. С. Теория операций над множествами.— Усп. мат. наук, 1955, т. 10, вып. 3 (65), стр. 71—128.
- Павлова Е. А. О густотах гипериммунных множеств.— ДАН СССР, 1961, т. 139, № 4, стр. 814—817.
- Павлова Е. А. О некоторых арифметических и алгебраических свойствах системы густот.— В кн.: Исследования по алгебре и математическому анализу. «Карта Молдовеняскэ», Кишинев, 1965, стр. 55—64.
- Павлова Е. А. О структуре густот множеств натуральных чисел.— Изв. Молд. фил. АН СССР, 1960, № 10 (76), стр. 31—38.
- Пименов Р. И. Аксиоматическое исследование пространственно-временных структур.— Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1959, т. 4, стр. 78—79.
- Плюшкевичус Р. А. Секвенциальный вариант исчисления конструктивной логики для нормальных формул, не содержащий структурных правил.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1968, т. 98, стр. 155—202.
- Плюшкявичус Р. А. Об одном варианте конструктивного исчисления предикатов без структурных правил вывода.— ДАН СССР, 1965, т. 161, № 2, стр. 292—295.
- Поваров Г. Н. К изучению симметрических булевых функций с точки зрения теории релейно-контактных схем.— ДАН СССР, 1955, т. 104, № 2, стр. 183—185.
- Поваров Г. Н. О функциональной разделимости булевых функций.— ДАН СССР, 1954, т. 94, № 5, стр. 801—803.
- Поляков Е. А. О некоторых свойствах алгебр рекурсивных функций.— Сиб. мат. журн., 1966, т. 7, № 3, стр. 720—723.
- Селивановский Е. А. Об одном классе эффективных множеств (множества C).— Мат. сб., 1928, т. 35, вып. 3-4, стр. 379—413.
- Слисенко А. О. О конструктивных не сепарабельных пространствах.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 72, стр. 533—536.
- Слисенко А. О. О некоторых алгорифмических задачах, связанных с арифметическими операциями над дуплексами.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 72, стр. 488—523.
- Слисенко А. О. Пример неразрывного, но не непрерывного конструктивного оператора в метрическом пространстве.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 72, стр. 524—532.

- Сметанич Я. С. О полноте исчисления высказываний с дополнительной операцией от одной переменной.—Труды Моск. мат. о-ва, 1960, т. 9, стр. 357.—371.
- Сметанич Я. С. Пример однородной группы с неразрешимой проблемой тождества слов.— Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1962, № 188, стр. 199—201.
- Смирнов В. А. Алгоритмы и логические схемы алгоритмов.— В кн.: Проблемы логики. Изд-во АН СССР, М., 1963, стр. 84—101.
- Содномов Б. С. Непротиворечивость проективной оценки некоторых неэффективных множеств.— Усп. мат. наук, 1955, т. 10, вып. 1 (63), стр. 155—158.
- Ступина И. Д. Об одном свойстве R -операции.— Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 5, стр. 1125—1151.
- Субботовская Б. А. О реализации линейных функций формулами в базисе $V, \&.$ — ДАН СССР, 1961, т. 136, № 3, стр. 553—555.
- Сыркин Г. И. Критерий справедливости теоремы перевода в теории нормальных алгорифмов.— ДАН СССР, 1967, т. 173, № 2, стр. 270—272.
- Тайманов А. Д. О жестких базах δ -операции.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1950, т. 14, № 5, стр. 443—448.
- Тайманов А. Д. О замкнутых отображениях. I.— Мат. сб., 1955, т. 36 (78), вып. 2, стр. 349—352.
- Тайманов А. Д. О классе моделей, замкнутом относительно прямого произведения.— ДАН СССР, 1959, т. 127, № 6, стр. 1173—1175.
- Тайманов А. Д. Разрешимость элементарной теории включения сфер.— Алгебра и логика. Семинар, 1963, т. 2, вып. 3, стр. 23—27.
- Тайманов А. Д. Характеристика аксиоматизируемых классов моделей. I, II.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, т. 25, № 4, стр. 601—620; № 6, стр. 755—764.
- Тайцлин М. А. Еще несколько примеров неразрешимых теорий.— Алгебра и логика. Семинар, 1967, т. 6, вып. 3, стр. 105—111.
- Тайцлин М. А. Разрешимость некоторых элементарных теорий.— Алгебра и логика. Семинар, 1964, т. 3, вып. 3, стр. 5—12.
- Тайцлин М. А. Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно-опровержимых формул элементарной теории структур.— Алгебра и логика. Семинар, 1962, т. 1, вып. 3, стр. 24—38.
- Тартаковский В. А. Применение метода решета к решению проблемы тождества в некоторых типах групп.— Мат. сб., 1949, т. 25 (67), вып. 2, стр. 251—274.
- Трахтенброт Б. А. Алгоритмы и машинное решение задач. Изд. 2-е. Физматгиз, М., 1960, 118 с.
- Трахтенброт Б. А. Конечные автоматы и логика одноместных предикатов.— ДАН СССР, 1961, т. 140, № 2, стр. 326—329.
- Трахтенброт Б. А. Невозможность алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах.— ДАН СССР, 1950, т. 70, № 3, стр. 569—572.
- Трахтенброт Б. А. О нормированных сигнализирующих для тьюринговых вычислений.— Алгебра и логика. Семинар, 1966, т. 5, вып. 6, стр. 61—70.
- Трахтенброт Б. А. О рекурсивной отделимости.— ДАН СССР, 1953, т. 88, № 6, стр. 953—956.
- Трахтенброт Б. А. Определение конечного множества и дедуктивная неполнота теории множеств.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1956, т. 20, № 4, стр. 569—582.
- Успенский В. А. К теореме о равномерной непрерывности.— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 1 (73), стр. 99—142.
- Успенский В. А. Лекции о вычислимых функциях. Физматгиз, М., 1960, 492 с.
- Успенский В. А. О вычислимых операциях.— ДАН СССР, 1955, т. 103, № 5, стр. 773—776.
- Успенский В. А. Системы перечислимых множеств и их нумерации.— ДАН СССР, 1955, т. 105, № 6, стр. 1155—1158.
- Успенский В. А. Теорема Геделя и теория алгоритмов.— ДАН СССР, 1953, т. 91, № 4, стр. 737—740.
- Фалевич Б. Я. Новый метод доказательства теорем неполноты для систем с правилом Карнапа и его приложение к вопросу взаимоотношения классиче-

- ского и конструктивного анализ. — ДАН СССР, 1958, т. 120, № 6, стр. 1210—1213.
- Фрейвалд Р. Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга с входом. — Алгебра и логика. Семинар, 1965, т. 4, вып. 1, стр. 47—58.
- Френкель В. И. Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем в группах, заданных системой образующих и определяющими неравенствами. — Сиб. мат. журн., 1965, т. 6, № 5, стр. 1144—1162.
- Фридман А. А. Степени неразрешимости проблемы тождества для конечно-определенных групп. «Наука», М., 1967, 189 с.
- Хмельевский Ю. И. Решение некоторых систем уравнений в словах. — ДАН СССР, 1964, т. 156, № 4, стр. 749—751.
- Цейтин Г. С. Алгоритмические операторы в конструктивных метрических пространствах. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1962, т. 67, стр. 295—361.
- Цейтин Г. С. Ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1958, т. 52, стр. 172—189.
- Цейтин Г. С. Один способ изложения теории алгоритмов и перечислимых множеств. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 72, стр. 69—98.
- Цейтин Г. С. Теоремы о среднем значении в конструктивном анализе. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1962, т. 67, стр. 362—384.
- Цейтин Г. С. Три теоремы о конструктивных функциях. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 72, стр. 537—543.
- Цетлин М. Л. Матричный метод анализа и синтеза электронно-импульсных и релейно-контактных (непримитивных) схем. — ДАН СССР, 1957, т. 117, № 6, стр. 979—982.
- Цетлин М. Л. Приложение матричного исчисления к синтезу релейно-контактных схем. — ДАН СССР, 1952, т. 86, № 3, стр. 525—528.
- Цинман Л. Л. О базисах примитивно-рекурсивно замкнутых классов функций. — ДАН СССР, 1966, т. 170, № 1, стр. 45—48.
- Цинман Л. Л. О роли принципа индукции в формальной арифметической системе. — Мат. сб., 1968, т. 77 (119), вып. 1, стр. 71—104.
- Чернявский В. С. Об обратимости алгоритмов. — Труды Моск. мат. о-ва, 1960, т. 9, стр. 425—453.
- Чернявский В. С. Об одном классе нормальных алгоритмов Маркова. — В кн.: Логические исследования. Изд-во АН СССР, М., 1959, стр. 263—299.
- Шанин Н. А. К вопросу о конструктивном понимании опорных формул. I. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1964, т. 72, стр. 348—379.
- Шанин Н. А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1962, т. 67, стр. 15—294.
- Шанин Н. А. Некоторые вопросы математического анализа в свете конструктивной логики. — Z. math. Logik und Grundlagen Math., 1956, Bd 2, N 2, S. 27—36.
- Шанин Н. А. О конструктивном понимании математических суждений. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1958, т. 52, стр. 226—311.
- Шанин Н. А. О некоторых логических проблемах арифметики. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1955, т. 43, 112 с.
- Шанин Н. А. О погружении классического логико-арифметического исчисления в конструктивное логико-арифметическое исчисление. — ДАН СССР, 1954, т. 94, № 2, стр. 193—196.
- Шанин Н. А. Об алгоритме конструктивной расшифровки математических суждений. — Z. math. Logik und Grundlagen Math., 1958, Bd 4, N 4, S. 293—303.
- Шанин Н. А., Давыдов Г. В., Маслов С. Ю., Минц Г. Е., Ореков В. П., Слисенко А. О. Алгоритм машинного поиска естественного логического вывода в исчислении высказываний. «Наука», М.—Л., 1965, 39 с.
- Шестаков В. И. Алгебра двухполюсных схем, построенных исключительно из двухполюсников (алгебра A -схем). — Автоматика и телемеханика, 1941, т. 6, № 2, стр. 15—24.

- Шестаков В. И. Представление характеристических функций предложений посредством выражений, реализуемых релейно-контактными схемами.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1946, т. 10, № 3, стр. 529—554.
- Шестопал Г. А. О числе простых базисов булевых функций.— ДАН СССР, 1961, т. 140, № 2, стр. 314—317.
- Шиханович Ю. А. Примеры применения математической логики к алгебре.— Труды Третьего Всесоюзн. мат. съезда (Москва, июнь — июль 1956 г.), 1956, т. 2, стр. 148—149.
- Шнейдер В. Е. Дескриптивная теория множеств в топологических пространствах.— Уч. зап. МГУ, 1949, вып. 135, мат., т. 2, стр. 37—85.
- Шурыгин В. А. О конструктивных множествах с равенством и их отображениях.— ДАН СССР, 1967, т. 173, № 1, стр. 54—57.
- Шурыгин В. А. О нетривиальных конструктивных отображениях некоторых множеств.— ДАН СССР, 1966, т. 168, № 1, стр. 40—42.
- Щегольков Е. А. Об униформизации и расщеплении некоторых множеств.— ДАН СССР, 1959, т. 124, № 4, стр. 783—785.
- Щегольков Е. А. Элементы теории B -множеств.— Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 5 (39), стр. 14—44.
- Яблонский С. В. О полных системах функций алгебры логики.— Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 5 (51), стр. 197.
- Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1958, т. 51, 141 с.
- Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. «Наука», М., 1966, 119 с.
- Янков В. А. О некоторых суперконструктивных исчислениях высказываний.— ДАН СССР, 1963, т. 151, № 4, стр. 796—797.
- Янков В. А. О реализуемых формулах логики высказываний.— ДАН СССР, 1963, т. 151, № 5, стр. 1035—1037.
- Янков В. А. О связи между выводимостью в интуиционистском исчислении высказываний и конечными импликативными структурами.— ДАН СССР, 1963, т. 151, № 6, стр. 1293—1294.
- Янов Ю. И. О логических схемах алгоритмов.— Проблемы кибернетики, 1958, вып. 1, стр. 75—127.
- Яновская С. А. Математическая логика и основания математики.— В кн.: Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. 1. Физматгиз, М., 1959, стр. 13—120.
- Яновская С. А. Основания математики и математическая логика.— В кн.: Математика в СССР за 30 лет. 1917—1947. ГИТТЛ, М.—Л., 1948, стр. 11—45.
- Bochvar D. Über einen Aussagenkalkül mit abzählbaren logischen Summen und Produkten.— Mat. сб., 1940, т. 7 (49), вып. 1, стр. 65—100.
- Glivenko V. Sur la logique de M. Brouwer.— Bull. Acad. sci. de Belgique (5), 1928, t. 14, p. 225—228.
- Glivenko V. Sur quelques points de la logique de M. Brouwer.— Bull. Acad. sci. de Belgique (5), 1929, t. 15, p. 183—188.
- Kantorovitch L., Livenson E. Memoir on the analytical operations and projective sets. I, II.— Fund. math., 1932, t. 18, s. 214—271; 1933, t. 20, s. 54—97.
- Kolmogoroff A. Zur Deutung der intuitionistischen Logik.— Math. Z., 1932, Bd 35, S. 58—65.
- Lavrentieff M. Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes.— Fund. math., 1924, t. 6, s. 149—160.
- Lusin N., Novikoff P. Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique arbitraire donné par un crible.— Fund. math., 1935, t. 25, s. 559—560.
- Malcev A. Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik.— Mat. сб., 1936, т. 1 (43), вып. 3, стр. 323—336.
- Novikoff P. S. On the consistency of certain logical calculus.— Mat. сб., 1943, т. 12 (54), вып. 2, стр. 231—261.
- Schönfinkel M. Über die Bausteine der mathematischen Logik.— Math. Ann., 1924, Bd 92, S. 305—316.

- Suslin M. Sur une définition des ensembles B sans nombres transfini.— *Comptes Rendus Acad. sci.*, 1917, t. 164, N 1, p. 88—91.
- Tichonoff A. Über die topologische Erweiterung von Räumen.— *Math. Ann.*, 1929, Bd 102, H. 4, S. 544—561.

К главе VII. История математики

- Александров А. Д. Геометрия и топология в Советском Союзе. I, II.— *Усп. мат. наук*, 1947, т. 2, вып. 4 (20), стр. 3—58; вып. 5 (21), стр. 9—92.
- Александров А. Д. Общий взгляд на математику.— В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение. Т. I. Изд-во АН СССР, М., 1956, стр. 5—78.
- Александров П. С. Математика в Московском университете в первой половине XX века.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 8. ГИТТЛ, М., 1955, стр. 9—54.
- Александров П. С. Московское математическое общество.— *Вестн. АН СССР*, 1942, № 1, стр. 58—62.
- Александров П. С. Русская математика XIX и XX вв. и ее влияние на мировую науку.— Уч. зап. Моск. ун-та, 1947, вып. 91, стр. 3—34.
- Александров П. С. Советская математическая школа.— В кн.: Вопросы истории отечественной науки. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1949, стр. 63—85.
- Андронов А. А. Где и когда родился Н. И. Лобачевский.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. ГИТТЛ, М., 1956, стр. 9—48.
- Андрунакиевич В. А., Бычков В. П. Математическая жизнь в Молдавской ССР.— *Усп. мат. наук*, 1965, т. 20, вып. 2 (122), стр. 247—258.
- Антропова В. И. О геометрическом методе «Математических начал натуральной философии» И. Ньютона.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 17. «Наука», М., 1966, стр. 205—228.
- Аржаных И. С. К вопросу о развитии математики и механики в Узбекистане.— *Изв. АН УзССР*, 1953, № 6, стр. 102—105.
- Аржаных И. С., Куклес И. С., Салахитдинов М. С. Об исследованиях по дифференциальным, интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям в Узбекистане.— *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук*, 1967, № 5, стр. 3—9.
- Ахиезер Н. И. Академик С. Н. Бернштейн и его работы по конструктивной теории функций. Изд-во Харьк. ун-та, Харьков, 1955, 112 с.
- Ахиезер Н. И. Конструктивная теория функций в Харьковском университете и Математическом институте (1917—1947).— *Усп. мат. наук*, 1947, т. 2, вып. 3 (19), стр. 158—174.
- Ахиезер Н. И. П. Л. Чебышев и его научное наследие.— В кн.: Чебышев П. Л. Избр. труды. Изд-во АН СССР, М., 1955, стр. 843—888.
- Барбан М. Б., Левин Б. В. Исследования по теории чисел в Узбекистане.— *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук*, 1967, № 5, стр. 10—16.
- Бари Н. К., Люстерник Л. А. Работы Н. Н. Лузина по метрической теории функций.— *Усп. мат. наук*, 1951, т. 6, вып. 6 (46), стр. 28—46.
- Бари Н. К., Ляпунов А. А., Меньшов Д. Е., Толстов Г. П. Метрическая теория функций действительного переменного.— В кн.: Математика в СССР за 30 лет. 1917—1947. ГИТТЛ, М.— Л., 1948, стр. 256—287.
- Бахмутская Э. Я. О преподавании математики в Харьковском технологическом институте в XIX и начале XX столетия.— *Труды Харьк. политехн. ин-та*, 1955, т. 5, сер. инж.-физ., вып. 1, стр. 185—191.
- Бахмутская Э. Я. О ранних работах С. О. Шатуновского по основаниям математики.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 16. «Наука», М., 1965, стр. 207—216.
- Бахмутская Э. Я. Тимофей Федорович Осиповский и его «Курс математики».— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 5. ГИТТЛ, М., 1952, стр. 28—74.
- Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в древней Греции.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 11. Физматгиз, М., 1958, стр. 225—438.
- Башмакова И. Г. О некоторых особенностях развития алгебры XVIII в.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 17. «Наука», М., 1966, стр. 317—323.
- Башмакова И. Г. О некоторых проблемах античной математики.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 15. Физматгиз, М., 1963, стр. 37—50.

- Б а ш м а к о в а И. Г. Об античной математике первых веков нашей эры. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 14. Физматгиз, М., 1961, стр. 473—490.
- Б е л о з е р о в С. Е. Математика в Ростовском университете. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 6. ГИТТЛ, М., 1953, стр. 247—352.
- Б е л о з е р о в С. Е. Основные этапы развития общей теории аналитических функций. Изд-во Ростовск. ун-та, Ростов, 1962, 311 с.
- Б е л ы й Ю. А. Об учебнике Л. Эйлера по элементарной геометрии. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 14. Физматгиз, М., 1961, стр. 237—284.
- Б е р н ш т е й н С. Н. Петербургская школа теории вероятностей. — Уч. зап. Ленингр. ун-та, 1940, № 55, сер. мат. наук, вып. 10, стр. 3—11.
- Б е р н ш т е й н С. Н. Чебышев, его влияние на развитие математики. — Уч. зап. Моск. ун-та, 1947, вып. 91, стр. 35—45.
- Б е с п а м я т н ы х Н. Д. Арифметические исследования в России в XIX веке. — Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та, 1957, вып. 2, стр. 3—42.
- Б е с п а м я т н ы х Н. Д. К истории инструментальных вычислений в XVII и XVIII вв. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 17. «Наука», М., 1966, стр. 281—288.
- Б е с п а м я т н ы х Н. Д. К истории счетных инструментов в России в XIX веке. — Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та, 1957, вып. 2, стр. 43—54.
- Б і л и й Ю. О., Ш в е ц о в К. І. Перші російські підручники з геометрії. — Наук. зап. Укр. наук.-досл. ін-ту педагогіки, фіз.-мат. сер., 1959, т. 13, вип. 2, стор. 117—130.
- Б л а н к Я. П., Г о р д е в с к и й Д. З., П о г о р е л о в А. В. Геометрия в Харьковском университете. — Зап. Харьк. мат. о-ва, 1956, т. 24, стр. 41—57.
- Б о б ы н и н В. В. Древнеиндуская математика и отношение к ней Древней Греции. — Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва. Сер. 2, 1917, т. 22, № 2, стр. 128—157.
- Б о г о л ь о в Н. Н. Успехи советской математической школы (к Международному конгрессу математиков в Москве). — Вестн. АН СССР, 1966, № 7, стр. 37—42.
- Б о г о л ь о в О. М. Математика і природознавство в Харківському колегіумі. — У кн.: З історії вітчизняного природознавства. «Наукова думка», К., 1964, стор. 34—39.
- Б о е в Г. П. Лекции по истории математики. Ч. I. «Коммунист», Саратов, 1956, 281 с.
- Б р у е в и ч Н. Г. О роли отечественных ученых в развитии машинной математики. — Вестн. АН СССР, 1948, № 8, стр. 50—65.
- В а с и л ь е в А. В. Математика. Вып. 1 (1725—1826—1863). Птгр., 1921, 72 с.
- В а с и л ь е в А. В. Целое число. Исторический очерк. Изд. 2-е. Птгр., 1922, 272 с.
- В а с и л ь е в А. М., Е ф и м о в Н. В., Р а ш е в с к и й П. К. Исследования по дифференциальной геометрии в Московском университете в советский период. — Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1967, № 5, стр. 12—23.
- В е с е л о в с к и й И. Н. Архимед. Учпедгиз, М., 1957, 111 с.
- В е с е л о в с к и й И. Н. Вавилонская математика. — Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР, 1955, т. 5, стр. 241—303.
- В е с е л о в с к и й И. Н. Египетская наука и Греция. Из истории древней математики и астрономии. — Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР, 1948, т. 2, стр. 426—498.
- В и н о г р а д о в И. М., Д е л о н е Б. Н. Работы П. Л. Чебышева по теории чисел. — В кн.: Научное наследие П. Л. Чебышева. Вып. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1945, стр. 69—87.
- В и н о г р а д о в И. М., П о с т н и к о в А. Г. О состоянии и основных направлениях развития исследований в области аналитической теории чисел. — Усп. мат. наук, 1967, т. 22, вып. 1 (133), стр. 3—14.
- В и т е н з о н И. Г. Работы Ляпунова по механике в харьковский период его деятельности (1885—1902 гг.). — Зап. Харьк. мат. о-ва, 1956, т. 24, стр. 75—89.
- В и ш и к М. И., Л а н д и с Е. М. Теория уравнений с частными производными в Московском университете за 50 лет. — Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1967, № 5, стр. 48—70.
- В о л к о в Д. П. Некоторые материалы к вопросу о развитии начертательной геометрии в России. Досоветский период. — Труды Грузинск. политехн. ин-та, 1957, № 1 (49), стр. 53—71.

- Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. Изд. 2-е. «Наука», М., 1967, 367 с.
- Гагаев Б. М. Наши достижения в области математики за 40 лет Советской власти.— Изв. вузов. Математика, 1957, № 1, стр. 3—8.
- Гагаев Б. М., Морозов В. В., Норден А. П. Казанская математическая школа за 30 лет.— Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 6 (22), стр. 3—20.
- Гельфонд А. О. О некоторых характерных чертах идей Л. Эйлера в области математического анализа и его «Введение в анализ бесконечно малых».— Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 4 (76), стр. 29—39.
- Гельфонд А. О. Очерк истории и современного состояния теории трансцендентных чисел.— Естествознание и марксизм, 1930, № 1 (5), стр. 33—55.
- Гиршвальд Л. Я. История открытия логарифмов. Изд-во Харьк. ун-та, Харьков, 1952, 32 с.
- Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. ГИТТЛ, М.— Л., 1946, 247 с.
- Гнеденко Б. В., Гихман И. И. Развитие теории вероятностей на Украине.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. ГИТТЛ, М., 1956, стр. 477—536.
- Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б. Михаил Васильевич Остроградский. 1801—1862. Жизнь и работа. Научное и педагогическое наследие. Изд-во АН СССР, М., 1963, 271 с.
- Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б. О некоторых задачах истории математики.— Укр. мат. журн., 1957, т. 9, № 4, стр. 359—368.
- Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б. О развитии математики на Украине.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. ГИТТЛ, М., 1956, стр. 403—426.
- Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б., Штокало И. З., Юшкевич А. П. О проблемах истории математики в России и в СССР и о работах этой области за 1956—1961 гг.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 15. Физматгиз, М., 1963, стр. 11—36.
- Гнеденко Б. В., Рыбников К. А., Симонов Н. И. Проблемы истории математики Нового времени.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 15. Физматгиз, М., 1963, стр. 73—96.
- Голубев В. В. Работа П. Л. Чебышева по интегрированию алгебраических функций.— В кн.: Научное наследие П. Л. Чебышева. Вып. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1945, стр. 88—121.
- Голубев В. В., Бари Н. К. Биография Н. Н. Лузина.— В кн.: Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. ГИТТЛ, М.— Л., 1951, стр. 11—31.
- Гордеский Д. З. К. А. Андреев — выдающийся русский геометр. Изд-во Харьк. ун-та, Харьков, 1955, 46 с.
- Граве Д. А. Трактат по алгебраическому анализу. Т. 1, 2. Изд-во АН УССР, К., 1938, 1939.
- Граціанська Л. М. Вклад вчених університету в розвиток природничих наук (математика).— В кн.: Історія Київського університету. Вид-во Київськ. ун-ту, К., 1959, стор. 73—86.
- Граціанська Л. М. Математики Київського університету. «Знання», К., 1967, 47 с.
- Граціанська Л. М. Нариси з народної математики України. Вид-во Київськ. ун-ту, К., 1968, 99 с.
- Григорьян А. Т. Александр Михайлович Ляпунов.— Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР, 1957, т. 19, стр. 284—289.
- Григорьян А. Т. Леонард Эйлер (к 250-летию со дня рождения).— Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР, 1957, т. 17, стр. 312—319.
- Григорьян А. Т. Михаил Васильевич Остроградский. Изд-во АН СССР, М., 1961, 91 с.
- Гусейнов А. И., Агаев Г. Н. К истории развития математических исследований в Азербайджане.— Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук, 1964, № 3, стр. 3—17.
- Гюнтер Н. М. О научных достижениях В. А. Стеклова.— В кн.: Памяти В. А. Стеклова. Изд-во АН СССР, Л., 1928, стр. 1—14.
- Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1947, 419 с.

- Делоне Б. Н., Кудрявцев Л. Д., Постников М. М. Очерк истории развития математики в Академии наук СССР за советский период (1917—1960).— В кн.: Очерки истории математики и механики. Изд-во АН СССР, М., 1963, стр. 3—44.
- Демидов С. С. К истории проблем Гильберта.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 17. «Наука», М., 1966, стр. 91—121.
- Денисов А. П. Леонтий Филиппович Магницкий. 1669—1739. «Просвещение», М., 1967, 143 с.
- Демман И. Я. Знаменитейшие историки математики (первая серия обзоров).— Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1967, т. 301, стр. 322—344.
- Демман И. Я. Из истории математики в Дерптском (Юрьевском) университете.— Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. М. Н. Покровского, т. 14, физ.-мат. ф-т, вып. 1, 1955, стр. 128—137.
- Демман И. Я. История арифметики. Изд. 2-е. «Просвещение», М., 1965, 415 с.
- Демман И. Я. Карл Михайлович Петерсон и его кандидатская диссертация.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 5. ГИТТЛ, М., 1952, стр. 134—164.
- Добровольский В. А. Дмитрий Александрович Граве. 1863—1939. «Наука», М., 1968, 111 с.
- Добровольський В. О. Математика в Київському політехнічному інституті за 50 років.— З історії вітчизняного природознавства. «Наукова думка», К., 1964, стор. 128—143.
- Добровольський В. О. Математика в Київському фізико-математичному товаристві.— У кн.: З історії вітчизняного природознавства. «Наукова думка», К., 1964, стор. 115—127.
- Добровольський В. О., Котек В. В. Роботи з історії математики на Україні за 110 років (1850—1960).— У кн.: Історико-математичний збірник. Вип. 4. Вид-во АН УРСР, К., 1963, стор. 10—36.
- Дорофеева А. В. Вариационное исчисление во второй половине XIX в.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 15. Физматгиз, М., 1963, стр. 99—128.
- Дорофеева А. В. Развитие вариационного исчисления как исчисления вариаций.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 14. Физматгиз, М., 1961, стр. 101—180.
- Еругин Н. П. Обзор работ советских математиков по теории устойчивости движения.— В кн.: Лукомская А. М. Александр Михайлович Ляпунов. Библиография. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1953, стр. 89—96.
- Жаутыков О. А. Математика и ее развитие. Изд-во АН КазССР, Алма-Ата, 1951, 84 с. (на казахск. яз.).
- Зубов В. П. В. В. Бобынин и его труды по истории математики.— Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР, 1956, вып. 15, стр. 277—322.
- Зубов В. П. Историография естественных наук в России (XVIII — первая половина XIX в.). Изд-во АН СССР, М., 1956, 576 с.
- Зубов В. П. К вопросу о характере древнерусской математики.— Усп. мат. наук, 1952, т. 7, 3 (49), стр. 83—96.
- Зубов В. П. Кирик Новгородец и древнерусские деления часа.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 6. ГИТТЛ, М., 1953, стр. 196—212.
- Зубов В. П., Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Об исследованиях по истории математики средних веков.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 15. Физматгиз, М., 1963, стр. 51—72.
- Игначиус Г. И. Владимир Андреевич Стеклов. «Наука», М., 1967, 212 с.
- Искандеров Р. И., Сабиров М. С. Математические исследования Узбекского государственного университета.— Труды Узбекск. ун-та, 1957, т. 76, стр. 101—124.
- Каган В. Ф. Лобачевский. Изд. 2-е. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948, 506 с.
- Каргин Д. И. Гаспар Монж — творец начертательной геометрии.— В кн.: Гаспар Монж. Сб. ст. к двухсотлетию со дня рождения. Изд-во АН СССР, 1947, стр. 17—43.
- Кары-Ниязов Т. Н. Астрономическая школа Улугбека. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950, 330 с.
- Киппер А. Я. Физико-математические науки.— В кн.: Десять лет Академии наук Эстонской ССР (1946—1956). Эст. гос. изд-во, Таллин, 1956, стр. 7—16.

- К и р о С. Н. Математика в периодических изданиях Одесского (Новороссийского) университета. 1865—1955 гг. Часть первая (1865—1933).— Труды Одесск. ун-та. Сер. мат., 1956, т. 146, вып. 6, стр. 89—109.
- К л е м е н т Ф. Д. Развитие естественнонаучных и технических исследований в Эстонской ССР.— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1966, вып. 20, стр. 33—37.
- К о л м о г о р о в А. Н. Математика.— БСЭ. Изд. 2-е, т. 26, 1954.
- К о л м о г о р о в А. Н. Ньютон и современное математическое мышление.— В кн.: Московский университет — памяти Исаака Ньютона. 1643—1943. Изд-во МГУ, М., 1946, стр. 27—42.
- К о л м о г о р о в А. Н. Развитие математики в СССР.— БСЭ, т. «СССР», 1947, стр. 1316—1323.
- К о л ь м а н Э. Я. История математики в древности. Физматгиз, М., 1961, 235 с.
- К о ш л я к о в Н. С. Вариационное исчисление Эйлера.— В кн.: Леонард Эйлер (1707—1783). Изд-во АН СССР, М.—Л., 1935, стр. 37—50.
- К р а в ч у к М. Ф. Влияние Эйлера на дальнейший развитие математики. Вид-во ВУАН, К., 1935, 45 с.
- К р а в ч у к М. Ф. Математика та математики в Київському університеті за сто років.— У кн.: Розвиток науки в Київському університеті за сто років. 1835—1935. Вид. Київськ. ун-ту, К., 1935, стор. 34—69.
- К р а м а р Ф. Д. Векторное исчисление конца XVIII и начала XIX вв.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 15. Физматгиз, М., 1963, стр. 225—290.
- К р а м а р Ф. Д., М о л ю к о в И. Д. Иосиф Иванович Сомов (1815—1876) — математик, механик, педагог. Изд-во Казахск. ун-та, Алма-Ата, 1965, 123 с.
- К р о п о т о в А. И. Николай Яковлевич Сонин. 1849—1915. «Наука», Л., 1967, 135 с.
- К р о п о т о в А. И., М а р о н И. А. М. В. Остроградский и его педагогическое наследие. Учпедгиз, М., 1961, 204 с.
- К р ы л о в А. Н. Леонард Эйлер.— В кн.: Леонард Эйлер (1707—1783). Изд-во АН СССР, Л., 1935, стр. 1—28.
- К р ы л о в А. Н. Ньютон и его значение в мировой науке. 1643—1943. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1943, 39 с.
- К р ы л о в А. Н. Пафнутий Львович Чебышев. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1944, 30 с.
- К у ш н и р Е. А. Решение Л. Эйлером разностных обыкновенных уравнений с переменными коэффициентами методом определенных интегралов.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 10. ГИТТЛ, М., 1957, стр. 363—370.
- К у ш н і р Е. А. Символічні способи розв'язування різницевих рівнянь у початковому періоді розвитку їх теорії.— У кн.: Історико-математичний збірник. Вип. 3. Вид-во АН УРСР, К., 1962, стор. 37—49.
- Л а в р е н т ь е в М. А. Пути развития советской математики.— В кн.: Общее собрание Академии наук СССР, посвященное тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948, стр. 393—402.
- Л а н к о в А. В. К истории развития передовых идей в русской методике математики. Учпедгиз., М., 1951, 152 с.
- Л а п к о А. Ф., Л ю с т е р н и к Л. А. Из истории советской математики.— Усп. мат. наук, 1967, т. 22, вып. 6 (133), стр. 13—140.
- Л а п т е в Б. Л. Жизнь и деятельность Н. И. Лобачевского.— В кн.: Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. 1826—1951. ГИТТЛ., М.—Л., 1952, стр. 23—33.
- Л а п т е в Б. Л. Математика в Казанском университете за 40 лет (1917—1957).— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 12. Физматгиз, М., 1959, стр. 11—58.
- Л а п т е в Б. Л. Петр Алексеевич Широков.— В кн.: Петр Алексеевич Широков (1895—1944). Био-библиографический указатель. Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1955, стр. 3—20.
- Л а п т е в Б. Л. Теория параллельных линий в ранних работах Н. И. Лобачевского.— В кн.: Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. 1826—1951. ГИТТЛ., М.—Л., 1952, стр. 99—116.
- Л е б е д е в Н. А., Л о з и н с к и й С. М. Владимир Иванович Смирнов и математика в Ленинградском университете за 1917—1967 годы. — Вестн. Ленингр. ун-та, № 7. Мат., мех., астроном., 1967, вып. 2, стр. 7—18.

- Л е о н а р д Э й л е р. Переписка. Аннотированный указатель. Под ред. В. И. Смирнова, А. П. Юшкевича. «Наука», Л., 1967, 391 с.
- Л и н н и к Ю. В., Сапогов Н. А., Тимофеев В. Н. Очерк работ А. А. Маркова по теории чисел и теории вероятностей. — В кн.: Марков А. А. Избр. труды. Теория чисел. Теория вероятностей. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1951, стр. 614—640.
- Л у з и н Н. Н. Ньютонова теория пределов. — В кн.: И. Ньютон. 1643—1727. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1943, стр. 53—74.
- Л у з и н Н. Н. Эйлер. По поводу 150-летия со дня смерти. — Соц. реконстр. и наука, 1933, вып. 8, стр. 3—24.
- Л у р ь е С. Я. Архимед. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1945, 270 с.
- Л у р ь е С. Я. Обзор русской литературы по истории математики. — Архив истории науки и техники, 1934, вып. 3, стр. 173—311.
- Л у р ь е С. Я. Теория бесконечно малых у древних атомистов. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1935, 197 с.
- Л у с и с А. Я. Работы математиков Советской Латвии за десять лет. — Изв. АН ЛатвССР, 1950, № 11, стр. 109—121.
- Л ы с е н к о В. И. Из истории первой петербургской математической школы. — Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР, 1961, т. 43, стр. 182—205.
- Л ю с т е р н и к Л. А. Молодость московской математической школы. — Усп. мат. наук, 1967, т. 22, вып. 1 (133), стр. 137—161; вып. 2 (134), стр. 199—239; вып. 4 (136), стр. 147—185.
- М а г н а р а д з е Л. Г., Ч о г о ш в и л и Г. С. Развитие математических наук в Грузии. — В кн.: Сорокалетие Октябрьской революции. Тбилиси, 1957, стр. 485—611.
- М а й с т р о в Л. Е. Теория вероятностей. Исторический очерк. «Наука», М., 1967, 320 с.
- М а м е д б е й л и Г. Д. Основатель Марагинской обсерватории Мухаммед Насир-эддин Туси. Изд-во АН АзССР, Баку, 1961, 315 с.
- М а р к у ш е в и ч А. И. Очерки по истории теории аналитических функций. ГИТТЛ, М.— Л., 1951, 128 с.
- М а р ч е в с к и й М. Н. История математических кафедр в Харьковском университете за 150 лет его существования. — Зап. Харьк. мат. о-ва, 1956, т. 24, стр. 7—29.
- М а р ч е в с к и й М. Н. Харьковское математическое общество за первые 75 лет его существования (1879—1954). — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. ГИТТЛ, М., 1956, стр. 613—666.
- М а т в и е в с к а я Г. П. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. «ФАН», Ташкент, 1967, 341 с.
- Математика в изданиях Академии наук. 1728—1935. Сост. О. В. Динзе, К. И. Шафрановский. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1936, 315 с.
- Математика и механика в изданиях Академии наук СССР. Библиография. 2. 1936—1947. Сост. В. П. Алексеева. Под ред. акад. В. И. Смирнова. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1955, 513 с.; 3. 1948—1952. Сост. В. Б. Португаль, Г. И. Натансон, В. П. Алексеева. Под ред. В. И. Смирнова, 1957, 361 с.
- М е д в е д е в Ф. А. О формировании понятия обобщенного предела. — Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР, 1960, т. 34, стр. 299—322.
- М е д в е д е в Ф. А. Развитие теории множеств в XIX веке. «Наука», М., 1965, 232 с.
- М о л о д ш и й В. Н. Основы учения о числе в XVIII и начале XIX века. Изд. 2-е. Учпедгиз, М., 1963, 262 с.
- М о р д у х а й - Б о л т о в с к о й Д. Д. Из прошлого аналитической геометрии. — Труды Ин-та ист. естествозн. АН СССР, 1952, т. 4, стр. 216—235.
- М о р д у х а й - Б о л т о в с к о й Д. Д. Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики. — Изв. Сев.-Кавказск. ун-та, 1928, т. 2 (15), стр. 35—129.
- М о р о з о в а Н. Н. Теория чисел в Московском университете в XIX в. — Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1960, т. 98, вып. 2, стр. 3—46.
- М ы ш к и с А. Д., Р а б и н о в и ч И. М. Математик Пирс Боль из Риги. «Зинатне», Рига, 1965, 93 с.

- Наумов И. А. Дмитрий Матвеевич Синцов (очерк жизни и научно-педагогической деятельности). Изд-во Харьк. ун-та, Харьков, 1955, 72 с.
- Наумов И. А. Работы Д. М. Синцова по неголономной дифференциальной геометрии.— Уч. зап. Харьк. пед. ин-та, т. 21, сер. мат., 1957, вып. 2, стр. 199—234.
- Научные приборы. Приборы и инструменты исторического значения. Ред. и сост. Л. Е. Майстров. «Наука», М., 1968, 161 с.
- Неменов Л. М. Основные итоги исследований в области физико-математических наук.— Вестн. АН КазССР, 1966, № 7, стр. 26—32.
- Никифорова Т. Р. Осип Иванович Сомов. «Наука», М.—Л., 1964, 128 с.
- Ожигова Е. П. Александр Николаевич Коркин. 1837—1908. «Наука», Л., 1968, 148 с.
- Ожигова Е. П. Егор Иванович Золотарев. «Наука», М.—Л., 1966, 143 с.
- Очерки истории математики и механики. Отв. ред. А. Т. Григорьян. Изд-во АН СССР, М., 1963, 272 с.
- Паплаускас А. Б. Тригонометрические ряды (от Эйлера до Лебега). «Наука», М., 1966, 271 с.
- Петросян Г. Б. Математика в Армении в древних и средних веках. Изд-во Ереванск. ун-та, Ереван, 1959, 437 с. (на арм. яз.).
- Погребыский И. Б. О втором томе «Введения в анализ бесконечных» Леонарда Эйлера.— В кн.: Эйлер Леонард. Введение в анализ бесконечных. Т. 2. Физматгиз, М., 1961, стр. 3—16, 369—390.
- Полубаринова-Кочина П. Я. Софья Васильевна Ковалевская. Ее жизнь и деятельность. ГИТТЛ, М., 1955, 100 с.
- Прудников В. Е. П. Л. Чебышев, ученый и педагог. Изд. 2-е. «Просвещение», М., 1964, 271 с.
- Прудников В. Е. Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков. Учпедгиз, М., 1956, 640 с.
- Пулята Т. В., Лаптев Б. Л., Розенфельд Б. А., Фрадлин Б. Н. Александр Петрович Котельников. 1865—1944. «Наука», М., 1968, 122 с.
- Работы математиков Советской Латвии за последнее семилетие.— Изв. АН ЛатвССР. Сер. физ. и техн. наук, 1965, № 3, стр. 3—26.
- Райк А. Е. Очерки по истории математики в древности. Мордовск. книжн. изд-во, Саранск, 1967, 350 с.
- Рашевский П. К. «Основания геометрии» Гильберта и их место в историческом развитии вопроса.— В кн.: Гильберт Д. Основания геометрии. ГИТТЛ, М.—Л., 1948, стр. 7—52.
- Ремез Е. Я. О математических рукописях академика М. В. Остроградского.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 4. ГИТТЛ, М., 1951, стр. 9—98.
- Розенфельд Б. А. Аналитический принцип непрерывности в геометрии.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 16. «Наука», М., 1965, стр. 273—294.
- Розенфельд Б. А. Геометрические преобразования в работах Леонарда Эйлера.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 10. ГИТТЛ, М., 1957, стр. 374—422.
- Розенфельд Б. А. История математики (обзор работ).— Вопр. ист. естествозн. и техн., 1968, вып. 23, стр. 10—17.
- Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Омар Хайям. «Наука», М., 1965, 191 с.
- Рыбников К. А. История математики. Т. 1, 2. Изд-во МГУ, М., 1960, 1963.
- Сарымсаков Т. А. Теория вероятностей и математическая статистика в работах ташкентской школы.— В кн.: 25 лет советской науки в Узбекистане. Изд-во Узбекск. филиала АН СССР, Ташкент, 1942, стр. 64—72.
- Симонов Н. И. Об исследованиях Л. Эйлера по интегрированию линейных уравнений и систем линейных уравнений с частными производными.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 10. ГИТТЛ, М., 1957, стр. 327—362.
- Симонов Н. И. Об основных направлениях развития теории дифференциальных уравнений в XVIII и XIX столетиях.— В кн.: История и методология естественных наук. Вып. 5. Изд-во Моск. ун-та, М., 1966, стр. 157—174.
- Симонов Н. И. Прикладные методы анализа у Эйлера. ГИТТЛ, М., 1957, 168 с.
- Сираждинов С. Х. Итоги исследований в области теории вероятностей и математической статистики в Узбекистане за 50 лет.— Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1967, № 5, стр. 21—26.

- Смирнов В. И. Математические работы А. Н. Крылова.— Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР, 1956, т. 15, стр. 13—23.
- Смирнов В. И. Очерк основных научных трудов А. М. Ляпунова.— В кн.: Ляпунов А. М. Избр. труды. Изд-во АН СССР, М., 1948, стр. 341—450.
- Смирнов В. И., Кулябко Е. С. Михаил Софронов русский математик середины XVIII века. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1954, 54 с.
- Смирнов В. И., Юшкевич А. П. Математика.— В кн.: История Академии наук СССР. Т. 2. «Наука», М.— Л., 1964, стр. 34—51, 286—305, 473—483.
- Сokolov Ю. Д. Краткий очерк жизни и научной деятельности Жозефа Луи Лагранжа.— Укр. мат. журн., 1961, т. 13, № 2, стр. 127—135.
- Сологуб В. С. Возникновение теории потенциала двойного слоя и первые ее применения к решению некоторых краевых задач.— В кн.: Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Изд-во АН УССР, К., 1963, стр. 110—125.
- Сологуб В. С. К истории краевых задач для эллиптических уравнений.— В кн.: Вопросы математической физики и теории функций. II. «Наукова думка», К., 1964, стр. 186—195.
- Сологуб В. С. Развитие теории дифференциального уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ во второй половине XIX в.— В кн.: Вопросы теории и истории дифференциальных уравнений. «Наукова думка», К., 1968, стр. 49—65.
- Стародубцев С. В. Развитие физико-математических наук в Узбекистане за годы Советской власти (1917—1957 гг.).— Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1957, № 4, стр. 5—14.
- Стяжкин Н. И., Силаков В. Д. Краткий очерк истории общей и математической логики в России. «Высшая школа», М., 1962, 85 с.
- Сушкевич А. К. Диссертации по математике в Харьковском университете за 1805—1917 годы.— Зап. Харьк. мат. о-ва, 1956, т. 24, стр. 91—115.
- Сушкевич А. К. Материалы к истории алгебры в России в 19 в. и начале 20 в.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 4. ГИТТЛ, М., 1951, стр. 237—451.
- Українська математична бібліографія. 1917—1960. Під ред. Й. З. Штокало. Вид-во АН УРСР, К., 1963, 382 с.
- Франкль Ф. И. Московская топологическая школа.— Естествознание и марксизм, 1929, № 4, стр. 169—188.
- Франкль Ф. И. О работах русских математиков XIX в. по теории характеристик уравнений в частных производных.— Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 2 (42), стр. 154—156.
- Халилов З. И. Развитие физико-математических наук в Советском Азербайджане.— Изв. АН АзССР, 1957, № 10, стр. 25—28.
- Хотимский В. И. Исторические корни теории вероятностей.— Под знаменем марксизма, 1936, № 1, стр. 137—150; № 6, стр. 143—155; № 11, стр. 116—123.
- Цхакая Д. Г. История математических наук в Грузии с древних времен до начала XX века. Изд-во АН ГрССР, Тбилиси, 1959, 218 с.
- Чайковський М. Українська математична наукова бібліографія (1894—1929). Одеська філія Наук.-досл. ін-ту мат., 1931, 46 с.
- Шабат Б. В. Теория функций комплексного переменного в Московском университете за 50 лет.— Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех., 1967, № 6, стр. 16—23.
- Шолов Г. Е. К истории развития функционального анализа на Украине.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. ГИТТЛ, М., 1956, стр. 427—476.
- Штокало Й. З. Достижения математических наук в Академии наук УРСР за 30 років Радянської влади.— Вісн. АН УРСР, 1947, № 8, стор. 64—88.
- Штокало Й. З. Нарис розвитку математики на Україні за 40 років Радянської влади. Вид-во АН УРСР, К., 1958, 81 с.
- Штокало Й. З. Розвиток природничих наук в університеті (математика).— У кн.: Історія Київського університету. Вид-во Київськ. ун-ту, К., 1959, стор. 401—419.
- Штокало И. З., Погребынский И. Б. Жизнь и научная деятельность Г. Ф. Вороного.— В кн.: Вороной Г. Ф. Собр. соч. в трех томах. Т. 3. Изд-во АН УССР, К., 1953, стр. 263—302.
- Эфендиев М. Р., Джавадов М. А. К истории развития высшего математи-

- ческого образования и математики в Советском Азербайджане.— Уч. зап. Азерб. ун-та. Сер. физ.-мат. наук, 1967, № 3, стр. 3—15.
- Ю с у п о в Н. В. Очерки по истории развития арифметики на Ближнем Востоке. Татиздат, Казань, 1932, 119 с.
- Ю ш к е в и ч А. П. Исследования по истории математики в странах Востока в средние века: итоги и перспективы.— В кн.: Труды Международного конгресса математиков (Москва, 1966 г.). «Мир», М., 1968, стр. 664—680.
- Ю ш к е в и ч А. П. История математики в России до 1917 года. «Наука», М., 1968, 591 с.
- Ю ш к е в и ч А. П. История математики в средние века. Физматгиз, М., 1961, 448 с.
- Ю ш к е в и ч А. П. О новых работах в СССР по истории математики.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 11. Физматгиз, М., 1958, стр. 11—46.
- Ю ш к е в и ч А. П. О развитии понятия функции.— В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 17. «Наука», М., 1966, стр. 123—150.
- Я н о в с к а я С. А. О математических рукописях Маркса.— Под знаменем марксизма, 1933, № 1, стр. 74—115.
- Я н о в с к а я С. А. Предисловие. Описание математических рукописей. Приложение. Примечания.— В кн.: М а р к с К. Математические рукописи. «Наука», М., 1968, стр. 3—22, 241—512, 563—600, 603—629.

СОВЕТСКИЕ МАТЕМАТИКИ

(Краткий биографический словарь)

В словаре собраны биографические сведения о советских математиках и ученых смежных специальностей (физика, механика и др.), работающих также в области математики. В настоящее время число исследователей в области математики составляет около 10 000. В связи с ограниченностью объема книги в словаре даны сведения лишь об академиках, членах-корреспондентах Академии наук СССР и академий наук союзных республик, докторов наук и профессорах (около 1000 статей).

Словарь составлен на основе опросных листков, посылавшихся ученым, и данных, полученных из научных и учебных институтов, архивов. Сведения проверялись и дополнялись по изданиям «Математика в СССР за 30 лет», «Математика в СССР за 40 лет», а также по архиву анкет сборника «Математика в СССР. 1958—1967» в издательстве «Наука». Словарь не претендует на полноту, в нем приведены сведения, которыми располагала редколлегия.

Статьи помещены по алфавиту. Все даты в словаре даны по новому стилю. Места рождения указаны в наименовании, соответствующем тому времени, о котором идет речь; в случаях небольших городов указано их новое наименование и название области или республики, при названиях сел, деревень и других населенных пунктов — административная единица (область или республика), на территории которой находится данный пункт. Учебные заведения и организации названы соответственно историческому периоду; если они были переименованы в течение описываемого времени, дано новое название. В конце каждой статьи в скобках указаны основные направления научной деятельности ученого.

Для экономии места в словаре применены условные сокращения. Основные из них следующие:

автом.— автоматика, автоматизация
адъюнкт.— адъюнктура
акад.— академик, академия
асп.— аспирантура
астрон.— астрономический
всесоюзн.— всесоюзный
вычисл. техн.— вычислительная техника
выш.— высший
ВЦ — вычислительный центр
г.— город
геогр.— географический
горн.— горный
д.— деревня
докт.— докторантура
засл. д. н.— заслуженный деятель науки
засл. д. н. и т.— заслуженный деятель науки и техники

ИНО—Институт народного образования
канд. пед. н. — кандидат педагогических наук
канд. техн. н.— кандидат технических наук
канд. физ.-мат. н.— кандидат физико-математических наук
машиностр.— машиностроение, машиностроительный
мат.— математика, математический
мех.— механика, механический
Мин-во — министерство
н.— ныне
нац.— национальный
НИИ — научно-исследовательский институт
ок.— окончил

политехн.— политехнический
 пос.— поселок
 приборостр.— приборостроительный
 прикл.— прикладной
 пром.— промышленность
 проф.— профессор
 р.— родился
 с.— село
 СО АН СССР—Сибирское отделение
 АН СССР
 с. х.— сельское хозяйство
 с.-х.— сельскохозяйственный
 стан.— станица
 строит.— строительство
 текст.— текстильный
 телемех.— телемеханика

теор.— теоретический
 техн.— техника, технический
 технол.— технологический
 точ.— точный
 трансп.— транспорт
 уч.— учился
 уч-ще — училище
 физ.— физика, физико-, физический
 фил.— филиал
 филос.— философский
 фин.-экон.— финансово-экономический
 хим.— химия, химико-, химический
 хут.— хутор
 чл.— член
 чл.-корр.— член-корреспондент
 электрон.— электронный

АБАС-ЗАДЕ Абаскули Агабала оглы (10.IV 1906, г. Тавриз — 18.II 1969), ок. Азерб. ун-т (1930), канд. физ.-мат. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1953), чл.-корр. АПН СССР (1957), с 1934 работал в Азерб. пед. ин-те (прикладная математика, физика).

АВАЗАШВИЛИ Давид Захарьевич (р. 16.IX 1911, с. Кварели, н. г. Кварели ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1937), д-р физ.-мат. н. (1957), проф. (1959), в 1937—1956 работал в Тбил. ин-те инж. ж.-д. трансп., с 1956 работает в Моск. пед. ин-те (уравнения математической физики, теория функций комплексного переменного).

АВДЕЕВ Николай Яковлевич (р. 15.XII 1912, хут. Дарганов, н. Волгоград. обл.), ок. Ростов. пед. ин-т (1940), асп. Ростов. ун-та (1943), канд. физ.-мат. н. (1944), д-р техн. н. (1966), проф. (1966), с 1940 работает в Ростов. ун-те (дифференциальные уравнения, математический анализ).

АГРАНОВИЧ Михаил Семенович (р. 4.I 1931, Москва), ок. Моск. ун-т (1953), асп. там же (1958), канд. физ.-мат. н. (1959), д-р физ. мат. н. (1967), в 1953—1960 работал в мат. ред. ИЛ, 1960—1962 — во Всесоюзн. заочн. машиностр. ин-те, с 1962 работает в Моск. ин-те электрон. машиностр. (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения).

АГРОНОВ Николай Александрович (24.X 1886, Рига — 23.IV 1929), ок. Петерб. ун-т, проф., в 1919 — 1923 работал в Кубанск. политехн. ин-те и Ставрополь. с.-х. ин-те, с 1923 — в Дальневост. ун-те (алгебра).

АДАМОВ Алексей Алексеевич (1878—1927), проф., работал в Петерб. политехн. ин-те и Ин-те инж. путей сообщ. (математический анализ).

АДО Игорь Дмитриевич (р. 17.I 1910, Казань), ок. Казан. ун-т (1931), асп. там же (1934), канд. физ.-мат. н. (1936), д-р физ.-мат. н. (1939), проф. (1939), засл. д. н. и т. ТССР (1955), в 1931—1941 работал в Казан. ун-те, с 1935 работает в Казан. хим.-технол. ин-те (алгебра).

АДЯН Сергей Иванович (р. 1.I 1931, с. Куши, н. АзССР), ок. Моск. пед. ин-т (1952), асп. там же (1955), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1963), с 1960 работает в Мат. ин-те АН СССР и Моск. ун-те (теория алгоритмов, алгебра).

АЗБЕЛЕВ Николай Викторович (р. 15.IV 1922, с. Базово Псков. обл.), ок. Моск. авиац. ин-т (1947), асп. Моск. станко-инструмент. ин-та (1954), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1963), в 1954—1966 работал в Ижевск. мех. ин-те, с 1966 работает в Тамбов. ин-те хим. машиностр. (дифференциальные уравнения, приближенные и численные методы).

АЗЛЕЦКИЙ Сергей Павлович (р. 2.X 1904, Пермь), ок. Перм. ун-т (1927), канд. физ.-мат. н. (1941), проф. (1966), с 1957 работает в Уральск. электромех. ин-те инж. ж.-д. трансп. (алгебра).

АЙЗЕРМАН Марк Аронович (р. 7.VI 1913, г. Двинск, н. г. Даугавпилс ЛатвССР), ок. Моск. высш. техн. уч-ще (1937), д-р техн. н. (1947), проф. (1955), лауреат Ленинск. премии (1964), засл. д. н. и т. РСФСР (1965), с 1939 работает в Ин-те

- автом. и телемех. АН СССР, с 1953 — также в Моск. физ.-техн. ин-те (дифференциальные уравнения, теория автоматического регулирования).
- АКИВИС** Макс Айзикович (р. 5.I 1923, Новосибирск), ок. Моск. ун-т (1951), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1966), в 1956—1960 работал в Тульск. мех. ин-те, с 1960 работает в Моск. ин-те стали и сплавов (геометрия, теория поверхностей).
- АЛЕКСАНДРОВ** Авраам Яковлевич (р. 27.IV 1915, Житомир), ок. Ростов. ин-т ж.-д. трансп. (1939), асп. там же (1941), д-р техн. н. (1948), проф. (1948), засл. д. н. и т. РСФСР (1966), с 1948 работает в Новосиб. ин-те инж. ж.-д. трансп. (алгебра, теория функций комплексного переменного).
- АЛЕКСАНДРОВ** Александр Данилович (р. 5.VIII 1912, д. Волынь, н. Рязан. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1933), канд. физ.-мат. н. (1935), д-р физ.-мат. н. (1937), проф. (1937), чл.-корр. АН СССР (1946), акад. АН СССР (1964), лауреат Междунар. премии им. Н. И. Лобачевского (1951), Гос. премии (1942), в 1932—1963 работал в Ленингр. ун-те (с 1952—ректор) и Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, с 1964 работает в СО АН СССР и Новосиб. ун-те (геометрия, дифференциальные уравнения в частных производных, теория чисел, вариационное исчисление, топология, история математики).
- АЛЕКСАНДРОВ** Игорь Александрович (р. 11.V 1932, Новосибирск), ок. Томск. ун-т (1954), асп. там же (1957), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1965), с 1958 работает в Томск. ун-те (теория функций комплексного переменного).
- АЛЕКСАНДРОВ** Павел Сергеевич (р. 7.V 1896, г. Богородск, н. г. Ногинск Моск. обл.), ок. Моск. ун-т (1917), проф. (1928), чл.-корр. АН СССР (1929), д-р физ.-мат. н. (1934), акад. АН СССР (1953), лауреат Гос. премии (1943), Герой Соц. Труда (1969), иностр. чл. Геттинген. АН (1945), Нац. АН (США) (1947), Амер. филос. о-ва (1947), чл.-корр. Герм. АН (1951), действ. чл. Польск. АН (1959), с 1921 работает в Моск. ун-те, в 1932—1964 — президент Моск. мат. о-ва (топология, геометрия, теория функций действительного переменного, вариационное исчисление, функциональный анализ, математическая логика и основания математики, история математики).
- АЛЕКСАНДРЯН** Рафаэль Арамович (р. 29.III 1923, г. Александрополь, н. г. Ленинакан АрмССР), ок. Ереван. ун-т (1945), асп. Моск. ун-та (1948), канд. физ.-мат. н. (1949), ок. докт. Мат. ин-та АН СССР, д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1966), чл.-корр. АН АрмССР (1965), в 1954—1960 работал в Ереван. ун-те, с 1959 работает в ВЦ АН АрмССР (директор), с 1963 — также в Ин-те мат. и мех. АН АрмССР, с 1966 — также в Ереван. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, функциональный анализ).
- АЛЕКСЕЕВ** Анатолий Семенович (р. 12.X 1928, д. Алексеевка, н. Псков. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1952), асп. там же (1955), д-р физ.-мат. н. (1966), в 1955—1963 работал в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, с 1963 работает в ВЦ СО АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных, математическое программирование).
- АЛЕКСЕЕВ** Виссарион Григорьевич (1866—1943), ок. Моск. ун-т (1888), магистр чист. мат. (1893), проф. (1893), д-р чист. мат. (1899), в 1895—1918 работал в Юрьев. ун-те (1909—1914 и 1917—1918 — ректор), с 1918 — в Воронеж. ун-те (теория вероятностей и математическая статистика).
- АЛЕКСИДЗЕ** Мераб Александрович (р. 8.XII 1930, Тбилиси), ок. Тбил. ун-т (1955), асп. Ин-та точ. мех. и вычисл. техн. АН СССР (1958), канд. физ.-мат. н. (1958), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1967), с 1958 работает в ВЦ АН ГрССР и Тбил. НИИ средств автом. (дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные вычисления, прикладная математика).
- АЛЕНИЦЫН** Юрий Евгеньевич (р. 19. IV 1912, Петербург), ок. Ленингр. ун-т (1937), асп. там же (1941), канд. физ.-мат. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1958), проф. (1960), с 1947 работает в Ленингр. ин-те точ. мех. и оптики и Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР (теория функций комплексного переменного).
- АЛЬМУХАМЕДОВ** Мазит Ифатович (р. 5.IX 1904, Уральск), ок. Казан. ун-т (1934), асп. там же (1936), д-р физ.-мат. н. (1950), проф. (1950), с 1935 работает в Казан. пед. ин-те (дифференциальные уравнения).
- АЛЬПЕР** Семен Яковлевич (р. 31.VII 1913, Ростов-на-Дону), ок. Ростов. пед. ин-т (1934), асп. Ростов. ун-та (1937), канд. физ.-мат. н. (1938), д-р физ.-мат.

- н. (1966), проф. (1967), с 1937 работает в Ростов. ун-те (теория функций комплексного переменного).
- АМЕНЗАДЕ Юсуф Аменович** (р. 18.II 1914, Баку), ок. Азерб. индустр. ин-т (1938), канд. техн. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1959), проф. (1961), чл.-корр. АН АзССР (1968), работает в Азерб. ун-те и Ин-те мат. и мех. АН АзССР (прикладная математика, теория упругости).
- АНДРЕЕВ Константин Алексеевич** (14.III 1848, Москва — 29.X 1921), ок. Моск. ун-т (1871), магистр. чист. мат. (1875), д-р чист. мат. (1879), проф. (1885), чл.-корр. Петерб. АН (1884), в 1873—1898 работал в Харьк. ун-те, с 1899 — в Моск. ун-те (геометрия).
- АНДРОНОВ Александр Александрович** (11.IV 1901, Москва — 31.X 1952), ок. Моск. ун-т (1925), асп. там же (1929), д-р физ.-мат. н., проф. (1931), акад. АН СССР (1946), с 1931 работал в Горьк. ун-те (дифференциальные уравнения и их приложения).
- АНДРОНОВ Иван Кузьмич** (р. 3.VI 1894, г. Новосиль, н. Орловск. обл.), ок. Моск. пед. ин-т (1818), проф. (1925), канд. пед. н. (1934), чл.-корр. АПН СССР (1957), засл. д. н. РСФСР (1964), с 1920 работает в АПН СССР, с 1931 — также в Моск. обл. пед. ин-те (методика математики, история математики).
- АНДРУНАКИЕВИЧ Владимир Александрович** (р. 3.IV 1917, Петроград), ок. Ясск. ун-т (Румыния, 1940), асп. Моск. ун-та (1946), канд. физ.-мат. н. (1947), д-р физ.-мат. н. (1958), акад. АН МССР (1961), в 1953—1961 работал в Моск. хим.-технол. ин-те, с 1961 работает в АН МССР (алгебра).
- АНОСОВ Дмитрий Викторович** (р. 30.XI 1936, Москва), ок. Моск. ун-т (1958), асп. Мат. ин-та АН СССР (1961), канд. физ.-мат. н. (1961), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1961 работает в Мат. ин-те АН СССР, с 1968 — также в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения).
- АНТОНОВСКИЙ Михаил Яковлевич** (р. 20.II 1932, Одесса), ок. Средаз. ун-т (1954), асп. Ин-та мат. и мех. УзССР (1957), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1965), работает в Ташкент. политехн. ин-те (топология).
- АППЕЛЬРОТ Герман Германович** (1866—1943), ок. Моск. ун-т (1889), проф., работал в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения, прикладная математика).
- АРЕШКИН Георгий Яковлевич** (р. 18.V 1916, Тифлис), ок. Тбил. ун-т (1941), асп. Тбил. мат. ин-та АН ГрССР (1945), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1954), в 1945—1953 работал в Тбил. мат. ин-те АН ГрССР, с 1953 работает в вузах Ленинграда (топология, алгебра).
- АРЖАНЫХ Иван Семенович** (р. 24.II 1914, с. Брусилов, н. Житомир. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1935), д-р физ.-мат. н. (1955), проф. (1956), чл.-корр. АН УзССР (1960), засл. д. н. и т. УзССР (1964), в 1936—1960 работал в Средаз. ун-те, с 1960 работает в Ин-те мат. АН УзССР (дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, приближенные и численные методы).
- АРИФХАНОВА Мапура** (р. 10.III 1917, Чимкент), ок. Средаз. ун-т (1940), асп. там же (1944), канд. физ.-мат. н. (1947), д-р геогр. н. (1966), с 1943 работает в Ташкент. политехн. ин-те (методика математики).
- АРНОЛЬД Владимир Игоревич** (р. 12.VI 1937, Одесса), ок. Моск. ун-т (1959), асп. там же (1961), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1965), лауреат Ленинск. премии (1965), с 1961 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения, функциональный анализ, теория функций действительного переменного).
- АРНОЛЬД Игорь Владимирович** (19.III 1900, Харьков — 20.X 1948), ок. Моск. ун-т (1929), д-р пед. н. (1942), проф. (1943), чл.-корр. АПН РСФСР (1947), в 1930—1947 работал в Моск. ун-те (теория чисел).
- АРТОВОЛЕВСКИЙ Иван Иванович** (р. 9.X 1905, Москва), ок. Моск. с.-х. акад. им. К. А. Тимирязева (1926), проф. (1932), д-р техн. н. (1936), акад. АН СССР (1946), лауреат премии им. П. Л. Чебышева (1946), Герой Соц. Труда (1969), иностр. чл. Сербск. АН (1965), в 1931—1948 работал в Моск. ун-те, с 1937 работает в Ин-те машиновед. АН СССР, с 1941 — также в Моск. авиац. ин-те, с 1966 — председатель правления Всесоюзн. о-ва «Знание» (механика, теория механизмов и машин, кинематическая геометрия).
- АРУТЮНЯН Нагуш Хачатурович** (р. 23.XI 1912, Эривань, н. Ереван), ок. Моск. высш. в.-инж. акад. (1936), д-р техн. н. (1948), проф. (1949), акад. АН АрмССР (1950), в 1945—1950 работал в Секторе мат. и мех. АН АрмССР, с 1950 работает

- в Ереван. ун-те, с 1956—также в Ин-те мат. и мех. АН АрмССР (математическая физика, прикладная математика).
- АРХАНГЕЛЬСКИЙ** Александр Владимирович (р. 13.III 1938, Москва), ок. Моск. ун-т (1959), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1961 работает в Моск. ун-те (топология).
- АРХАНГЕЛЬСКИЙ** Юрий Александрович (р. 27.IV 1929, Москва), ок. Моск. ун-т (1952), асп. там же (1955), канд. физ.-мат. н. (1956), д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1967), с 1961 работает в Моск. ун-те (прикладная математика, механика).
- АХИЕЗЕР** Наум Ильич (р. 6.III 1901, г. Чериков, н. Могилев. обл.), ок. Киев. ИНО (1923), асп. там же (1928), чл.-корр. АН УССР (1934), д-р физ.-мат. н. (1936), проф. (1940), лауреат премии им. П. Л. Чебышева (1952), в 1928—1933 работал в Киев. ун-те и Киев. авиац. ин-те, 1933—1941 — в Харьк. ун-те, 1941—1943 — в Алма-Атинск. горн. ин-те, 1943—1947 — в Моск. энергетич. ин-те, с 1947 работает в Харьк. ун-те (теория функций, аэродинамика, функциональный анализ, интегральные уравнения, приближенные и численные методы, история математики).
- АХМЕДОВ** Кошкар Теймур оглы (р. 25.X 1917, с. Соютли, н. АзССР), ок. Азерб. ун-т (1941), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1961), с 1956 работает в Азерб. ун-те (функциональный анализ, интегро-дифференциальные уравнения).
- АХУНД-ЗАДЕ** Мамед-Юсуф Алескер оглы (р. 13.X 1909, с. Долляр, н. АзССР), ок. Азерб. индустр. ин-т (1933), д-р техн. н. (1957), проф. (1957), с 1934 работает в Азерб. с.-х. ин-те (теория оболочек).
- БАБЕНКО** Константин Иванович (р. 21.VII 1919, Брянский рудник, н. Ворошиловград. обл.), ок. Харьк. ун-т (1941), В.-возд. инж. акад. (1945), адъюнкт. там же д-р физ.-мат. н. (1952), проф. (1958), лауреат Гос. премии (1967), работает в Ин-те прикл. мат. АН СССР (теория функций, дифференциальные уравнения в частных производных, функциональный анализ, приближенные и численные методы, газовая динамика).
- БАБИЧ** Василий Михайлович (р. 13.VI 1930, Ленинград), ок. Ленингр. ун-т (1952), асп. там же (1954), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1965), с 1953 работает в Ленингр. ун-те (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных).
- БАБУКОВ** Александр Георгиевич (р. 22.III 1913, Новочеркасск, н. Ростов. обл.), ок. Грознен. нефт. ин-т (1936), д-р техн. н. (1954), проф. (1954), засл. д. н. и т. ЧИАССР (1958), в 1936—1962 работал в Грознен. НИИ нефти (1943—1962—директор), с 1963 работает во Всесоюзн. нефтегаз. НИИ (дифференциальные уравнения в частных производных).
- БАВРИН** Иван Иванович (р. 20.IX 1932, г. Вязьма Смоленск. обл.), ок. Моск. обл. пед. ин-т (1956), асп. там же (1959), канд. физ.-мат. н. (1959), д-р физ.-мат. н. (1967), проф. (1969), с 1959 работает в Моск. обл. пед. ин-те (теория функций комплексного переменного).
- БАДАЛЯН** Гайк Вагаршакович (р. 22.VI 1915, с. Тазагюх, н. АрмССР), ок. Ереван. ун-т (1941), асп. Моск. ун-та (1947), д-р физ.-мат. н. (1957), проф. (1960), с 1957 работает в Ереван. ун-те (теория функций).
- БАЗИЛЕВИЧ** Иван Евгеньевич (р. 29.XI 1904, с. Годуновка, н. Сумск. обл.), ок. Электромашиностр. ин-т (1927), Моск. ун-т (1930), асп. там же (1935), д-р физ.-мат. н., проф. (1950), в 1935—1938 работал в Саратов. ун-те, 1938—1942 — в Моск. текст. ин-те и Моск. обл. пед. ин-те, 1942—1950 — в Моск. авиац. ин-те, 1950—1952 — во Всесоюзн. заочн. машиностр. ин-те, с 1951 работает в Моск. ин-те стали и сплавов (теория функций комплексного переменного, программирование).
- БАКЕЛЬМАН** Илья Яковлевич (р. 30.XI 1928, Ленинград), ок. Ленингр. ун-т (1951), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1963), в 1951—1955 работал в Ленингр. технол. ин-те, с 1955 работает в Ленингр. пед. ин-те (дифференциальные уравнения в частных производных, геометрия, приближенные и численные методы).
- БАЛАБУХ** Лев Иванович (р. 22.VIII 1910, с. Красные Буйцы, н. Тульск. обл.), ок. Моск. ун-т (1932), д-р техн. н. (1960), проф. (1962), работает в ЦАГИ и Моск. высш. техн. уч-ще (математические методы в механике).
- БАНАХ** Степан Степанович (20.III 1892, Краков — 31.VIII 1945), ок. Львов. по-

- литехн. ин-т (1914), д-р филос. (1920), проф. (1924), чл.-корр. Польск. АН (1924), депутат Львов. гор. Совета депутатов трудящихся (1939, 1944, 1945), с 1920 работал во Львов. ун-те (функциональный анализ).
- БАРБАН** Марк Борисович (22.VI 1935, г. Славута, н. Хмельницк. обл. — 17.VII 1968), ок. Ташкент. ун-т (1958), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р физ.-мат. н. (1965), проф. (1968), с 1960 работал в Ин-те мат. АН УзССР (теория чисел.)
- БАРБАШИН** Евгений Алексеевич (17.I 1918, з-д Уинск, н. Перм. обл. — 5.VII 1969), ок. Уральск. ун-т (1940), асп. Уральск. ун-та (1943), канд. физ.-мат. н. (1943), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1951), акад. АН БССР (1966), в 1941—1943 работал в Уральск. ун-те, 1943—1959 — в Уральск. политехн. ин-те, 1959—1961 — в Уральск. фил. АН СССР, 1961—1966 — в Свердловск. отд. Мат. ин-та АН СССР, с 1966 — в Ин-те мат. АН БССР (дифференциальные уравнения и их приложения, вариационное исчисление, теория автоматического управления).
- БАРЕНБЛАТТ** Григорий Исаакович (р. 10.VII 1927, Москва), ок. Моск. ун-т (1950), проф. (1962), д-р физ.-мат. н. (1967), в 1953—1961 работал в Ин-те нефти АН СССР, с 1961 работает в Моск. ун-те, с 1965 — также в Ин-те проблем мех. АН СССР (уравнения в частных производных, математические методы в механике).
- БАРИ** Нина Карловна (19.XI 1901, Москва — 15.VII 1961), ок. Моск. ун-т (1921), асп. там же (1925), канд. физ.-мат. н. (1926), проф. (1934), д-р физ.-мат. н. (1935), член Франц. и Польск. мат. о-в (1927), в 1921—1925 работала в Моск. лесотехн. ин-те, с 1926 — в Моск. ун-те (теория функций, математический анализ, функциональный анализ).
- БАУТИН** Николай Николаевич (р. 26.XII 1908, Нижний Новгород), ок. Горьк. пед. ин-т (1933), асп. Горьк. ун-та (1941), д-р техн. н. (1957), проф. (1957), с 1935 работает в Горьк. ин-те инж. водн. трансп., в 1943—1960 работал в Горьк. научн.-исслед. физ.-техн. ин-те (дифференциальные уравнения).
- БАХВАЛОВ** Николай Сергеевич (р. 29.V 1934, Москва), ок. Моск. ун-т (1955), канд. физ.-мат. н. (1958), д-р физ.-мат. н. (1964), с 1957 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения, приближенные и численные методы).
- БАХВАЛОВ** Сергей Владимирович (26.VIII 1898, Москва — 30.IX 1963), ок. Моск. ун-т (1925), проф. (1935), д-р физ.-мат. н. (1940), с 1930 работал в Моск. ун-те (геометрия, номография).
- БАХТИН** Иван Алексеевич (р. 19.XI 1933, с. Островки Воронеж. обл.), ок. Воронеж. ун-т (1955), асп. там же (1958), канд. физ.-мат. н. (1959), д-р физ.-мат. н. (1967), проф. (1968), с 1958 работает в Воронеж. пед. ин-те (функциональный анализ, программирование).
- БАХШИЯН** Фомберг Айрапетович (р. 1.I 1913, с. Чертаз, н. АзССР), ок. Моск. ун-т (1938), асп. там же (1941), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1953), с 1953 работает во Всесоюзн. заочн. политехн. ин-те (дифференциальные уравнения).
- БАШМАКОВА** Изабелла Григорьевна (р. 3.I 1921, Ростов-на-Дону), ок. Моск. ун-т (1944), канд. физ.-мат. н. (1948), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1962), чл.-корр. Междунар. акад. ист. наук (1968), с 1944 работает в Моск. ун-те (история математики).
- БЕБИАШВИЛИ** Шота Леонтьевич (р. 1.VII 1914, г. Хашури, н. ГрССР), ок. Закавказ. ин-т инж. связи (1938), д-р физ.-мат. н. (1964), почетн. радист СССР (1960), с 1948 работает в Тбил. ун-те (прикладная математика).
- БЕЗИКОВИЧ** Яков Самойлович (17.VII 1886, г. Бердянск, н. Запорож. обл. — 23.VII 1958), ок. Петрогр. ун-т (1915), д-р физ.-мат. н. (1943), проф., в 1929—1941 работал в Ленингр. ун-те, с 1937 — в Ленингр. текст. ин-те (приближенные и численные методы).
- БЕЗСОНОВ** Павел Александрович (р. 11.VII 1889, Казань), ок. Казан. ун-т (1915), канд. физ.-мат. н. (1935), проф. (1938), чл. Франц. мат. о-ва (1929), с 1919 работает в Казан. политехн. ин-те (теория функций комплексного переменного).
- БЕЛИНСКИЙ** Павел Петрович (р. 23.IX 1928, г. Мелитополь Запорож. обл.), ок. Львов. ун-т (1951), асп. там же (1954), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1961), в 1954—1957 работал во Львов. ун-те, с 1957 работает в Мат. ин-те СО АН СССР (теория функций комплексного переменного).

- БЕЛОНОВСКИЙ** Петр Дмитриевич (2.I 1886, Москва — 18.II 1947), ок. Киев. ун-т (1913), проф. (1928), в 1926—1935 работал в Вятск. пед. ин-те, с 1935 — в Ленингр. гидрограф. ин-те Главсевморпути (алгебра).
- БЕЛОНОСОВ** Сергей Михайлович (р. 14.VIII 1923, д. Белоносово, н. Свердловск. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1946), асп. там же (1949), канд. физ.-мат. н. (1949), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1963), в 1949—1953 работал в Воронеж. ун-те, 1953—1958 — в Рязан. радиотехн. ин-те, 1958 — 1964 — в Ин-те мат. СО АН СССР, 1964—1967 — в АН БССР, с 1967 работает в Киев. ун-те (дифференциальные и интегральные уравнения, теория упругости).
- БЕЛОУСОВ** Валентин Данилович (р. 20.II 1925, г. Бельцы, н. МССР), ок. Кишинев. пед. ин-т (1947), асп. Моск. ун-та (1956), канд. физ.-мат. н. (1958), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1963 работает в Ин-те мат. АН МССР и Кишинев. ун-те (алгебра).
- БЕРЕЗАНСКИЙ** Юрий Макарович (р. 8.V 1925, Киев), ок. Киев. ун-т (1948), асп. Ин-та мат. АН УССР (1951), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1956), проф. (1960), чл.-корр. АН УССР (1964), с 1951 работает в Ин-те мат. АН УССР (функциональный анализ, дифференциальные уравнения).
- БЕРЕЗИН** Иван Семенович (р. 26.IX 1920, д. Небылицы, н. Киров. обл.), ок. Моск. ун-т (1944), асп. там же (1947), канд. физ.-мат. н. (1947), проф. (1964), с 1945 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные и численные методы).
- БЕРЕЗИН** Феликс Александрович (р. 25.IV 1931), ок. Моск. ун-т (1953), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1956 работает в Моск. ун-те (алгебра, функциональный анализ).
- БЕРЛЯНД** Марк Евсеевич (р. 28.X 1919, г. Канев, н. Черкасск. обл.), ок. Свердловск. ун-т (1942), д-р физ.-мат. н. (1955), проф. (1959), в 1956—1961 работал в Ленингр. гидрометеоролог. ин-те, с 1942 работает в Главн. геофиз. обсерватории (дифференциальные уравнения в частных производных, численные методы прогноза).
- БЕРМАН** Давид Львович (р. 21.XII 1918, г. Бердичев, н. Житомир. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1945), асп. там же (1948), канд. физ.-мат. н. (1948), д-р физ.-мат. н. (1966), в 1950—1958 работал в Новгород. пед. ин-те, 1958—1961 — в вузах Ленинграда, с 1961 работает в Ленингр. ин-те сов. торговли (теория функций).
- БЕРМАН** Самуил Давидович (р. 3.I 1922, г. Сновск, н. г. Щорс Чернигов. обл.), ок. Львов. ун-т (1949), асп. там же (1952), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1964), с 1952 работает в Ужгород. ун-те (алгебра, дифференциальные уравнения в частных производных).
- БЕРМАНТ** Анисим Федорович (27.VI 1904, г. Юзовка, н. Донецк—26.V 1959), ок. Донск. ун-т (1925), асп. Моск. ун-та (1931), проф. (1933), д-р физ.-мат. н. (1941), в 1932—1950 работал в вузах Москвы, 1950—1953 во Всесоюзн. заочн. энергетич. ин-те, с 1952 — в Моск. инж.-строит. ин-те (теория функций комплексного переменного, дифференциальные и интегральные уравнения, математический анализ, методика преподавания математики, история математики).
- БЕРНШТЕЙН** Сергей Натанович (5.III 1880, Одесса—26.X 1968), ок. Париж. ун-т (1899), Париж. высш. электротехн. школу (1901), магистр чист. мат. (1908), д-р мат. (1904, Париж), проф. (1907), д-р чист. мат. (1914), акад. АН УССР (1925), чл.-корр. АН СССР (1925), акад. АН СССР (1929), иностр. чл. Париж. АН (1955), лауреат Гос. премии (1941), в 1907—1908 работал на Петерб. высш. женск. политехн. курсах, 1908—1918 — на Харьк. высш. женск. курсах, 1908—1933 — в Харьк. ун-те, 1933—1941 — в Ленингр. ун-те и политехн. ин-те, с 1935 — в Мат. ин-те АН СССР (теория функций, теория вероятностей и математическая статистика, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, функциональный анализ, геометрия).
- БЕСОВ** Олег Владимирович (р. 27.V 1933, Москва), ок. Моск. ун-т (1955), асп. там же (1958), канд. физ.-мат. н. (1960), д-р физ.-мат. н. (1967), с 1958 работает в Мат. ин-те АН СССР и Моск. физ.-техн. ин-те (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, функциональный анализ).

- БИРГЕР Исаак Аронович (р. в 1918), ок. Моск. высш. техн. уч-ще, д-р техн. н. (интегральные уравнения, прикладная математика и механика).
- БИРМАН Михаил Шлемович (р. 17.I 1928, Ленинград), ок. Ленингр. ун-т (1950), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1965), с 1956 работает в Ленингр. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, функциональный анализ, приближенные и численные методы).
- БИРМАН Соломон Евсеевич (Шлиома-Давид Овсеевич, р. 30.VI 1899, м. Бешенковичи, н. Витебск. обл.), ок. Ленингр. политехн. ин-т (1925), д-р техн. н. (1951), проф. (1952), с 1938 работает в Ленингр. технол. ин-те холодильной пром. (прикладная математика, теория упругости).
- БИРЮКОВ Борис Владимирович (р. 19.VII 1922, г. Екатеринодар, н. Краснодар), ок. Моск. пед. ин-т (1948), Моск. ун-т (1950), асп. там же (1958), д-р филос. н. (1966), в 1958—1960 работал в Физматгизе, 1960—1962 в Моск. ун-те, с 1962 работает в Научн. совете по кибернетике при Президиуме АН СССР (математическая логика и основания математики).
- БИЦАДЗЕ Андрей Васильевич (р. 22.V 1916, с. Цхруквети, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1940), д-р физ.-мат. н. (1951), проф., чл.-корр. АН СССР (1958), в 1948—1959 работал в Мат. ин-те АН СССР, с 1959 работает в СО АН СССР (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, гидроаэромеханика).
- БЛАНК Яков Павлович (р. 20.IX 1903, г. Либава, н. г. Лиепая ЛатвССР), ок. Харьк. ИНО (1926), асп. Всеукр. ин-та мат. и мех. (1929), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1951), с 1931 работает в Харьк. ун-те (геометрия).
- БЛОХ Эфройм Леонтьевич (р. 14.XII 1915, г. Ковно, н. Каунас ЛитССР), ок. Ленингр. политехн. ин-т (1938), д-р техн. н. (1948), проф. (1955), в 1938—1952 работал в ЦАГИ, с 1953 работает в Моск. электротехн. ин-те связи (теория функций действительного переменного, теория информации).
- БОГДАНОВ Юрий Станиславович (р. 8.XII 1920, г. Великие Луки, Псков. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1956), канд. физ.-мат. н. (1960), д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1968), в 1956—1958 работал в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, с 1958 работает в Белорус. ун-те и Белорус. политехн. ин-те (дифференциальные уравнения, теория функций действительного переменного, теория систем управления).
- БОГОЛЮБОВ Алексей Николаевич (р. 25.III 1911, г. Нежин, н. Чернигов. обл.), ок. Харьк. ун-т (1936), канд. техн. н. (1962), д-р техн. н. (1965), чл.-корр. АН УССР (1969), с 1958 работает в Киев. инж.-строит. ин-те, с 1962 — также в Секторе ист. естествозн. и техн. Ин-та ист. АН УССР (история математики и механики).
- БОГОЛЮБОВ Николай Николаевич (р. 21.VIII 1909, Нижний Новгород), ок. асп. АН УССР (1926), д-р физ.-мат. н. (1929), проф. (1936), чл.-корр. АН УССР (1939), чл.-корр. АН СССР (1946), акад. АН УССР (1948), акад. АН СССР (1953), лауреат Гос. премии (1947), премии им. М. В. Ломоносова (1957), Ленинск. премии (1958), премии им. Н. М. Крылова (1966), Герой Соц. Труда (1969), засл. д. н. УССР (1970), чл. Амер. акад. искусств и наук (1960), иностр. чл. Болг. АН (1961), чл. Польск. АН (1962), чл. Герм. АН (1963), чл. Нац. АН (США) (1969), в 1934—1958 работал в Киев. ун-те, с 1950 работает в Мат. ин-те АН СССР и Моск. ун-те, с 1957 — также в Объединен. ин-те ядерн. исслед. (с 1964 — директор), с 1966 — также в Ин-те теор. физ. АН УССР (директор), с 1963 — академик-секретарь Отд. мат. АН СССР (дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, теория функций, функциональный анализ, теория чисел, приближенные и численные методы, нелинейная механика, математическая и теоретическая физика, квантовая механика).
- БОГОМОЛОВ Степан Александрович (2.II 1877, с. Бобров, н. Воронеж. обл.—?), проф., с 1899 работал в Ленингр. пед. ин-те и В.-техн. акад. (геометрия, геометрическая кристаллография, история математики).
- БОЕВ Георгий Петрович (25. XI 1898, Саратов — 8.VII 1959), ок. Саратов. ун-т (1924), асп. там же, проф. (1930), канд. физ.-мат. н. (1935), в 1923—1930 и с 1934 работал в Саратов. ун-те, 1930—1934 — в Иванов. текст. ин-те (геометрия, теория функций комплексного переменного, история математики).
- БОКШТЕЙН Меер Феликсович (р. 4.X 1913, Москва), ок. Моск. ун-т (1936), д-р

- физ.-мат. н. (1942), проф. (1947), в 1943—1962 работал в Моск. авиац. технол. ин-те, с 1962 работает в Моск. пед. ин-те (топология, алгебра).
- БОЛГАРСКИЙ Борис Владимирович** (р. 5.VIII 1892, Казань), ок. Казан. ун-т (1917), д-р пед. н. (1957), проф. (1959), засл. д. н. ТАССР (1945), с 1920 работает в Казан. ун-те (история и методика математики).
- БОЛТЯНСКИЙ Владимир Григорьевич** (р. 26.IV 1925, Москва), ок. Моск. ун-т (1948), асп. там же (1951), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1955), проф. (1959), чл.-корр. АПН СССР (1965), лауреат Ленинск. премии (1962), с 1951 работает в Мат. ин-те АН СССР (топология, дифференциальные уравнения, кибернетика).
- БОЛЬ Пирс Георгиевич** (11.X 1865, г. Валка, н. ЛатвССР — 25.XII 1921), ок. Дерпт. ун-т (1887), магистр чист. мат. (1893), д-р чист. мат. (1900), в 1895—1918 работал в Риж. политехн. ин-те, 1918—1921 — в Иванов. политехн. ин-те (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения, механика, астрономия).
- БОЛЬШЕВ Логин Николаевич** (р. 6.III 1922, Москва), ок. Моск. ун-т (1951), асп. там же (1954), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1966), в 1954—1957 работал в Моск. ун-те, с 1957 работает в Ин-те мат. АН СССР (математическая статистика и теория вероятностей).
- БОНДАРЬ Николай Герасимович** (р. 19.XII 1920, Киев), ок. Днепропетр. ин-т инж. ж.-д. трансп. (1943), асп. там же (1949), д-р техн. н. (1954), проф. (1954), с 1946 работает в Днепропетр. ин-те инж. ж.-д. трансп. (приближенные и численные методы, электро моделирование).
- БОРЕВИЧ Зенон Иванович** (р. 7.XI 1922, с. Суслы, н. Житомир. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1947), асп. Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР (1950), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1967), с 1951 работает в Ленингр. ун-те (алгебра, теория чисел).
- БОРИСОВ Юрий Федорович** (р. 15.VI 1925, Ленинград), ок. Ленингр. ун-т (1948), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1962), с 1953 работает в Ленингр. ун-те (геометрия).
- БОРИСОВИЧ Юрий Григорьевич** (р. 30.V 1930, г. Камень, н. Алтайск. край), ок. Казан. ун-т (1953), асп. там же (1955), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1955 работает в Воронеж. ун-те (вариационное исчисление, функциональный анализ, приближенные и численные методы).
- БОРКВЕЛЬ Альберт Александрович** (19.I 1890, д. Вису, н. ЭССР — 14.VII 1963), ок. Петрогр. (1922) и Тартуск. (1929) ун-ты, проф. (1939), канд. физ.-мат. н. (1946), в 1936—1947 работал в Таллин. политехн. ин-те, 1947—1960 — в Таллин. пед. ин-те (математический анализ, геометрия).
- БОРОВКОВ Александр Алексеевич** (р. 6.III 1931, Москва), ок. Моск. ун-т (1954), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), чл.-корр. АН СССР (1966), с 1960 работает в Ин-те мат. СО АН СССР (теория вероятностей и ее применение).
- БОРОДАЧЕВ Николай Максимович** (р. 21.VIII 1928, с. Лопатино, н. Куйбышев. обл.), ок. Куйбышев. инж.-строит. ин-т (1950), асп. Куйбышев. индустр. ин-та, канд. техн. н. (1958), д-р техн. н. (1967), проф. (1967), в 1953—1961 работал в Куйбышев. инж.-строит. ин-те, с 1961 работает в Саратов. политехн. ин-те (прикладная математика, теория упругости).
- БОЧВАР Дмитрий Анатольевич** (р. 7.VIII 1903, Москва), ок. Моск. высш. техн. уч-ще (1924), д-р хим. н. (1950), проф. (1950), с 1953 работает во Всесоюзн. ин-те научн. и техн. информации (математическая логика и основания математики).
- БОЯРСКИЙ Арон Яковлевич** (р. 15.X 1906, г. Либава, н. г. Лиепая ЛатвССР), ок. Моск. ун-т (1926), проф. (1934), д-р экон. н. (1940), засл. д. н. РСФСР (1967), в 1927—1933 работал в Центр. стат. упр. СССР, 1933—1955 — в Моск. экон.-стат. ин-те, с 1955 работает в Моск. ун-те и Центр. стат. упр. СССР (директор НИИ) (дифференциальные уравнения, математическая статистика).
- БРАВИН Евгений Леонидович** (р. 12. II 1885, Пермь), ок. Ленингр. политехн. ин-т (1912), проф. (1921), д-р техн. н. (1939) (прикладная математика и механика).
- БРАДИС Владимир Модестович** (р. 23.XII 1890, Псков), ок. Петрогр. ун-т (1915), проф. (1946), чл.-корр. АПН СССР (1955), д-р пед. н. (1957), засл. д. н. РСФСР

(1957), в 1920—1959 работал в Калинин. пед. ин-те (аналитическая геометрия, математические таблицы).

- БРАЙЦЕВ Иван Романович** (27.I 1870, с. Забелышино, н. Гомель. обл.— 4.I 1947), ок. Моск. ун-т (1896), магистр чист. мат. (1904), проф. (1924), д-р физ.-мат. н. (1935), в 1900—1916 работал в Варшав. политехн. ин-те, 1918—1942 — в Горьк. пед. ин-те, 1918—1947—также в Горьк. ун-те (проективная геометрия, математический анализ, теория функций комплексного переменного).
- БРЕДИХИН Борис Максимович** (р. 18.XII 1920, с. Грачевка, н. Оренбург. обл.), ок. Куйбышев. пед. ин-т (1944), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1965), проф. (1965), с 1945 работает в Куйбышев. пед. ин-те (теория чисел, алгебра).
- БРЖЕЧКА Владимир Фомич** (5.X 1891 — 7.III 1954), ок. Харьк. ун-т (1916), д-р физ.-мат. н. (1940), работал в учебных заведениях Харькова (теория функций действительного переменного).
- БРОДСКИЙ Михаил Самойлович** (р. 19.XI 1913, Одесса), ок. Одесск. ун-т (1936), асп. там же (1939), канд. физ.-мат. н. (1940), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1964), работает в Одесск. пед. ин-те (функциональный анализ).
- БРУДНО Александр Львович** (р. 10.I 1918, г. Подольск, н. Моск. обл.), ок. Моск. ун-т (1941), асп. Моск. пед. ин-та (1949), канд. физ.-мат. н. (1949), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1969), работает в Ин-те электрон. машин АН СССР (теория функций, математический анализ, вычислительная математика, программирование).
- БРУЕВИЧ Николай Григорьевич** (р. 12.XI 1896, Москва), ок. Моск. ун-т (1922), Моск. авиац. ин-т (1930), д-р техн. н. (1937), проф. (1937), акад. АН СССР (1942), с 1929 работает в Ин-те машиновед. АН СССР (автоматика, электронные вычислительные машины).
- БРУК Исаак Семенович** (р. 9.XI 1902), ок. Моск. высш. техн. уч-ще (1925), чл.-корр. АН СССР (1939), работает в Лабор. упр. машин и систем АН СССР и Энергетич. ин-те АН СССР (приближенные и численные методы, автоматика).
- БРЮНО Александр Дмитриевич** (р. 26.VI 1940, Москва), ок. Моск. ун-т (1962), асп. Мат. ин-та АН СССР (1965), канд. физ.-мат. н. (1966), д-р физ.-мат. н. (1968), с 1965 работает в Ин-те прикл. мат. АН СССР (дифференциальные уравнения).
- БУБЛИК Борис Николаевич** (р. 25.I 1936, с. Клюки Винницк. обл.), ок. Киев. ун-т (1958), асп. там же (1961), канд. физ.-мат. н. (1963), д-р физ.-мат. н. (1969), с 1961 работает в Киев. ун-те (прикладная и вычислительная математика).
- БУГРОВ Яков Степанович** (р. 19.XI 1927, с. Кяхта, н. Куйбышев. обл.), ок. Благовещенск. пед. ин-т (1953), асп. Мат. ин-та АН СССР (1956), канд. физ.-мат. н. (1956), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), с 1956 работает в Благовещенск. пед. ин-те (дифференциальные уравнения в частных производных, теория функций).
- БУКРЕЕВ Борис Яковлевич** (5.IX 1859, г. Львов, н. Курск. обл.— 2.X 1962), ок. Киев. ун-т (1882), магистр чист. мат. (1887), д-р чист. мат. (1889), проф. (1889), засл. д. н. УССР (1940), в 1885—1959 работал в Киев. ун-те (геометрия, вариационное исчисление, теория функций).
- БУЛАХ Борис Михайлович** (р. 10.VI 1929, г. Ставрополь), ок. Саратов. ун-т (1951), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), в 1953—1964 работал в Саратов. ун-те, с 1964 работает в Ленингр. электротехн. ин-те связи (дифференциальные уравнения в частных производных).
- БУЛГАКОВ Борис Владимирович** (12.VII 1900, Москва — 29.IV 1952), ок. Моск. ун-т (1928), д-р физ.-мат. н. (1939), проф. (1939), чл.-корр. АН СССР (1946), с 1930 работал в Моск. ун-те (алгебра, дифференциальные уравнения, нелинейная механика).
- БУЛЕЕВ Николай Иванович** (р. 8. IV 1922, д. Борисово, н. Калинин. обл.), ок. Одесск. гидрометеоролог. ин-т (1945), д-р физ.-мат. н. (1964), в 1949—1953 работал в Центр. ин-те прогнозов, с 1953 работает в Обнинск. физ.-энергетич. ин-те (прикладная математика, приближенные и численные методы).
- БУЛЫГИН Владимир Яковлевич** (р. 17.IV 1916, Казань), ок. Казан. ун-т (1939), канд. физ.-мат. н. (1949), д-р техн. н. (1960), проф. (1961), с 1941 работает в Казан. ун-те (прикладная математика, подземная гидродинамика).

- БУНИЦКИЙ Евгений Леонидович** (28.VI 1874, Симферополь — 7.VIII 1952), ок. Новорос. ун-т (1896), д-р чист. мат. (1918), проф. (1918), в 1903—1922 работал в Новорос. ун-те, с 1931 — в Карловом (Прага) ун-те (математическая логика, дифференциальные уравнения).
- БУРСИАН Виктор Робертович** (6.I 1887, Петербург — 15.XII 1945), ок. Петерб. ун-т (1910), д-р физ.-мат. н. (1934), проф., работал в Ленингр. ун-те (теория специальных функций).
- БУРСТИН Целестин Леонович** (1888—1938), акад. АН БССР, с 1929 работал в Белорус. ун-те (дифференциальная геометрия, векторный и тензорный анализ, дифференциальные уравнения).
- БУСЛЕНКО Николай Пантелеймонович** (р. 15.II 1922, г. Ржищев, н. Киев. обл.), ок. Моск. ун-т (1952), д-р техн. н. (1960), проф. (1962), чл.-корр. АН СССР (1967) (теория вероятностей, методика статистического моделирования, кибернетика).
- БУТЕНИН Николай Васильевич** (р. 14.X 1914, Петроград), ок. Горьк. ун-т (1937), асп. там же (1941), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1953), засл. д. н. и т. РСФСР (1966), в 1937—1941 работал в Горьк. пед. ин-те, с 1941 работает в вузах Ленинграда (теория нелинейных колебаний, механика).
- БУХМАН Евгений Николаевич** (26.II 1895, Саратов — 19.I 1953), ок. Моск. ун-т (1925), д-р экон. н. (1951), проф. (1951), в 1932—1941 и с 1944 работал в Центр. НИИ связи, с 1944 — также в Моск. электротехн. ин-те связи (математическая статистика).
- БУХШТАБ Александр Адольфович** (р. 4.X 1905, Ставрополь), ок. Моск. ун-т (1930), проф. (1938), д-р физ.-мат. н. (1944), с 1939 работает в Моск. пед. ин-те (теория чисел).
- БЫКОВ Яков Васильевич** (р. 26.I 1913, д. Торханы, н. ЧАССР), ок. Казан. ун-т (1938), канд. физ.-мат. н. (1947), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1962), чл.-корр. АН КиргССР (1960), засл. д. н. КиргССР (1963), в 1938—1951 работал в Киргиз. пед. ин-те, 1951—1961 — в Киргиз. ун-те, 1961—1966 — в АН КиргССР, с 1966 работает в Краснодар. политехн. ин-те (дифференциальные и интегральные уравнения, функциональный анализ).
- БЫЛОВ Борис Федорович** (р. 6.IV 1923, г. Юхнов, н. Калуж. обл.), ок. Моск. ун-т (1950), асп. там же (1954), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1967), работает в Моск. авиац. технол. ин-те (дифференциальные уравнения).
- БЫХОВСКИЙ Михаил Лазаревич** (р. 7.XII 1918, Харьков), ок. В.-возд. инж. акад. (1941), асп. Ин-та машиновед. АН СССР (1947), канд. техн. н. (1947), д-р техн. н. (1956), проф. (1962), в 1945—1960 работал в Ин-те машиновед. АН СССР, с 1960 работает в Ин-те хирургии АМН СССР (прикладная математика, теория автоматического управления, медицинская кибернетика).
- БЮШГЕНС Сергей Сергеевич** (24.IX 1882, Москва — 29.III 1963), ок. Моск. ун-т (1906), магистр. чист. мат. (1917), проф. (1922), д-р физ.-мат. н. (1935), засл. д. н. РСФСР (1946), в 1906—1953 работал в Моск. ун-те, 1913—1930 — также в Моск. с.-х. акад. им. К. А. Тимирязева, с 1930 — также в Моск. гидромелиорат. ин-те (дифференциальная и кинематическая геометрия).
- ВАГНЕР Виктор Владимирович** (р. 4.XI 1908, Саратов), ок. Моск. ун-т (1930), асп. там же (1935), д-р физ.-мат. н. (1938), проф. (1938), засл. д. н. РСФСР (1959), лауреат премии им. Н. И. Лобачевского (1937), с 1935 работает в Саратов. ун-те (алгебраическая геометрия, дифференциальная геометрия, алгебра).
- ВАЙНБЕРГ Мордухай Моисеевич** (р. 13.IX 1908, м. Жолкевки, н. ПНР), ок. Саратов. ун-т (1930), асп. Моск. ун-та (1939), д-р физ.-мат. н. (1955), проф. (1956), в 1930—1934 работал в Иванов. с.-х. ин-те, 1935—1944 — в Моск. гидрометеоролог. ин-те, с 1944 работает в Моск. обл. пед. ин-те (теория функций действительного переменного, вариационное исчисление, функциональный анализ, интегральные уравнения, геометрия).
- ВАЛЕЕВ Ким Галимович** (р. 29.IV 1936, Москва), ок. Ленингр. ун-т (1958), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1966), в 1960—1966 работал в Ленингр. политехн. ин-те, с 1966 работает в Киев. ин-те инж. гражд. авиац. (дифференциальные уравнения, операционное исчисление).
- ВАЛЛАНДЕР Сергей Васильевич** (р. 21.VI 1917, г. Красное Село, н. Ленингр. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1939), асп. там же (1941), канд. физ.-мат. н. (1946), д-р

- физ.-мат. н. (1950), проф. (1950), чл.-корр. АН СССР (1966), с 1946 работает в Ленингр. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, функциональные уравнения).
- ВАЛЬФИШ** Арнольд Зельманович (2.VII 1892, Варшава — 29.V 1962), ок. Геттинген. ун-т (1921), д-р физ.-мат. н. (1947), проф. (1948), в 1930—1936 работал в Варшав. ун-те, с 1936 — в Тбил. мат. ин-те АН ГрССР (теория чисел, теория функций действительного переменного).
- ВАРВАК** Петр Маркович (р. 12.V 1907, г. Бердичев, н. Житомир. обл.), ок. Киев. политехн. ин-т (1930), асп. Киев. инж.-строит. ин-та (1934), канд. техн. н. (1935), д-р техн. н. (1949), проф. (1949), в 1931—1949 работал в Киев. инж.-строит. ин-те, 1932—1956 — в Ин-те мех. АН УССР, с 1949 работает в Киев. автодор. ин-те (дифференциальные уравнения в частных производных, численные и приближенные методы, математические методы в механике).
- ВАРШАМОВ** Ром Рубенович (р. 9.IV 1927, Тбилиси), ок. Тбил. ун-т (1952), асп. там же, д-р физ.-мат. н. (1966), работает в Мин-ве приборостр. СССР и АН СССР (кибернетика, теория кодирования).
- ВАСИЛЬЕВ** Александр Васильевич (1853, Казань — 9.X 1929), ок. Петерб. ун-т (1874), д-р чист. мат. (1884), проф. (1919), чл.-корр. Междунар. акад. ист. наук (1929), в 1874—1906 работал в Казан. ун-те, с 1906 — в Ленингр. ун-те (теория функций действительного переменного, история математики).
- ВАСИЛЬЕВ** Анатолий Михайлович (р. 13.III 1923, г. Липецк), ок. Моск. ун-т (1949), асп. там же (1952), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1968), с 1952 работает в Моск. ун-те (алгебра, теория поверхностей, алгебраические методы в геометрии).
- ВАСИЛЬЕВ** Владимир Владимирович (р. 25.VI 1907, Красноярск), ок. Иркутск. пед. ин-т (1932), асп. Иркутск. ун-та (1935), канд. физ.-мат. н. (1938), проф. (1964), с 1935 работает в Иркутск. ун-те (приближенные и численные методы, интегро-дифференциальные уравнения).
- ВАСИЛЬЕВ** Николай Николаевич (18.IV 1889, г. Калуга — апр. 1946), ок. Новорос. ун-т (1912), проф. (1926), в 1918—1930 работал в Одесск. политехн. ин-те, 1923—1925 — также в Одесск. ИЮ, 1930—1933 — в Одесск. физ.-хим.-мат. ин-те, 1930—1941 — в Одесск. ин-те инж. водн. трансп., 1933—1938 и 1944—1946 — в Одесск. ун-те (прикладная математика, математические методы в теоретической механике).
- ВАСИЛЬЕВА** Аделаида Борисовна (р. 10.III 1926, Москва), ок. Моск. ун-т (1948), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1963), с 1951 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения, приближенные и численные методы).
- ВЕКУА** Илья Несторович (р. 23.IV 1907, с. Шешелеты, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1930), асп. АН СССР (1933), д-р физ.-мат. н. (1939), проф. (1940), чл.-корр. АН ГрССР (1944), акад. АН ГрССР (1946), чл.-корр. АН СССР (1946), акад. АН СССР (1958), лауреат Гос. премии (1950), Ленинск. премии (1963), засл. д. н. ГрССР (1966), Герой Соц. Труда (1969), в 1952—1954 работал в Моск. ун-те, 1953—1958 — в Мат. ин-те АН СССР, 1958—1965 — в Новосиб. ун-те (ректор), с 1965 работает в Тбил. ун-те (с 1966 — ректор) (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, интегро-дифференциальные уравнения, геометрия).
- ВЕКУА** Николай Петрович (р. 10.VIII 1913, с. Ахути, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1937), д-р физ.-мат. н. (1946), проф. (1947), чл.-корр. АН ГрССР (1955), акад. АН ГрССР (1960), засл. д. н. ГрССР (1966), с 1938 работает в Тбил. мат. ин-те АН ГрССР, с 1962 — также в Тбил. ун-те (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, интегро-дифференциальные уравнения).
- ВЕЛЬМИН** Владимир Петрович (р. 20.VII 1885, Киев), ок. Киев. ун-т (1907), магистр чист. мат. (1913), проф. (1913), д-р физ.-мат. н. (1935), в 1909—1950 работал в Ростов. ун-те, с 1950 работает в Киев. технол. ин-те легкой пром. (алгебра, теория чисел, приближенные и численные методы, методика математики).
- ВЕНИКОВ** Валентин Андреевич (р. 6.IV 1912, Нижний Новгород), ок. Моск. энергетич. ин-т (1935), д-р техн. н. (1953), проф. (1953), лауреат премии

- им. П. Н. Яблочкова (1950), Ленинск. премии (1958), в 1935—1942 работал в Энергетич. ин-те АН СССР, с 1937 работает в Моск. энергетич. ин-те (прикладная математика, кибернетика).
- ВЕНКОВ Борис Алексеевич** (13.VIII 1900, д. Кратково, н. Псков. обл.— 13.XII 1962), ок. Ленингр. ун-т (1925), проф. (1933), д-р физ.-мат. н. (1936), в 1928—1934 работал в Мат. ин-те АН СССР, с 1935 — в Ленингр. ун-те, в 1940—1942 — также в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР (теория чисел, геометрия).
- ВЕНТЦЕЛЬ Михаил Константинович** (р. 6.II 1882), ок. Моск. ун-т, проф. (1921), д-р техн. н. (1940), с 1918 работает в Моск. ин-те инж. геодезии, аэрофотосъемки и картографии (сферическая тригонометрия, небесная механика).
- ВЕСЕЛОВСКИЙ Иван Николаевич** (р. 26.XI 1892, Москва), ок. Моск. ун-т (1916), д-р физ.-мат. н. (1952), проф. (1953), с 1921 работает в Моск. высш. техн. уч-ще (история математики, алгебра).
- ВЕТЧИНСКИЙ Владимир Петрович** (29.VI 1888 — 6.III 1950), ок. Моск. высш. техн. уч-ще (1915), проф. (1928), лауреат Гос. премии (1943), работал в Моск. высш. техн. уч-ще (интегро-дифференциальные уравнения, численные и приближенные методы).
- ВИДЕНСКИЙ Виктор Соломонович** (р. 17.V 1922, г. Бердичев, н. Житомир. обл.), ок. Моск. ун-т (1947), асп. там же (1950), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1964), в 1947—1962 работал в Мат. ин-те АН СССР, с 1962 работает в Ленингр. электротехн. ин-те связи (теория функций).
- ВИЛЕНКИН Наум Яковлевич** (р. 30.X 1920, Москва), ок. Моск. ун-т (1942), д-р физ.-мат. н. (1950), проф. (1951), в 1943—1945 работал в Моск. энергетич. ин-те, 1945—1946 — в Саратов. ун-те, 1946—1961 — в вузах Москвы, с 1961 работает в Моск. заочн. пед. ин-те (алгебра, топология, теория функций действительного переменного, функциональный анализ, математический анализ).
- ВИНОГРАД Роберт Эльюкимович** (р. 25.VI 1924, Москва), ок. Моск. ун-т (1948), асп. там же (1952), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1962), в 1952, 1953 работал в Казах. горно-металлург. ин-те, 1954—1963 — в Моск. авиац. технол. ин-те, с 1963 работает в Моск. ин-те радиоэлектрон. и горн. электромех. (теория дифференциальных уравнений и ее приложения).
- ВИНОГРАДОВ Аскольд Иванович** (р. 1.X 1929, ст. Петрокрепость Ленингр. обл.), ок. Калинингр. высш. в.-мор. уч-ще (1952), асп. Мат. ин-та АН СССР (1955), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1963), с 1955 работает в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР (теория чисел).
- ВИНОГРАДОВ Иван Матвеевич** (р. 14.IX 1891, с. Мирюлюб, н. Псков. обл.), ок. Петерб. ун-т (1914), д-р физ.-мат. н., проф. (1920), акад. АН СССР (1929), лауреат Гос. премии (1941), Герой Соц. Труда (1945), почетн. чл. Амстердам. мат. (1938), Лондон. мат. (1939) и Амер. филос. (1942) о-в, Моск. о-ва испытателей природы (1944), Индийск. мат. о-ва (1947), Моск. мат. о-ва (1951), АН АрмССР (1953), иностр. чл. Лондон. королевск. о-ва (1942), чл.-корр. Париж. АН (1946), иностр. чл. Датск. королевск. акад. наук и литератур (1947), иностр. почетн. чл. Амер. акад. искусств и наук (1947), почетн. д-р филос. ун-та в Осло (1950), чл.-корр. Герм. АН (1950), почетн. чл. Венгерск. АН (1950), иностр. чл. Нац. акад. деи Линччей (в Риме) (1958), чл. Сербск. АН (1959), в 1918—1920 работал в Перм. ун-те, 1920—1934 — в Ленингр. ун-те и политехн. ин-те, с 1932 — в Мат. ин-те АН СССР (директор) (теория чисел, теория функций).
- ВИНОКУРОВ Владимир Григорьевич** (р. 22.I 1929, с. Калиновка Днепропетр. обл.), ок. Средаз. ун-т (1950), асп. Моск. ун-та (1953), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1967), в 1953—1961 работал в Ташкент. ун-те, с 1962 работает в Ин-те мат. АН УзССР (алгебра, функциональный анализ, теория вероятностей, теория контроля, теория множеств).
- ВИТЕНБЕРГ Исаак Моисеевич** (р. 30.XII 1920, Москва), ок. Моск. ин-т инж. связи (1942), канд. техн. н. (1952), д-р техн. н. (1964), проф. (1966), с 1949 работает в НИИ счетмаш (приближенные и численные методы, электронные вычислительные машины).
- ВИТТ Александр Адольфович** (25.IX 1902, Москва — 26.VI 1937), д-р физ.-мат. н. (1935), проф., с 1931 работал в Моск. ун-те (математические методы в механике).
- ВИТУШКИН Анатолий Георгиевич** (р. 25.VI 1931, Москва), ок. Моск. ун-т (1954), асп. там же (1957), д-р физ.-мат. н. (1957), лауреат Гос. премии (1967), работает

- в Мат. ин-те АН СССР (топология, теория функций, приближенные и численные методы, электронные вычислительные машины, теория множеств).
- ВИШИК Марко Иосифович** (р. 19.X 1921, Львов), ок. Тбил. ун-т (1943), асп. Мат. ин-та АН СССР, д-р физ.-мат. н. (1952), проф. (1954), в 1947—1966 работал в Моск. энергетич. ин-те, с 1965 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, функциональный анализ, приближенные и численные методы).
- ВИШНЕВСКИЙ Лев Александрович** (17.X 1887, Москва — 1938), ок. Моск. ун-т (1913), проф. (1919), в 1916—1918 работал в Моск. ун-те, 1919—1925 — в Крым. ун-те, 1925—1937 — в Томск. ун-те (вариационное исчисление, теория функций действительного переменного).
- ВЛАДИМИРОВ Василий Сергеевич** (р. 9.I 1923, с. Дяглево, Ленингр. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1948), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1965), чл.-корр. АН СССР (1968), лауреат Гос. премии (1953), с 1956 работает в Мат. ин-те АН СССР (приближенные и численные методы, теория функций).
- ВЛАСОВ Алексей Константинович** (1868, с. Власовка, н. Владимир. обл. — 21.V 1922), ок. Моск. ун-т (1892), магистр чист. мат. (1901), д-р чист. мат. (1911), с 1911 работал в Моск. коммерч. ин-те, с 1917 — в Моск. ун-те (проективная геометрия).
- ВЛАСОВ Василий Захарович** (24.II 1906 — 7.VIII 1958), ок. Моск. высш. инж.-строит. уч-ще (1930), чл.-корр. АН СССР (1953), дважды лауреат Гос. премии (1941, 1950), с 1946 работал в Ин-те мех. АН СССР (механика, математические методы в механике).
- ВОЛКОВ Даниил Макарьевич** (р. 10.VII 1906, г. Кизил, н. Челяб. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1930), д-р физ.-мат. н. (1949), проф. (1950), с 1930 работает в Ленингр. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, математическая физика).
- ВОЛКОВ Евгений Алексеевич** (р. 4.IV 1926, Тула), ок. Моск. ун-т (1951), асп. Ин-та точ. мех. и вычисл. техн. АН СССР (1954), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1967), работает в Мат. ин-те АН СССР (дифференциальные уравнения, вычислительная математика).
- ВОЛКОВЫСКИЙ Лев Израилевич** (р. 18.III 1913, г. Белосток, н. ПНР), ок. Моск. пед. ин-т (1935), асп. Моск. ун-та (1937), д-р физ.-мат. н. (1948), проф. (1949), в 1940—1944 работал в Томск. пед. ин-те, 1948—1955 — во Львов. ун-те, 1955—1965 — в Перм. ун-те, с 1965 работает в Ташкент. ун-те (теория функций комплексного переменного).
- ВОЛЛЕРНЕР Наум Филиппович** (р. 22.IV 1913, Киев), ок. Киев. политехн. ин-т (1935), асп. там же (1939), д-р техн. н. (1952), проф. (1955), с 1932 работает в Киев. политехн. ин-те (электронно-счетные машины, математическая статистика, электроизмерения).
- ВОЛОСОВ Владимир Маркович** (р. 11.II 1928, Ленинград), ок. Моск. ун-т (1950), асп. там же (1956), канд. физ.-мат. н. (1956), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1964), с 1956 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения, прикладная математика).
- ВОЛЬПЕРТ Айзик Исаакович** (р. 5.VI 1923, Харьков), ок. Львов. ун-т (1951), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1962), с 1951 работает во Львов. лесотехн. ин-те, с 1960 — также в фил. Ин-та хим. физ. АН СССР (топология, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения).
- ВОРОБЬЕВ Леонид Михайлович** (р. 8.VIII 1919, г. Рыльск, н. Курск. обл.), ок. Моск. ун-т (1948), канд. техн. н. (1953), д-р техн. н. (1963), с 1949 работает в вузах Москвы (приближенные и численные методы, вариационное исчисление).
- ВОРОБЬЕВ Николай Николаевич** (р. 18.IX 1925, Ленинград), ок. Ленингр. ун-т (1948), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1965), в 1951—1965 работал в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, с 1965 работает в Ленингр. отд. Центр. экон.-мат. ин-та АН СССР (математическая логика и основания математики, алгебра, теория вероятностей).
- ВОРОВИЧ Иосиф Израилевич** (р. 21.VI 1920, г. Стародуб, н. Брянск. обл.), ок. В.-возд. инж.акад. (1944), канд. техн. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1959), проф.

- (1960), с 1950 работает в Ростов. ун-те (вариационное исчисление, функциональный анализ, приближенные и численные методы, прикладная математика).
- ВОРОНОВСКАЯ** Елизавета Владимировна (р. 27.XI 1898, Петербург), ок. Петрогр. ун-т (1919), д-р физ.-мат. н. (1956), проф. (1956), в 1955—1962 работала в Ленингр. ин-те авиац. приборостроения, с 1962 работает в Ленингр. электротехн. ин-те связи (теория функций, функциональный анализ, приближенные и численные методы).
- ВУЛИХ** Борис Захарович (р. 20.II 1913, Петербург), ок. Ленингр. ун-т (1936), асп. там же (1938), д-р физ.-мат. н. (1946), проф. (1947), в 1938—1963 работал в Ленингр. пед. ин-те, с 1963 работает в Ленингр. ун-те (топология, геометрия, функциональный анализ, теория функций).
- ВЫГОДСКИЙ** Марк Яковлевич (2.X 1898, Минск — 26.IX 1965), ок. Моск. ун-т (1923), проф. (1931), д-р физ.-мат. н. (1938), в 1931—1941 и 1945—1946 работал в Моск. ун-те, 1947—1948 — в Ростов. ун-те, с 1960 — в Тульск. политехн. ин-те (геометрия, история математики).
- ГАВРИЛОВ** Александр Феликсович (р. 19.VIII 1887, Варшава), ок. Ленингр. ун-т (1912), проф. (1919), канд. физ.-мат. н. (1938), с 1930 работает в Ленингр. электротехн. ин-те связи (дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные и численные методы).
- ГАВРИЛОВ** Михаил Александрович (р. 11.XI 1903, Москва), ок. Моск. высш. техн. уч-ще (1925), д-р техн. н. (1947), проф. (1948), чл.-корр. АН СССР (1964), лауреат премии им. П. Н. Яблочкова (1958), засл. д. н. и т. СССР (1965), в 1931—1940 работал в Моск. энергетич. ин-те, 1936—1949 — во Всесоюзн. заочн. политехн. ин-те, с 1937 работает в Ин-те автомат. и телемех. АН СССР, с 1947 — также во Всесоюзн. заочн. энергетич. ин-те, с 1966 — также в АН СССР (математическая логика, электронные вычислительные машины, прикладная математика).
- ГАВРИЛОВ** Николай Иванович (р. 24.XI 1917, д. Орловка, н. Рязан. обл.), ок. Моск. ун-т (1946), асп. там же (1949), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1954), проф. (1961), с 1951 работает в Одесск. ун-те (дифференциальные уравнения, история математики).
- ГАВУРИН** Марк Константинович (р. 16.XI 1911, пос. Мир, н. Гроднен. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1936), асп. там же (1939), канд. физ.-мат. н. (1940), д-р физ.-мат. н. (1965), проф. (1965), в 1939—1941 работал в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, с 1940 работает в Ленингр. ун-те (теория функций действительного переменного, функциональный анализ, приближенные и численные методы).
- ГАГАЕВ** Борис Михайлович (р. 20.VII 1897, Казань), ок. Казан. ун-т (1923), асп. там же (1929), проф. (1933), д-р физ.-мат. н. (1936), засл. д. н. ТАССР (1954), засл. д. н. РСФСР (1966), с 1923 работает в Казан. ун-те (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, интегро-дифференциальные уравнения, история математики).
- ГАЛИМОВ** Курбан Закирович (р. 31.XII 1909, д. Сосмак, н. Киров обл.), ок. Казан. ун-т (1935), асп. там же (1938), д-р физ.-мат. н. (1958), проф. (1960), с 1938 работает в Казан. ун-те (прикладная математика).
- ГАЛИН** Лев Александрович (р. 11.X 1912, г. Богородск, н. Горьк. обл.), ок. Моск. ин-т легкой пром. (1939), асп. Ин-та мех. АН СССР (1942), д-р физ.-мат. н. (1947), чл.-корр. АН СССР (1953), работает в Ин-те проблем мех. АН СССР (прикладная математика, теория упругости).
- ГАЛЬПЕРН** Самарий Александрович (р. 4.V 1904, г. Белосток, н. ПНР), ок. Моск. ун-т (1924), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1962), с 1932 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения).
- ГАМКРЕЛИДЗЕ** Реваз Валерианович (р. 4.II 1927, г. Кутаиси ГрССР), ок. Моск. ун-т (1950), асп. там же (1953), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1966), лауреат Ленинск. премии (1962), с 1953 работает в Мат. ин-те АН СССР (топология, дифференциальные уравнения, теория автоматического управления, теория оптимальных процессов).
- ГАНИН** Михаил Павлович (р. 23.I 1930, с. Княжуха, н. Горьк. обл.), ок. Казан. ун-т (1951), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р техн. н. (1964), проф. (1965) (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения, теория автоматического управления, вычислительные машины).

- ГАНТМАХЕР Феликс Рувимович** (23.II 1908, Одесса — 16.V 1964), ок. асп. Одесск. ИНО (1930), докт. Мат. ин-та АН СССР (1938), д-р физ.-мат. н. (1938), проф. (1938), лауреат Гос. премии (1947), в 1927—1934 работал в Одесск. ИНО, с 1938 — в Мат. ин-те АН СССР, в 1942—1946 — в ЦАГИ, с 1947 — в Моск. физ.-техн. ин-те (алгебра, дифференциальные уравнения, прикладная математика).
- ГАРКАВИ Александр Львович** (р. 10.XI 1924, Ростов-на-Дону), ок. Львов. ун-т (1956), асп. Мат. ин-та АН СССР, канд. физ.-мат. н. (1959), д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1968), с 1965 работает в вузах Москвы (функциональный анализ, теория функций действительного переменного, топология).
- ГАСЫМОВ Мираббас Геогджа оглы** (р. 11.VII 1939, с. Нариманкенд АзССР), ок. Моск. ун-т (1961), асп. там же (1964), канд. физ.-мат. н. (1964), д-р физ.-мат. н. (1967), в 1964, 1965 работал в Моск. физ.-техн. ин-те, с 1965 работает в вузах Москвы (функциональный анализ).
- ГАХОВ Федор Дмитриевич** (р. 19.II 1906, стан. Баталпашинская, н. г. Черкесск Ставрополь. края), ок. Казан. ун-т (1930), асп. там же (1937), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р физ.-мат. н. (1943), проф. (1943), акад. АН БССР (1966), в 1934—1953 работал в Казан. ун-те, 1953—1961 — в Ростов. ун-те, с 1961 работает в Белорус. ун-те (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения).
- ГЕГЕЛИА Тенгиз Георгиевич** (р. 20.II 1928, с. Патара-Джихайши ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1950), асп. там же (1954), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1965), работает в Мат. ин-те АН ГрССР (теория функций комплексного переменного, интегральные уравнения, прикладная математика).
- ГЕЙДЕЛЬМАН Роман Маркович** (р. 4.III 1922, г. Рыльск, н. Курск. обл.), ок. Моск. пед. ин-т (1942), асп. Моск. гор. пед. ин-та (1948), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1961), с 1949 работает в Моск. ин-те инж. ж.-д. трансп. (дифференциальная геометрия).
- ГЕЛЬФАНД Израиль Моисеевич** (р. 20.VIII 1913, м. Окны, н. пос. Красные Окны Одесск. обл.), ок. асп. Моск. ун-та (1935), канд. физ.-мат. н. (1935), д-р физ.-мат. н. (1940), проф. (1943), чл.-корр. АН СССР (1953), иностр. чл. Нац. АН (США) (1964), почетн. чл. Лондон. мат. о-ва (1967), почетн. иностр. чл. Амер. мат. о-ва (1966), лауреат Гос. премии (1951), с 1966 — президент Моск. мат. о-ва, с 1932 работает в Моск. ун-те, с 1939 — также в Мат. ин-те АН СССР (алгебра, теория функций, дифференциальные уравнения, функциональный анализ, теория вероятностей, приближенные и численные методы).
- ГЕЛЬФЕР Самуил Айзикович** (р. 10.XII 1909, г. Быхов, н. Могилев. обл.), ок. Ленингр. пед. ин-т (1931), асп. Ленингр. ун-та (1939), канд. физ.-мат. н. (1939), д-р физ.-мат. н. (1958), проф. (1959), в 1931—1936 работал в Ленингр. ин-те инж. ж.-д. трансп., 1939—1942 — в вузах Ленинграда, с 1942 работает в Горьк. инж.-строит. ин-те (теория функций комплексного переменного).
- ГЕЛЬФОНД Александр Осипович** (24.X 1906, Петербург — 7.XI 1968), ок. Моск. ун-т (1927), асп. там же (1930), проф. (1931), д-р физ.-мат. н. (1935), чл.-корр. АН СССР (1939), чл.-корр. Междунар. акад. ист. наук (1968), с 1930 работал в Моск. ун-те, с 1933 — также в Мат. ин-те АН СССР (теория чисел, теория функций, история математики).
- ГЕРАСИМОВИЧ Борис Петрович**, проф., работал в Харьк. ИНО, Харьк. геодез. ин-те, Харьк. и Пулков. обсерваториях (астрофизика, теоретическая астрономия, прикладная математика).
- ГЕРНЕТ Михаил Михайлович** (р. 13.X 1903, Париж), ок. Моск. ун-т (1925), асп. Астроном. ин-та им. П. К. Штернберга (1930), проф. (1935), д-р техн. н. (1953), с 1930 работает в Моск. технол. ин-те пищ. пром. (прикладная математика, теоретическая механика).
- ГЕРНЕТ Надежда Николаевна** (18.IV 1877—1943), проф., работала на Петерб. высш. женск. курсах, в Ленингр. ун-те и Ленингр. политехн. ин-те (математический анализ).
- ГЕРОНИМУС Яков Лазаревич** (р. 6.II 1898, Ростов-на-Дону), ок. Харьк. ун-т (1920), проф. (1929), д-р физ.-мат. н. (1939), в 1920—1930 работал в Харьк. технол. ин-те, с 1930 работает в Харьк. авиац. ин-те (теория функций, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения,

- приближенные и численные методы, прикладная математика, теория механизмов и машин).
- ГЕРСЕВАНОВ Николай Михайлович (28.II 1879—20.I 1950), ок. Петерб. ин-т инж. путей сообщ. (1901), проф. (1923), чл.-корр. АН СССР (1939), засл. д. н. и т. РСФСР (1936), лауреат Гос. премии (1948), в 1902—1923 работал в Петрогр. ин-те инж. путей сообщ. и политехн. ин-те, с 1923 — в Моск. ин-те инж. ж.-д. трансп. (номография, теория фильтрации).
- ГЕРЦЕНШТЕЙН Михаил Евгеньевич (р. 20.XII 1926), ок. Моск. ун-т (1951), д-р физ.-мат. н. (1965) (теория вероятностей, прикладная математика, теоретическая физика).
- ГЕРШГОРИН Семен Аронович (24.VIII 1901, г. Пружаны, н. Брест. обл. — 30.V 1933), ок. Петрогр. технол. ин-т (1923), проф. (1930), с 1930 работал в Ленингр. машиностроит. ин-те (алгебра, теория функций комплексного переменного, приближенные и численные методы, дифференциальные уравнения).
- ГИНЗБУРГ Исаак Павлович (Файвишевич) (р. 10.III 1910, м. Монастырщина, н. Смоленск. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1931), асп. там же (1935), д-р физ.-мат. н. (1944), проф. (1946), с 1932 работает в Ленингр. ун-те, с 1945 — также в Ленингр. мех. ин-те (дифференциальные уравнения, прикладная математика, гидродинамика).
- ГИНЗБУРГ Самуил Александрович (р. 7.XI 1910, Москва), ок. Моск. электротехн. ин-т связи (1933), д-р техн. н. (1964), с 1956 работает во Всесоюзн. НИИ электротехн. (математическая логика, автоматическое регулирование, прикладная математика).
- ГИХМАН Иосиф Ильич (р. 26.V 1918, г. Умань, н. Черкасск. обл.), ок. Киев. ун-т (1939), канд. физ.-мат. н. (1942), д-р физ.-мат. н. (1956), проф. (1959), чл.-корр. АН УССР (1965), в 1947—1965 работал в Киев. ун-те, с 1966 работает в Донецк. ун-те и ВЦ АН УССР (теория вероятностей и математическая статистика).
- ГЛАГОЛЕВ Александр Александрович (21.VIII 1894, Москва — 4.VI 1967), ок. Моск. ун-т (1922), проф. (1933), д-р физ.-мат. н. (1946), в 1939—1962 работал в Моск. ин-те нар. х-ва, с 1962 — в Моск. обл. пед. ин-те (геометрия, номография).
- ГЛАГОЛЕВ Нил Александрович (3.XII 1888, Москва — 2.VII 1945), ок. Моск. ун-т (1912), проф. (1931), д-р физ.-мат. н. (1935), в 1913—1934 работал в Моск. ин-те нар. х-ва, с 1916 — в Моск. ун-те, с 1938 — также в Моск. гор. пед. ин-те (математическая статистика, дифференциальная и проективная геометрия, номография).
- ГЛАДКИЙ Алексей Всеволодович (р. 4.IX 1928, Ленинград), ок. Моск. пед. ин-т (1950), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1965), в 1956—1958 работал в Коломен. пед. ин-те, с 1958 работает в Ин-те мат. СО АН СССР (теория множеств, математическая логика, алгебра).
- ГЛАЗМАН Израиль Маркович (21.XII 1916, Одесса — 23. V 1968), ок. Одесск. ун-т (1938), канд. физ.-мат. н. (1949), д-р физ.-мат. н. (1959), проф. (1960), с 1946 работал в Харьк. политехн. ин-те, с 1962 — также в Физ.-техн. ин-те низких температур АН СССР (теория функций действительного переменного, функциональный анализ, программирование).
- ГЛАЗУНОВ Евгений Александрович (3.XII 1890, Москва — дек. 1962), ок. Моск. высш. техн. уч-ще (1917), проф. (1939), засл. д. н. и т. РСФСР (1960), в 1920—1930 работал в Моск. высш. техн. уч-ще, с 1930 — в Моск. энергетич. ин-те (начертательная геометрия).
- ГЛИВЕНКО Валерий Иванович (2.I 1897, Киев — 15.II 1940), ок. Моск. ун-т (1925), проф. (1928), д-р физ.-мат. н. (1936), с 1928 работал в Моск. гор. пед. ин-те (основания математики и математическая логика, теория функций действительного переменного, теория вероятностей, алгебра).
- ГЛУСКИН Лазарь Матвеевич (р. 20.III 1922, г. Артемовск Донецк. обл.), ок. Харьк. ун-т (1949), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1962), в 1950—1964 работал в Харьк. пед. ин-те, с 1965 работает в Харьк. ин-те радиоэлектрон. (алгебра).
- ГЛУШКОВ Виктор Михайлович (р. 24.VIII 1923, Ростов-на-Дону), ок. Ростов. ун-т (1948), д-р физ.-мат. н. (1956), проф. (1957), чл.-корр. АН УССР (1958), акад. АН УССР (1961), акад. АН СССР (1964), лауреат Ленинск. премии

- (1964), Гос. премии (1968), Герой Соц. Труда (1969), в 1948—1956 работал в Уральск. лесотехн. ин-те, 1956—1957 — в Ин-те мат. АН УССР, с 1957 работает в Ин-те кибернетики АН УССР (директор) и Киев. ун-те, с 1962—вице-президент АН УССР (алгебра, вычислительная математика, кибернетика).
- ГНЕДЕНКО Борис Владимирович** (р. 1.I 1912, г. Симбирск), ок. Саратов. ун-т (1930), асп. Моск. ун-та (1937), д-р физ.-мат. н. (1942), проф. (1942), акад. АН УССР (1948), чл. Амер. о-ва мат. и стат. (1957), Междунар. стат. ин-та (1959), Мат. о-ва ГДР, в 1930—1934 работал в Иванов. текст. ин-те, 1934—1945 — в Моск. ун-те, 1945—1960 — в Ин-те мат. АН УССР, с 1960 работает в Моск. ун-те (теория вероятностей и математическая статистика, история математики).
- ГОГОБЕРИДЗЕ Дмитрий Борисович** (5.IV 1906, Одесса — 19.VII 1953), ок. Тбил. ун-т (1929), д-р физ.-мат. н. (1940), проф. (1941), работал в учебных заведениях Тбилиси, Ленинграда (вычислительная математика).
- ГОДУНОВ Сергей Константинович** (р. 17.VII 1929, Москва), ок. Моск. ун-т (1951), асп. Мат. ин-та АН СССР (1954), д-р физ.-мат. н. (1966), лауреат Ленинск. премии (1959), работает в Ин-те прикл. мат. АН СССР и Моск. ун-те (теория чисел, теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения, приближенные и численные методы, прикладная математика).
- ГОКИЕЛИ Леван Петрович** (р. 3.XII 1901, г. Кутаиси, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1924), д-р физ.-мат. н. (1935), проф. (1936), чл.-корр. АН ГрССР (1961), засл. д. н. ГрССР (1944), с 1925 работает в Тбил. ун-те, с 1935 — также в АН ГрССР (математическая логика, теория множеств, история математики).
- ГОЛЕНКО Дмитрий Исаакович** (р. 24.XI 1932, Москва), ок. Моск. ин-т нар. х-ва (1954), Моск. ун-т (1958), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р техн. н. (1966), с 1955 работает в ВЦ АН СССР (теория вероятностей).
- ГОЛОВИН Олег Николаевич** (р. 8. II 1916, Москва), ок. Моск. ун-т (1939), асп. там же (1947), канд. физ.-мат. н. (1948), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1966), в 1949—1954 работал в Моск. инж.-физ. ин-те, с 1954 работает в Моск. ун-те (алгебра).
- ГОЛУБЕВ Владимир Васильевич** (3.XII 1884, г. Сергиев посад, н. г. Загорск Моск. обл.— 4.XII 1954), ок. Моск. ун-т (1908), д-р чист. мат. (1917), проф. (1917), чл.-корр. АН СССР (1934), засл. д. н. и т. РСФСР (1943), в 1917—1930 работал в Саратов. ун-те, с 1930 — в Моск. ун-те (теория функций комплексного переменного, прикладная математика, гидро- и аэродинамика, история механики и математики).
- ГОЛУБЦОВ Петр Васильевич** (р. 24.I 1899, Саратов), ок. Саратов. ун-т (1923), асп. там же (1929), канд. физ.-мат. н. (1935), д-р физ.-мат. н. (1944), проф. (1944), засл. д. н. РСФСР (1959), работает в Саратов. ун-те (прикладная математика, электроника).
- ГОЛУЗИН Геннадий Михайлович** (24.I 1906, г. Торжок, н. Калинин. обл.— 17.I 1952), ок. Ленингр. ун-т (1929), д-р физ.-мат. н. (1936), проф. (1938), лауреат Гос. премии (1948), с 1929 работал в Ленингр. ун-те (теория функций комплексного переменного, математическая физика).
- ГОЛУШКЕВИЧ Сергей Сергеевич** (14.VII 1903—2.VI 1956), ок. Ленингр. политехн. ин-т (1928), д-р техн. н., проф. (1945), работал в Ленингр. политехн. ин-те (математическая физика, прикладная математика).
- ГОЛЬДБЕРГ Анатолий Асирович** (р. 2. IV 1930, Киев), ок. Львов. ун-т (1952), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1968), в 1955—1963 работал в Ужгород. ун-те, с 1963 работает во Львов. ун-те (теория функций комплексного переменного).
- ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР Алексей Львович** (р. 12.I 1911, Москва), ок. Моск. ун-т (1931), д-р физ.-мат. н. (1947), проф. (1951), с 1959 работает в Ин-те проблем мех. АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных, прикладная математика, математические методы в механике).
- ГОНЧАР Андрей Александрович** (р. 21.XI 1931, Ленинград), ок. Моск. ун-т (1954), асп. там же (1957), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1966), с 1957 работает в Моск. ун-те, с 1965 — также в Мат. ин-те АН СССР, в 1964—1965 — уч. секретарь Отд. мат. АН СССР (теория функций).
- ГОНЧАРОВ Василий Леонидович** (24.IX 1896 — 30.X 1955), д-р физ.-мат. н.,

- проф., чл.-корр. АПН РСФСР (1944), работал в Харьк. ИНО (теория функций, история математики).
- ГОПП Юрий Аркадьевич (р. 23.VI 1906, Одесса), ок. Харьк. машиностр. ин-т (1930), д-р техн. н. (1954), проф. (1954), в 1930—1941 работал в Харьк. машиностр. ин-те, 1941—1961 — в Омск. машиностр. ин-те, с 1961 работает в вузах Харькова (приближенные и численные методы, прикладная математика, теория автоматического регулирования).
- ГОРБАТЕНКО Станислав Алексеевич (р. 11.VII 1934, Смоленск), ок. Моск. авиац. ин-т (1958), асп. там же (1961), канд. техн. н. (1961), д-р техн. н. (1965), проф. (1968), с 1961 работает в Моск. авиац. ин-те (дифференциальные уравнения, нелинейная механика, прикладная математика).
- ГОРДЕЛАДЗЕ Шалва Георгиевич (р. 18.IX 1905, с. Гуриянта, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1931), асп. Ленингр. ун-та (1936), канд. физ.-мат. н. (1937), проф. (1963), д-р физ.-мат. н. (1964), в 1936—1940 работал в Абастуман. астрофиз. обсерватории и Тбил. ун-те, 1940—1941 — в Киев. ун-те, 1945—1960 — в Главн. астрон. обсерватории АН УССР, с 1944 работает в Киев. политехн. ин-те (математический анализ, теоретическая астрофизика).
- ГОРДОН Владимир Осипович (р. 2.VII 1892, Москва), ок. Моск. высш. техн. уч-ще (1924), проф. (1935), канд. техн. н. (1938), засл. д. н. и т. РСФСР (1963), с 1924 работает в Моск. автомех. ин-те, в 1925—1934 работал в Центр. НИИ машиностр., 1936—1946 — в Моск. текст. ин-те (начертательная геометрия).
- ГОРЕЛИК Александр Леопольдович (р. 17.I 1923, Киев), ок. В.-возд. инж. акад. (1950), адъюнкт. там же (1961), канд. техн. н. (1961), д-р техн. н. (1966), проф. (1967), с 1969 работает в Моск. физ.-техн. ин-те (техническая кибернетика).
- ГОРИН Николай Порфирьевич (р. нояб. 1892, с. Комарово, н. Перм. обл.), ок. Казан. ун-т (1916), проф., в 1920—1922 работал в Уральск. горн. ин-те и Уральск. ун-те (дифференциальная геометрия).
- ГОРШКОВ Дмитрий Сергеевич (р. 4.I 1916, г. Дебальцево, н. Донецк. обл.), ок. Казан. ун-т (1941), асп. Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР (1945), д-р физ.-мат. н. (1957), проф. (1962), с 1945 работает в Ленингр. политехн. ин-те (теория чисел, геометрия).
- ГОФМАН Шмера Менделевич (р. 5.II 1902, г. Рудня, н. Смоленск. обл.), ок. Ленингр. ин-т инж. путей сообщ. (1928), д-р техн. н. (1949), проф. (1950), засл. д. н. и т. УзССР (1962), в 1931—1966 работал в Ташкент. ин-те инж. ж.-д. трансп., с 1966 работает в Ростов. инж.-строит. ин-те (алгебра).
- ГОХБЕРГ Израиль Цудикович (р. 23.VIII 1928, с. Тарутино Одесск. обл.), ок. Кишинев. ун-т (1951), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1966), в 1953—1964 работал в Бельцк. (МССР) пед. ин-те, с 1964 работает в Ин-те мат. АН МССР (интегральные уравнения, функциональный анализ).
- ГРАВЕ Дмитрий Александрович (6.IX 1863, г. Кириллов, н. Вологод. обл. — 19.XII 1939), ок. Петерб. ун-т (1885), магистр чист. мат. (1889), д-р чист. мат. (1897), акад. АН УССР (1919), почетн. чл. АН СССР (1929), в 1885—1897 работал в Петерб. ин-те инж. путей сообщ., 1897—1899 — в Харьк. ун-те, 1899—1939 — в Киев. ун-те (алгебра, теория чисел, дифференциальные уравнения, геометрия, теория функций, прикладная математика, механика).
- ГРАВЕ Платон Платонович (1867—1919), ок. Казан. ун-т (1890), магистр чист. мат. (1894), д-р чист. мат. (1898), проф. (1901), в 1898—1918 работал в Юрьев. ун-те, с 1918 — в Воронеж. ун-те (теория функций действительного переменного, геометрия).
- ГРАЕВ Марк Иосифович (р. 21.XI 1922, Москва), ок. Моск. ун-т (1944), канд. физ.-мат. н. (1947), д-р физ.-мат. н. (1960), в 1951—1959 работал в Моск. ин-те стали и сплавов, 1959—1966 — в Мат. ин-те АН СССР, с 1966 работает в Ин-те прикл. мат. АН СССР (алгебра, функциональный анализ).
- ГРДИНА Ярослав Иванович (21.I 1871, г. Пильзен, н. ЧССР — 2.VI 1931), ок. Петерб. технол. ин-т (1894), проф. (1912), с 1900 работал в Днепропетр. высш. горн. уч-ще, с 1919 — также в Днепропетр. ун-те (прикладная математика, механика).
- ГРЕБЕНИКОВ Евгений Александрович (р. 20.I 1932, с. Слободзея-Маре, н. МССР), ок. Моск. ун-т (1954), асп. там же (1957), канд. физ.-мат. н. (1960), д-р физ.-мат. н. (1967), проф. (1968), в 1957—1960 работал в Моск. ун-те, 1960—1962 —

- в Моск. технол. ин-те пищ. пром., 1962—1969 — в Ун-те дружбы народов им. П. Лумумбы, с 1969 работает в Ин-те теор. и эксперим. физ. АН СССР (дифференциальные уравнения, математические методы в небесной механике).
- ГРЕБЕНЧА Михаил Кузьмич (1897, с. Малаешты, н. Херсон. обл.—21.VI 1948), ок. Моск. ун-т (1919), проф., с 1920 работал в Моск. горн. ин-те, в 1933—1948 — также в Моск. гор. пед. ин-те (математический анализ, теория чисел).
- ГРЕБЕНЮК Дмитрий Гаврилович (р. 21.II 1885, Киев), ок. Средаз. ун-т (1921), канд. физ.-мат. н., проф. (1937), засл. д. н. и т. УзССР (1950), с 1947 работает в Ин-те мат. АН УзССР (теория функций действительного переменного, приближенные и численные методы).
- ГРИГОРЬЯН Ашот Тигранович (р. 21.III 1910, с. Кузумкенд, н. АзССР), ок. Моск. ун-т (1935), асп. там же (1936), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1963), действ. чл. Междунар. акад. ист. наук (1963), вице-президент Междунар. союза историков науки и искусства (1962), в 1951—1954 работал в Моск. ун-те, с 1954 работает в Ин-те естествозн. и техн. АН СССР (история математики и механики).
- ГРИГОРЬЯН Самвел Самвелович (р. 18.III 1930, г. Банк АзССР), ок. Моск. ун-т (1953), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1956 работает в Моск. ун-те (прикладная математика, механика).
- ГРИНБЕРГ Георгий Абрамович (р. 16.VI 1900, Петербург), ок. Петрогр. политехн. ин-т (1923), проф. (1933), д-р физ.-мат. н. (1935), чл.-корр. АН СССР (1946), лауреат Гос. премии (1948), в 1919—1936 работал в Ленингр. физ.-техн. ин-те, 1924—1955 — в Ленингр. политехн. ин-те, с 1941 работает в Ленингр. физ.-техн. ин-те (дифференциальные и интегральные уравнения, приближенные и численные методы).
- ГРИНБЛЮМ Максимилиан Михайлович (16.VI 1903, г. Седлец, н. ПНР — 18.III 1951), ок. Моск. ун-т (1930), д-р физ.-мат. н. (1945), проф. (1945), в 1932—1941 работал в Воронеж. ун-те, с 1943 — в Средаз. ун-те (функциональный анализ).
- ГРИНДЛИНГЕР Мартин Давидович (р. 25.III 1932, Нью-Йорк), ок. Бруклин. колледж (1954), Нью-Йорк. ун-т (1958), д-р филос. (1960), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р физ.-мат. н. (1967), чл. Амер. мат. о-ва (1960), с 1960 работает в Иванов. пед. ин-те (алгебра).
- ГРИНЦЕВИЧЮС Клеопас Иокимо (р. 28.VI 1917, д. Мостейкяй, н. ЛитССР), ок. Вильнюс. ун-т (1946), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1965), с 1945 работает в Вильнюс. ун-те (дифференциальная геометрия).
- ГРОММЕР Яков Пинхусович, в 1929 — проф. Белорус. ун-та (алгебра, математические методы в механике).
- ГРУЗИНЦЕВ Григорий Алексеевич (дек. 1880—22. VIII 1929), ок. Харьк. ун-т (1907), проф. (1910), в 1910—1918 работал в Харьк. ун-те и на Высш. женск. курсах, с 1918 — в Днепропетр. ИНО (теория функций, теория множеств).
- ГУРАРИЙ Владимир Ильич (р. 16.XI 1935, Харьков), ок. Харьк. ун-т (1957), канд. физ.-мат. н. (1963), д-р физ.-мат. н. (1967), проф. (1967), с 1961 работает в Харьк. автодор. ин-те (функциональный анализ).
- ГУРЕВИЧ Григорий Борисович (р. 6.VII 1898, г. Горки, н. Могилев. обл.), ок. Саратов. ун-т (1921), асп. Моск. ун-та (1929), проф. (1932), д-р физ.-мат. н. (1937), в 1922—1941 работал в Моск. ин-те инж. ж.-д. трансп., 1938—1943 — в Моск. гор. пед. ин-те, 1943—1949 — в Моск. мех. ин-те, 1949—1956 — в Тульск. мех. ин-те, с 1955 работает в Моск. пед. ин-те (алгебра).
- ГУРЕВИЧ Максим Исидорович (р. 14.VI 1909, Москва), ок. Моск. ун-т (1931), д-р физ.-мат. н. (1949), лауреат премии им. С. А. Чаплыгина (1964), в 1931—1950 работал в ЦАГИ, 1951—1959 — в Моск. техн. ин-те рыбн. пром. и х-ва, с 1960 работает в Моск. ин-те инж. ж.-д. трансп. (дифференциальные уравнения в частных производных, функциональный анализ, прикладная математика).
- ГУСЕЙНОВ Ашраф Искендерович (р. 25.XII 1907, с. Амирварлы, н. АзССР), ок. Азерб. ун-т (1931), д-р физ.-мат. н. (1949), проф. (1949), чл.-корр. АН АзССР (1962), засл. д. н. АзССР, с 1934 работает в Азерб. ун-те, с 1965 — также в Ин-те кибернетики АН АзССР (дифференциальные и интегральные уравнения, теория функций комплексного переменного, функциональный анализ).
- ГУТЕНМАХЕР Лев Израилевич (р. 25.VIII 1908, м. Тарутино, н. Одесск. обл.), ок. Новочеркасск. политехн. ин-т (1931), асп. там же (1934), д-р техн. н. (1940),

- проф. (1943), лауреат Гос. премии (1948), в 1931—1938 работал в Новочеркасск. политехн. ин-те, 1938—1948 — в Энергетич. ин-те АН СССР, 1937—1962 — в АН СССР, 1948—1956 — также в Ин-те точ. мех. и вычисл. техн. АН СССР, 1957—1962 — во Всесоюзн. ин-те научн. и техн. информации АН СССР, с 1962 работает во Всесоюзн. НИИ природн. газов (приближенные и численные методы).
- ГЮНТЕР Николай Максимович** (17.XII 1871 — 4.V 1941), ок. Петерб. ун-т (1894), магистр чист. мат. (1904), д-р чист. мат. (1915), чл.-корр. АН СССР (1922), засл. д. н. РСФСР, с 1894 работал в Ленингр. ун-те (дифференциальные уравнения, математическая физика, вариационное исчисление).
- ДАВЫДОВ Николай Алексеевич** (р. 11.V 1917, д. Лазарево, н. Калинин. обл.), ок. Калинин. пед. ин-т (1940), асп. там же (1949), канд. физ.-мат. н. (1949), д-р физ.-мат. н. (1959), проф. (1960), в 1948—1960 работал в Калинин. пед. ин-те, с 1960 работает в Киев. пед. ин-те (теория функций, математический анализ).
- ДАЛЕЦКИЙ Юрий Львович** (р. 16.XII 1926, Чернигов), ок. Киев. ун-т (1951), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), с 1951 работает в Киев. политехн. ин-те (функциональный анализ, дифференциальные уравнения).
- ДАНИЛОВ Виктор Лазаревич** (р. 27.XI 1925, Ленинград), ок. Казан. авиац. ин-т (1948), асп. Казан. ун-та (1951), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1962), в 1952—1959 работал в Казан. физ.-техн. ин-те, 1959—1961 — в Ин-те геол. и разработки горюч. ископ. АН СССР, с 1961 работает во Всесоюзн. нефтегаз. НИИ (интегро-дифференциальные уравнения, приближенные и численные методы).
- ДАНИЛЮК Иван Ильич** (р. 3.XII 1931, с. Рашков, н. Ивано-Франковск. обл.), ок. Львов. ун-т (1955), асп. Мат. ин-та АН СССР (1958), канд. физ.-мат. н. (1958), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1965), чл.-корр. АН УССР (1965), в 1958—1965 работал в Ин-те гидродин. СО АН СССР и Новосиб. ун-те, с 1965 работает в Донецк. ВЦ АН УССР (директор) (теория функций комплексного переменного, дифференциальные и интегральные уравнения).
- ДАРЕВСКИЙ Валерий Михайлович** (р. 13.VI 1910, Москва), ок. Моск. ун-т (1934), д-р физ.-мат. н. (1952), с 1948 работает в Центр. ин-те авиамоторостр. (теория функций действительного переменного, прикладная математика).
- ДАРМОСТУК Петр Макарович** (3.IX 1886, с. Б. Белозерка, н. Запорож. обл. — 20.III 1948), ок. Харьк. ун-т (1912), проф. (1935), с 1925 работал в Харьк. ун-те (геометрия).
- ДЕЗИН Алексей Алексеевич** (р. 23.IV 1923, Москва), ок. Моск. ун-т (1953), асп. там же (1956), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1963), с 1956 работает в Моск. физ.-техн. ин-те и Мат. ин-те АН СССР (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, функциональный анализ).
- ДЕЛОНЕ Борис Николаевич** (р. 15.III 1890, Петербург), ок. Киев. ун-т (1913), асп. там же, проф. (1926), чл.-корр. АН СССР (1929), д-р физ.-мат. н. (1934), чл. Леопольдина (ГДР) (1962), в 1913—1916 работал в Киев. ун-те, 1916—1922 — в Киев. политехн. ин-те, 1922—1935 — в Ленингр. ун-те, с 1932 работает в Мат. ин-те АН СССР (теория чисел, алгебра, геометрия кристаллов, история математики).
- ДЕМИДОВИЧ Борис Павлович** (р. 2.III 1906, г. Новогрудок, н. Гроднен. обл.), ок. Белорус. ун-т (1927), асп. Моск. ун-та (1935), канд. физ.-мат. н. (1936), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1965), засл. д. н. и т. РСФСР (1968), с 1935 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения, математическая физика, теория функций).
- ДЕПМАН Иван Яковлевич** (р. 17.VII 1885, с. Тарваст, н. ЭССР — 26.VII 1970), ок. Петрогр. ун-т (1917), проф. (1922), в 1918—1925 работал в Вятск. пед. ин-те, с 1925 — в Ленингр. пед. ин-те (история и методика математики).
- ДЕРНОВ Николай Андреевич** (29.III 1891, с. Верхотажемское, н. Киров. обл. — 1938), проф., в 20-е годы работал в Вятск. пед. ин-те, 1934—1937 — в Ростов. ун-те (математический анализ).
- ДЖАВАДОВ Маис Габиб оглы** (р. 22.III 1929, с. Басхал АзССР), ок. Азерб. ун-т (1952), асп. АН АзССР, д-р физ.-мат. н. (1959), с 1959 работает в Ин-те мат. и мех.

- АН АзССР (интегральные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных).
- ДЖАВАДОВ** Максуд Алисимран оглы (р. 13.IV 1902, с. Басхал, н. АзССР), ок. Азерб. пед. ин-т (1927), Азерб. ун-т (1930), канд. физ.-мат. н. (1940), д-р физ.-мат. н. (1957), проф. (1959), чл.-корр. АН АзССР (1962), засл. учитель АзССР (1943), засл. д. н. АзССР (1962), в 1927—1934 работал в Азерб. индустр. техникуме, 1930—1938 — в Азерб. индустр. ин-те, с 1934 работает в Азерб. ун-те (геометрия).
- ДЖАНЕЛИДЗЕ** Георгий Иустинович (10.XI 1916, Петроград — 9.I 1964), ок. Ленингр. индустр. ин-т (1937), асп. там же (1940), д-р физ.-мат. н. (1950), проф. (1951), работал в Ленингр. политехн. ин-те (прикладная математика, механика).
- ДЖАПАРИДЗЕ** Ираклий Спиридонович (р. 23.IV 1916, г. Елизаветполь, н. Кировабад), ок. Тбил. лесотехн. ин-т (1938), асп. Груз. политехн. ин-та (1950), канд. техн. н. (1951), д-р техн. н. (1966), с 1951 работает в Груз. политехн. ин-те (начертательная геометрия).
- ДЖВАРШЕЙШВИЛИ** Акакий Георгиевич (р. 9.V 1924, с. Диди-Джихаиши ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1946), асп. там же (1949), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1962), с 1951 работает в Тбил. мат. ин-те АН ГрССР и Тбил. ун-те (теория функций).
- ДЖРБАШЯН** Мхитар Мкртичевич (р. 11.IX 1918, Ереван), ок. Ереван. ун-т (1941), асп. там же (1945), д-р физ.-мат. н. (1949), проф. (1950), акад. АН АрмССР (1956), с 1944 работает в Ереван. ун-те, с 1945 — также в Ин-те мат. и мех. АН АрмССР (теория функций, приближенные и численные методы, математическая физика).
- ДЖУРАЕВ** Абдухамид (р. 10.X 1932, г. Исфара ТаджССР), ок. Тадж. ун-т (1956), асп. Ин-та гидродинам. СО АН СССР (1962), д-р физ.-мат. н. (1968), проф. (1968), чл.-корр. АН ТаджССР (1968), работает в Физ.-техн. ин-те АН ТаджССР (интегральные уравнения, теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных).
- ДЗЯДЫК** Владислав Кириллович (р. 18.II 1919, с. Сахновщина, н. Харьк. обл.), ок. Днепропетр. ун-т (1951), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1963), чл.-корр. АН УССР (1969), в 1953—1960 работал в Луцк. пед. ин-те, с 1960 работает в Ин-те мат. АН УССР и Киев. ун-те (теория функций, математический анализ).
- ДИМЕНТБЕРГ** Федор Менасьевич (р. 17.VI 1908, Одесса), ок. Одесск. ин-т инж. гражд. и коммун. строит. (1932), асп. Ин-та мех. АН СССР (1941), Ин-та машиновед. АН СССР (1944), канд. техн. н. (1944), д-р техн. н. (1956), проф. (1964), в 1934—1936 работал в Одесск. строит. ин-те, 1936—1939 — в Одесск. ин-те инж. мор. фл., с 1944 работает в Ин-те машиновед. АН СССР (математическая статистика, прикладная математика, механика).
- ДИННИК** Александр Николаевич (31.I 1876, Ставрополь — 22.IX 1950), ок. Киев. ун-т (1899), магистр прикл. мех. (1908), проф. (1909), доктор-инженер (1912, Мюнхен), магистр прикл. мат. (1914), акад. АН УССР (1929), д-р техн. н. (1945), акад. АН СССР (1946), лауреат премии им. Н. И. Пирогова (1898), засл. д. н. и т. (1944), в 1899—1909 работал в Киев. политехн. ин-те, 1912—1941 — в Днепропетр. горн. и металлург. ин-тах и ун-те, с 1929 — в АН УССР, с 1944 — также в Киев. ун-те (дифференциальные уравнения, теория функций, приближенные и численные методы, теория упругости, механика).
- ДИТКИН** Виталий Арсеньевич (р. 2.V 1910, г. Богородск, н. г. Ногинск Моск. обл.), ок. Моск. ун-т (1935), асп. там же (1938), д-р физ.-мат. н. (1950), проф. (1952), с 1943 работает в АН СССР, с 1955 — в ВЦ АН СССР (теория функций действительного переменного, приближенные и численные методы, операционное исчисление и его приложения).
- ДОБРОНРАВОВ** Владимир Васильевич (р. 17.III 1901, с. Колояр, н. Саратов. обл.), ок. Саратов. ун-т (1924), асп. Моск. ун-та (1939), канд. физ.-мат. н. (1939), д-р физ.-мат. н. (1946), проф. (1947), в 1929—1931 работал в Саратов. ун-те, 1931—1952 — в Моск. ун-те, 1946—1951 — также в Моск. ин-те хим. машиностр., с 1951 работает в Моск. высш. техн. уч-ще (алгебра, прикладная математика, механика).

- ДОБРУШИН** Роланд Львович (р. 20.VII 1929, Ленинград), ок. Моск. ун-т (1952), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1961), в 1952—1967 работал в Моск. ун-те, с 1967 работает в Ин-те проблем передачи информации АН СССР (математическая логика, теория вероятностей, теория информации, комбинаторный анализ, функциональный анализ).
- ДОВНОРОВИЧ** Витольд Игнатьевич (р. 25.VI 1920, с. Березовка Минск. обл.), ок. Карело-Финск. ун-т (1944), асп. Ленингр. ун-та (1947), канд. физ.-мат. н. (1947), д-р физ.-мат. н. (1965), проф. (1966), в 1947—1954 работал в Гроднен. пед. ин-те, с 1954 работает в Белорус. ин-те инж. ж.-д. трансп. (дифференциальные уравнения).
- ДОЛЖЕНКО** Евгений Прокофьевич (р. 28.IX 1934, Луганск), ок. Луганск. пед. ин-т (1957), асп. Моск. ун-та (1960), канд. физ.-мат. н. (1961), д-р физ.-мат. н. (1965), с 1960 работает в Моск. ун-те (теория функций).
- ДОЛИДЗЕ** Давид Егорович (2.II 1908, с. Букнари, н. ГрССР — 1960), ок. Тбил. ун-т (1929), асп. Гидромех. ин-та АН СССР (1933), д-р физ.-мат. н. (1945), проф. (1945), с 1934 работал в Тбил. ун-те, с 1935 — также в Тбил. мат. ин-те АН ГрССР (прикладная математика, гидродинамика).
- ДОЛЬБЕРГ** Михаил Давыдович (р. 25.VIII 1918, Одесса), ок. Одесск. ун-т (1939), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1950 работает в Харьк. ун-те (интегральные уравнения).
- ДОРОДНИЦЫН** Анатолий Алексеевич (р. 2.XII 1910, с. Башино, н. Тульск. обл.), ок. Грознен. нефт. ин-т (1931), асп. Главн. геофиз. обсерватории (1939), канд. физ.-мат. н. (1939), ок. докт. Ин-та мех. АН СССР, д-р физ.-мат. н. (1942), проф. (1944), акад. АН СССР (1953), трижды лауреат Гос. премии (1946, 1947, 1951), в 1935—1941 работал в Главн. геофиз. обсерватории, 1941—1945 — в ЦАГИ, 1945—1955 — в Мат. ин-те АН СССР, с 1947 работает в Моск. физ.-техн. ин-те, с 1955 — также в ВЦ АН СССР (директор) (приближенные и численные методы, вычислительная математика, кибернетические методы).
- ДОСТУПОВ** Борис Григорьевич (р. 30.I 1920, Днепропетровск), ок. В.-возд. инж. акад. (1944), адъюнкт. там же, д-р техн. н. (1957), проф. (1959), работает в Ин-те кибернетики АН УССР (приближенные и численные методы, теория автоматического регулирования).
- ДРИНФЕЛЬД** Гершон Ихелевич (р. 29.II 1908, г. Староконстантинов, н. Хмельницк. обл.), ок. Киев. физ.-хим.-мат. ин-т (1931), д-р физ.-мат. н. (1941), проф. (1947), в 1931—1941 работал в Киев. ун-те, 1935—1943 — в АН УССР, с 1944 работает в Харьк. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, история и методика математики).
- ДРУЖИНИН** Николай Капитонович (р. 7.VII 1897, г. Пошехонье, н. г. Пошехонье-Болодарск Ярослав. обл.), ок. Моск. ин-т нар. х-ва (1924), д-р экон. н. (1940), проф. (1940), засл. д. н. РСФСР (1963), с 1940 работает в Моск. ин-те нар. х-ва (математическая статистика).
- ДУБНОВ** Яков Семенович (30.XI 1887, г. Мстиславль, н. Могилев. обл. — 13.XII 1957), ок. Одесск. ун-т (1913), проф. (1931), д-р физ.-мат. н. (1936), в 1920—1940 работал в Моск. электротехн. ин-те связи и Моск. высш. техн. уч-ще, 1928—1952 — в Моск. ун-те, 1952—1954 — в Пед. ин-те Коми АССР (дифференциальная геометрия, алгебра, история математики).
- ДУБОШИН** Георгий Николаевич (р. 25.XII 1904, г. Серпухов, н. Моск. обл.), ок. Моск. ун-т (1924), д-р физ.-мат. н. (1936), проф. (1936), с 1924 работает в Гос. астрон. ин-те, с 1940 — также в Моск. ун-те (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения, прикладная математика).
- ДУБРОВСКИЙ** Владимир Михайлович (р. 28.V 1906, г. Новомосковск, н. Днепропетр. обл.), ок. Днепропетр. ИНО (1929), асп. Моск. ун-та (1937), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р физ.-мат. н. (1952), в 1930—1934 работал в Днепропетр. физ.-хим.-мат. ин-те, 1937—1939 — в Дальневост. ун-те, с 1939 работает в Моск. ун-те (теория функций действительного переменного, функциональный анализ, численные и приближенные методы).
- ДУБЯГО** Александр Дмитриевич (18.XII 1903, Казань — 29.X 1959), ок. Казан. ун-т (1925), д-р физ.-мат. н. (1941), проф. (1941), засл. д. н. ТАССР (1954), с 1925 работал в Казан. ун-те, с 1954 — директор астрон. обсерватории при Казан. ун-те (история математики).

- ДУНИН-БАРКОВСКИЙ Игорь Валерианович (р. 18.VI 1907, Ташкент), ок. Моск. высш. техн. уч-ще (1939), канд. техн. н. (1948), д-р техн. н. (1964), проф. (1965), с 1947 работает в Моск. авиац. технол. ин-те (теория вероятностей и математическая статистика).
- ДЫНКИН Евгений Борисович (р. 11. V 1924, Ленинград), ок. Моск. ун-т (1945), асп. там же (1948), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1954), в 1948—1968 работал в Моск. ун-те, с 1968 работает в Центр. экон.-мат. ин-те АН СССР (алгебра, теория вероятностей и математическая статистика).
- ДБЯЧЕНКО Вадим Евгеньевич (30.XII 1896, Нижний Новгород — 2.VI 1954), ок. Морск. корп. (1916), проф. (1928), чл.-корр. АН УССР (1934), с 1926 работал в Киев. ун-те, с 1934—также в Ин-те мат. АН УССР (приближенные и численные методы, дифференциальные уравнения, прикладная математика, механика).
- ДЮБЮК Анатолий Федорович (р. 26.VI 1895, Брест), уч. в Моск. ун-те (1915—1918), ок. асп. Моск. геофиз. ин-та (1931), канд. физ.-мат. н. (1938), д-р физ.-мат. н. (1946), проф. (1947), в 1918—1928 работал в Переяслав-Залесск. стат. бюро, 1931—1951 — в Центр. ин-те прогнозов, 1933—1938 — в Моск. гидрометеорол. ин-те, с 1944 работает в Моск. ун-те (приближенные и численные методы).
- ЕВГРАФОВ Марат Андреевич (р. 30.VI 1926, г. Таганрог Ростов. обл.), ок. Моск. ун-т (1946), асп. Мат. ин-та АН СССР (1949), д-р физ.-мат. н. (1955), с 1956 работает в Мат. ин-те АН СССР (теория функций, функциональный анализ, приближенные и численные методы).
- ЕГОРОВ Дмитрий Федорович (22.XII 1869, Москва — 10.IX 1931), ок. Моск. ун-т (1891), д-р чист. мат. (1901), проф. (1903), чл.-корр. АН СССР (1924), 1923—1930 — президент Моск. мат. о-ва, почетн. чл. АН СССР (1929), с 1893 работал в Моск. ун-те (дифференциальная геометрия, дифференциальные уравнения в частных производных).
- ЕГОРОВ Иван Петрович (р. 25.VII 1915, с. Большая Садовка, н. Пенз. обл.), ок. Казан. ун-т (1939), д-р физ.-мат. н. (1956), проф. (1957), в 1943—1956 работал в Пенз. пед. ин-те, 1956—1958 — в Горьк. ун-те и пед. ин-те, с 1958 работает в Пенз. пед. ин-те (алгебра, дифференциальная геометрия).
- ЕЖОВ Игорь Иванович (р. 4.I 1939, Киев), ок. Киев. ун-т (1961), асп. там же (1964), канд. физ.-мат. н. (1965), д-р физ.-мат. н. (1969), с 1962 работает в Киев. ун-те (теория вероятностей).
- ЕРМАКОВ Василий Петрович (11.III 1845 — 16.III 1922), ок. Киев. ун-т (1868), магистр чист. мат. (1874), д-р чист. мат. (1877), чл.-корр. Петерб. АН (1884), проф. (1888), с 1874 работал в Киев. ун-те, с 1899 — также в Киев. политехн. ин-те (теория функций, математический анализ, дифференциальные уравнения и их приложения в механике, математическая физика).
- ЕРУГИН Анатолий Николаевич (р. 2.IX 1934, Ленинград), ок. Ленингр. ун-т (1957), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р физ.-мат. н. (1970), с 1957 работает в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР (дифференциальные уравнения).
- ЕРУГИН Николай Павлович (р. 14.V 1907, стан. Великокняжеская, н. стан. Пролетарская Ростов. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1932), асп. там же (1935), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р физ.-мат. н. (1943), проф. (1943), акад. АН БССР (1956), лауреат Гос. премии (1951), Герой Соц. Труда (1969), в 1935—1957 работал в Ленингр. ун-те, 1939—1941 и 1950—1957 — также в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, с 1957 работает в Ин-те мат. АН БССР (с 1959 — директор) и Белорус. ун-те (дифференциальные уравнения, приближенные и численные методы, история математики).
- ЕРШОВ Андрей Петрович (р. 19.IV 1931, Москва), ок. Моск. ун-т (1954), асп. там же (1957), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р физ.-мат. н. (1968), действ. чл. Ассоц. вычисл. техн. (США) (1965), в 1954—1960 работал в ВЦ АН СССР, с 1959 работает в ВЦ СО АН СССР, с 1962 — также в Новосиб. ун-те (программирование, вычислительная математика).
- ЕРШОВ Юрий Леонидович (р. 1.V 1940, Новосибирск), ок. Новосиб. ун-т (1963), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1963 работает в Ин-те мат. СО АН СССР (алгебра, математическая логика).
- ЕФИМОВ Александр Васильевич (р. 10.XI 1924, с. Наумово, н. Горьк. обл.), ок. Горьк. ун-т (1951), асп. Мат. ин-та АН СССР (1957), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1964), в 1957—1958 работал в Кемеров. горн.

- ин-те, с 1963 работает в Моск. лесотехн. ин-те (теория функций действительного переменного).
- ЕФИМОВ Николай Владимирович** (р. 31.V 1910, Оренбург), ок. Сев.-Кавказ. ун-т (1931), асп. Моск. ун-та (1934), д-р физ.-мат. н. (1940), проф. (1940), лауреат Междунар. премии им. Н. И. Лобачевского (1951), лауреат Ленинск. премии (1966), в 1934—1941 работал в Воронеж. ун-те, 1941—1943 — в Воронеж. авиац. ин-те, 1943—1953 — в Моск. лесотехн. ин-те, с 1946 работает в Моск. ун-те (геометрия, история математики).
- ЕФРЕМОВИЧ Вадим Арсеньевич** (р. окт. 1903, г. Жмеринка, н. Винницк. обл.), ок. Моск. ун-т (1924), асп. там же (1929), канд. физ.-мат. н. (1929), проф. (1933), д-р физ.-мат. н. (1966), в 1929—1937 работал в Моск. высш. техн. уч-ще, 1944—1949 — в Моск. текст. ин-те, 1949—1957 — в Иванов. пед. ин-те, 1957—1962 — в Моск. инж.-физ. ин-те, с 1962 работает в Мат. ин-те АН СССР (топология, геометрия).
- ЖАУТЫКОВ Орымбек Ахметбекович** (р. 1.V 1911, аул № 2, н. Караганд. обл.), ок. Казах. пед. ин-т (1934), канд. физ.-мат. н. (1944), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1961), акад. АН КазССР (1962), в 1934—1945 работал в Казах. пед. ин-те, с 1945 работает в Ин-те мат. и мех. АН КазССР (дифференциальные уравнения, история математики).
- ЖЕГАЛКИН Иван Иванович** (3.VIII 1869, г. Мценск, н. Орлов. обл. — 28.III 1947), ок. Моск. ун-т (1893), магистр чист. мат. (1907), д-р физ.-мат. н., проф., засл. д. н. РСФСР (1945), с 1902 работал в Моск. ун-те (математическая логика и основания математики, теория функций действительного переменного).
- ЖЕМАЙТИС Зигмас Юозович** (р. 8.XI 1884, д. Дактарай, н. ЛитССР), ок. Новорос. ун-т (1909), проф. (1946), засл. д. н. ЛитССР (1959), засл. д. культуры ЛитССР (1964), в 1922—1940 работал в Каунас. ун-те, с 1946 работает в Вильнюс. ун-те (история математики).
- ЖИЖИАШВИЛИ Леван Владимирович** (р. 12.XII 1933, с. Хорхи ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1956), асп. там же, д-р физ.-мат. н. (1968), работает в Тбил. ун-те (теория функций действительного переменного, математический анализ).
- ЖИТОМИРСКИЙ Яков Исаакович** (р. 2.I 1932, Киев), ок. Киев. ун-т (1954), асп. Моск. ун-та (1959), канд. физ.-мат. н. (1959), д-р физ.-мат. н. (1967), проф. (1968), с 1960 работает в Харьк. автодор. ин-те (дифференциальные уравнения в частных производных).
- ЖУКОВСКИЙ Николай Егорович** (17.I 1847, с. Орехово, н. г. Орехово-Зуево Моск. обл. — 17.III 1921), ок. Моск. ун-т (1868), магистр прикл. мат. (1876), д-р прикл. мат. (1882), проф. (1886), чл.-корр. Петерб. АН (1894), с 1872 работал в Моск. высш. техн. уч-ще, с 1885 — также в Моск. ун-те, с 1905 — президент Моск. мат. о-ва (теория функций комплексного переменного, гидроаэродинамика, дифференциальные уравнения, прикладная математика).
- ЖУРАВЛЁВ Юрий Иванович** (р. 14.I 1935, Воронеж), ок. Моск. ун-т (1957), асп. там же (1959), канд. физ.-мат. н. (1960), д-р физ.-мат. н. (1965), лауреат Ленинск. премии (1966), с 1959 работает в Ин-те мат. СО АН СССР (математическая логика, электронные вычислительные машины).
- ЖУРАВСКИЙ Андрей Митрофанович** (р. 13.XII 1892, Чернигов), ок. Петрогр. ун-т (1915), проф. (1937), д-р техн. н. (1958), с 1916 работает в Ленингр. горн. ин-те (приближенные и численные методы, теория вероятностей, теория функций действительного переменного).
- ЗАБРЕЙКО Петр Петрович** (р. 3.II 1939, Воронеж), ок. Воронеж. ун-т (1961), асп. там же (1964), канд. физ.-мат. н. (1964), д-р физ.-мат. н. (1968), в 1963—1966 работал в Воронеж. ун-те, с 1967 работает в Ин-те автом. и телемех. АН СССР (функциональный анализ, дифференциальные и интегральные уравнения).
- ЗАГРЕБИН Дмитрий Владимирович** (р. 7.I 1908, Вильно), ок. Ленингр. ун-т (1937), асп. Астрон. ин-та АН СССР (1940), д-р физ.-мат. н. (1950), проф. (1965), в 1940—1956 работал в Астрон. ин-те АН СССР и Ленингр. ун-те, 1956—1963 — в Астрон. обсерватории АН СССР, с 1963 работает в Ленингр. ин-те сов. торговли (прикладная математика, теоретическая астрономия).
- ЗАДИРАКА Константин Васильевич** (20.V 1911, с. Ингулка, н. Николаев. обл. — 3.III 1967), ок. Николаев. ИНО (1930), Киев. ун-т (1939), канд. физ.-мат. н.

- (1950), д-р физ.-мат. н. (1966), в 1946—1967 работал в Ин-те мат. АН УССР и Киев. ун-те (дифференциальные уравнения, приближенные и численные методы).
- ЗАЕЗДНЫЙ** Александр Михайлович (р. 7.IX 1916, Киев), ок. Киев. политехн. ин-т (1939), канд. техн. н. (1948), д-р техн. н. (1965), проф. (1965), с 1948 работает в Ленингр. электротехн. ин-те связи (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения, прикладная математика).
- ЗАЛГАЛЛЕР** Виктор Абрамович (р. 25.XII 1920, д. Парфино, н. Новгород. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1948), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1963), с 1948 работает в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР (геометрия, приближенные и численные методы).
- ЗАЛТС (ЗАЛТ)** Карл Яковлевич (22.III 1885—28.VI 1953), ок. Киев. политехн. ин-т (1912) и Латв. ун-т (1936), магистр мат., д-р инж. н., с 1921 работал в Латв. ун-те (номография).
- ЗАПОЛЬСКАЯ** Любовь Николаевна (р. 7.VIII 1871, с. Сурки, н. Рязан. обл.), ок. Петерб. высш. женск. курсы (1894), Геттинген. ун-т (1901), д-р филос. (Геттинген, 1901), магистр чист. мат. (1905), проф. (1905), в 1903—1919 работала на Моск. высш. женск. курсах, 1919—1923 — в Рязан. ИНО, 1923—1925 — в Саратов. ун-те, 1925—1930 — в Ярослав. пед. ин-те (математический анализ).
- ЗАРИЦКИЙ** Мирон Онуфриевич (23.V 1889, с. Могильница, н. Тернополь. обл.— 19.VIII 1961), ок. Венск. (1907) и Львов. (1911) ун-ты, д-р филос. (1930), проф. (1945), канд. физ.-мат. н. (1947), в 1939—1961 работал во Львов. ун-те (математический анализ, алгебра).
- ЗВОЛИНСКИЙ** Никита Вячеславович (р. 26.II 1906, Ярославль), уч. в Моск. ун-те, ок. асп. там же (1941), д-р физ.-мат. н. (1950), проф., в 1933—1941 работал в ЦАГИ, 1944—1965 — в Ин-те геофиз. АН СССР, с 1965 работает в Ин-те проблем мех. АН СССР (прикладная математика, механика).
- ЗЕЙЛИГЕР** Дмитрий Николаевич (24. V 1864—25.VI 1936), ок. Новорос. ун-т (1887), д-р прикл. мат. (1895), проф. (1895), засл. д. н. РСФСР (1927), в 1890—1892 работал в Новорос. ун-те, в 1892—1914, 1917—1929 — в Казан. ун-те, 1914—1917 — в Петрогр. ун-те, 1929—1933 — в Донецк. горн. ин-те, 1933—1936 — в Донск. индустр. ин-те (геометрия, прикладная математика).
- ЗЕРАГИЯ** Поликарп Константинович (р. 25.III 1912, г. Потти, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1934), асп. там же (1937), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р физ.-мат. н. (1957), проф. (1959), с 1951 работает в Тбил. ун-те (дифференциальные и интегральные уравнения, приближенные и численные методы).
- ЗМОРОВИЧ** Валентин Анатольевич (р. 6.IX 1909, Киев), ок. Киев. физ.-хим. -мат. ин-т (1932), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1951), с 1932 работает в Киев. политехн. ин-те (теория функций, приближенные и численные методы).
- ЗОЛОТАРЕВ** Владимир Михайлович (р. 27.II 1931, Москва), ок. Моск. ун-т (1954), асп. там же (1957), канд. физ.-мат. н. (1958), д-р физ.-мат. н. (1967), в 1957—1961 работал в Моск. физ.-техн. ин-те, с 1961 работает в Мат. ин-те АН СССР (теория вероятностей).
- ЗУБАРЕВ** Дмитрий Николаевич (р. 27.XI 1917, Москва), ок. Моск. ун-т (1941), асп. там же (1948), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1969), с 1954 работает в Мат. ин-те АН СССР (прикладная математика, статистическая и нелинейная механика).
- ЗУБОВ** Василий Павлович (1.VIII 1899, г. Александров, н. Владимир. обл.— 8. IV 1963), ок. Моск. ун-т (1922), д-р искусствовед. (1946), акад. Междунар. акад. ист. наук (1960), лауреат медали им. Дж. Сартона (1963), с 1945 работал в Ин-те ист. естествозн. и техн. АН СССР (история математики).
- ЗУБОВ** Владимир Иванович (р. 14.IV 1930, г. Кашира, Моск. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1933), асп. там же (1955), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1963), лауреат Гос. премии (1968), с 1955 работает в Ленингр. ун-те (дифференциальные уравнения, прикладная математика).
- ЗУХОВИЦКИЙ** Семен Израилевич (р. 17.VI 1908, м. Олькиники, н. Вильнюс. обл.), ок. Киев. ИНО (1929), д-р физ.-мат. н. (1952), проф. (1953), в 1952—1957 работал в Луцк. пед. ин-те, 1963—1965 — в Киев. пед. ин-те, с 1965 работает

- в Моск. инж.-строит. ин-те (теория функций, функциональный анализ, приближенные и численные методы).
- ЗЫКОВ Александр Александрович** (р. 4.VIII 1922, Киев), ок. Горьк. ун-т (1945), асп. Моск. ун-та (1950), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1965), в 1954—1958 работал в Моск. физ.-техн. ин-те, с 1958 работает в Мат. ин-те СО АН СССР (математическая логика, комбинаторный анализ, топология).
- ЗЫЛЕВ Владимир Петрович** (29.VII 1883, г. Сарапул, н. УАССР — 2.XII 1952), ок. Казан. ун-т (1909), канд. физ.-мат. н. (1936), проф. (1946), в 1911—1921 работал в Томск. политехн. ин-те, с 1923 — в Моск. ин-те инж. ж.-д. трансп. (алгебра, приближенные и численные методы).
- ИБРАГИМОВ Ибрагим Ибишевич** (р. 28.II 1912, с. Гаргабазар, н. АзССР), ок. Азерб. пед. ин-т (1935), асп. Моск. ун-та (1939), канд. физ.-мат. н. (1939), д-р физ.-мат. н. (1948), проф. (1948), чл.-корр. АН АзССР (1959), акад. АН АзССР (1968), в 1939—1962 работал в Азерб. пед. ин-те, с 1957 работает в Ин-те мат. и мех. АН АзССР (с 1959 — директор) (теория функций).
- ИБРАГИМОВ Ильдар Абдуллович** (р. 15.VII 1932, Ленинград), ок. Ленингр. ун-т (1956), асп. там же (1959), канд. физ.-мат. н. (1960), д-р физ.-мат. н. (1967), проф. (1967), лауреат Ленинск. премии (1970), с 1959 работает в Ленингр. ун-те (теория вероятностей).
- ИВАНЕНКО Дмитрий Дмитриевич** (р. 29.VII 1904, Полтава), ок. Ленингр. ун-т, проф. (1931), д-р физ.-мат. н. (1940), лауреат Гос. премии (1950), с 1942 работает в Моск. ун-те (применение геометрических методов в квантовой механике).
- ИВАНОВ Александр Александрович** (р. 27.X 1904, с. Лух, н. Иванов. обл.), ок. Ярослав. пед. ин-т (1927), асп. Моск. ун-та (1931), асп. ВНИРО (1937), д-р физ.-мат. н. (1954), проф. (1963), в 1937—1942 работал в Ин-те теор. геодезии АН СССР, 1942—1949 — в Мор. гидрофиз. лабор. АН СССР, 1949—1963 — в Мор. гидрофиз. ин-те АН СССР (1960—1963 — директор), с 1963 работает в Заочн. ин-те сов. торговли (методика математики, прикладная математика).
- ИВАНОВ Валентин Константинович** (р. 1.X 1908, Петербург), ок. Уральск. политехн. ин-т (1930) и Ленингр. ун-т (1938), канд. физ.-мат. н. (1942), ок. докт. Мат. ин-та АН СССР (1955), д-р физ.-мат. н. (1955), проф. (1956), лауреат Ленинск. премии (1966), в 1938—1947 работал в Свердловск. горн. ин-те, с 1947 работает в Уральск. ун-те, с 1955 — в Свердловск. отд. Мат. ин-та АН СССР (алгебра, математическая физика, теория функций комплексного переменного).
- ИВАНОВ Виктор Владимирович** (р. 8.VI 1929, Самара), ок. Ростов. ун-т (1952), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1958 работает в Ин-те кибернетики АН УССР (теория функций, прикладная математика, интегральные уравнения).
- ИВАНОВ Иван Иванович** (11.VIII 1862, Петербург — 20.XII 1939), ок. Петерб. учит. ин-т (1881), Петерб. ун-т (1886), магистр. чист. мат. (1891), д-р чист. мат. (1902), проф. (1902), чл.-корр. АН СССР (1924), засл. д. н. РСФСР (1933), с 1891 работал в Петерб. ун-те, с 1896 — на Высш. женск. курсах, с 1902 — в Ленингр. политехн. ин-те (теория чисел, алгебра, математический анализ).
- ИВАХНЕНКО Алексей Григорьевич** (р. 30.III 1913, г. Кобеляки, н. Полтав. обл.), ок. Ленингр. электротехн. ин-т (1938), асп. Моск. ун-та (1943), канд. техн. н. (1943), д-р техн. н. (1954), проф. (1954), чл.-корр. АН УССР (1961), в 1938—1941 работал во Всесоюзн. электротехн. ин-те, с 1944 работает в АН УССР, с 1962 — в Ин-те кибернетики АН УССР (техническая кибернетика, теория автоматического управления).
- ИВЛЕВ Дюис Данилович** (р. 6.IX 1930, г. Чебоксары), ок. Моск. ун-т (1953), асп. там же (1956), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1961), в 1957—1958 работал в Ин-те мех. АН СССР, 1959—1966 — в Воронеж. ун-те, с 1966 работает в Моск. высш. техн. уч-ще (прикладная математика).
- ИГНАТОВСКИЙ Владимир Сергеевич** (р. 20.III 1875, Тифлис), проф., чл.-корр. АН СССР (1932), д-р физ.-мат. н. (1934), с 1919 работал в Ленингр. ун-те и Гос. оптич. ин-те (математическая физика, операционное исчисление).
- ИГНАТЬЕВ Николай Константинович** (р. 27.XI 1914, г. Кобеляки, н. Полтав. обл.), ок. Моск. электротехн. ин-т связи (1940), канд. техн. н. (1949), д-р техн. н.

- (1965), проф. (1966), с 1966 работает во Всесоюзн. заочн. политехн. ин-те (геометрия, прикладная математика).
- ИДЕЛЬСОН** Наум Ильич (14.III 1885 — 14.VII 1951), проф., работал в Ленингр. ун-те и Пулков. обсерватории (история математики и астрономии, теоретическая астрономия).
- ИЗВОЛЬСКИЙ** Николай Александрович (1870, г. Елифань, н. Тульск. обл. — 27.IX 1938), ок. Моск. ун-т (1893), магистр мат. (1898), проф. (1922), в 1922 работал во 2-м Моск. ун-те, с 1924 — в Ярослав. пед. ин-те (геометрия).
- ИЛЬИН** Валентин Петрович (р. 21.XI 1921, д. Новая, н. Ленингр. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1948), асп. там же (1951), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1965), с 1950 работает в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения, функциональный анализ, приближенные и численные методы).
- ИЛЬИН** Владимир Александрович (р. 2.V 1928, г. Козельск, н. Калуж. обл.), ок. Моск. ун-т (1950), асп. там же (1953), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1958), с 1953 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения, теория функций).
- ИЛЬЮШИН** Алексей Антонович (р. 20.I 1911, Казань), ок. Моск. ун-т (1933), асп. там же (1937), д-р физ.-мат. н. (1938), проф. (1938), чл.-корр. АН СССР (1943), лауреат Гос. премии (1948), с 1943 работает в Моск. ун-те (прикладная математика, механика сплошных сред, теория устойчивости пластин и оболочек, теория малых упруго-пластических деформаций).
- ИМАНАЛИЕВ** Мурзабек (р. 13.IX 1931, с. Чон-Кемин, н. КиргССР), ок. Киргиз. ун-т (1953), асп. Моск. ун-та (1955), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1965), проф. (1965), чл.-корр. АН КиргССР (1969), работает в Киргиз. ун-те и Фрунзен. политехн. ин-те (дифференциальные и интегральные уравнения).
- ИОХВИДОВ** Иосиф Семенович (р. 20.VIII 1919, Одесса), ок. Одесск. ун-т (1941), асп. Одесск. ин-та инж. мор. фл. (1949), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1967), проф. (1968), работает в Воронеж. ун-те (функциональный анализ).
- ИШЛИНСКИЙ** Александр Юльевич (р. 6.VIII 1913, Москва), ок. Моск. ун-т (1935), асп. там же (1938), д-р физ.-мат. н. (1943), проф. (1945), акад. АН УССР (1948), акад. АН СССР (1960), Герой Соц. Труда, лауреат Ленинск. премии (1960), в 1935—1948 работал в Моск. ун-те, 1948—1955 — в Ин-те мат. АН УССР, с 1955 работает в Моск. ун-те, с 1964 — также в Ин-те проблем мех. АН СССР (директор) (прикладная математика, теория упругости, механика, теория гироскопов, теория колебаний, история механики).
- КАБУЛОВ** Васил Кабулович (р. 9.IX 1921, Ташкент), ок. Ташкент. ин-т инж. ж.-д. трансп. (1949), асп. Ин-та сооружений АН УзССР (1950), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), чл.-корр. АН УзССР (1962), акад. АН УзССР (1966), с 1967 — академик-секретарь Отд. физ.-техн. и мат. наук АН УзССР, с 1952 работает в Ин-те мат. и Ин-те мех. АН УзССР, с 1966 — также в Ин-те кибернетики АН УзССР (директор) (интегральные и дифференциальные уравнения).
- КАГАН** Вениамин Федорович (9.III 1869, г. Шавли, н. г. Шяуляй ЛитССР — 8.V 1953), ок. Киев. ун-т (1892), магистр. чист. мат. (1904), д-р чист. мат. (1907), проф. (1923), засл. д. н. РСФСР (1929), лауреат Гос. премии (1942), в 1904—1923 работал в Одесск. ун-те, с 1923 — в Моск. ун-те (дифференциальная геометрия, основания геометрии, тензорный анализ).
- КАДЕЦ** Михаил Иосифович (р. 30.XI 1923, Киев), ок. Харьк. ун-т (1950), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1964), в 1957—1960 работал в Харьк. автодор. ин-те, с 1965 работает в Харьк. ин-те инж. коммун. строит. (функциональный анализ, теория функций действительного переменного).
- КАЛАНДИЯ** Аполлон Иосифович (р. 22.IX 1919, с. Хоби, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1941), асп. Тбил. мат. ин-та АН ГрССР (1947), д-р физ.-мат. н. (1956), проф. (1958), в 1950—1957 работал в Тбил. мат. ин-те АН ГрССР, с 1957 работает в Тбил. ун-те и ВЦ АН ГрССР (прикладная математика, теория упругости, приближенные и численные методы).

- КАЛИНИН Степан Васильевич** (р. 23.XII 1898, с. Вертуновка, н. Пензен. обл.), ок. Моск. ун-т (1929), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р физ.-мат. н. (1958), с 1953 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения, механика).
- КАЛУЖНИН Лев Аркадьевич** (р. 31.I 1914, Москва), ок. Париж. ун-т (1948), д-р мат. (1948), д-р физ.-мат. н. (1957), проф. (1957), в 1946—1951 работал в Нац. центре научн. исслед. (Париж), 1951—1955—в Берлин. ун-те (ГДР), с 1955 работает в Киев. ун-те (алгебра, теория алгоритмов, математическая лингвистика).
- КАМАЛОВ Махкам Камалович** (р. 25.IX 1912, Ташкент), ок. Средаз. ун-т (1937), канд. физ.-мат. н. (1941), проф. (1962), в 1937—1941 работал в Ташкент. вечерн. пед. ин-те, 1941—1956 — в Средаз. ун-те, с 1956 работает в Ташкент. электротехн. ин-те связи (математическая статистика, теория функций).
- КАМЕНКОВ Георгий Владимирович** (4.I 1908, ст. Ночка Моск. ж.-д. — 9. X 1966), ок. Казан. ун-т (1930), асп. там же (1933), канд. физ.-мат. н. (1933), д-р физ.-мат. н. (1937), проф. (1938), в 1932—1949 работал в Казан. авиац. ин-те, 1941—1943 — в Казан. фил. ЦАГИ, с 1949 — в Моск. авиац. ин-те (дифференциальные уравнения).
- КАНГРО Гуннар Фромхольдович** (р. 21.XI 1913, г. Дерпт, н. Тарту ЭССР), ок. Тартуск. ун-т (1935), д-р физ.-мат. н. (1948), проф. (1951), чл.-корр. АН ЭССР (1961), засл. д. н. ЭССР (1965), в 1936—1941 работал в Таллин. политехн. ин-те, с 1944 работает в Тартуск. ун-те (теория функций действительного переменного, математический и функциональный анализ).
- КАНТОРОВИЧ Леонид Витальевич** (р. 19.I 1912, Петербург), ок. Ленингр. ун-т (1930), проф. (1934), д-р физ.-мат. н. (1935), чл.-корр. АН СССР (1958), акад. АН СССР (1964), лауреат Гос. премии (1949), Ленинск. премии (1965), почетн. д-р Гренобль. ун-та (1967), в 1930—1939 работал в Ленингр. ин-те инж. пром. строит., 1932—1964 — в Ленингр. ун-те, 1940—1964 — также в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, с 1964 работает в Ин-те мат. СО АН СССР и Новосиб. ун-те (теория функций, дифференциальные и интегральные уравнения, функциональный анализ, вариационное исчисление, приближенные и численные методы, программирование, электронные вычислительные машины).
- КАРАЦУБА Анатолий Алексеевич** (р. 31.I 1937, Грозный), ок. Моск. ун-т (1959), асп. там же (1962), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1966 работает в Мат. ин-те АН СССР (теория чисел, теория автоматов, математическая кибернетика).
- КАРГАПОЛОВ Михаил Иванович** (р. 9.XI 1928, д. Русакова, н. Курган. обл.), ок. Уральск. ун-т (1951), асп. Перм. ун-та (1955), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1963), чл.-корр. АН СССР (1966), в 1954—1960 работал в Перм. ун-те, с 1960 работает в Ин-те мат. СО АН СССР, с 1967 — также в Новосиб. ун-те (алгебра).
- КАРИМОВ Джамал Худайбердиевич** (р. 22.II 1909, г. Скобелев, н. Фергана УзССР), ок. Узбек. ун-т (1935), канд. физ.-мат. н. (1940), проф. (1962), с 1950 работает в Ферган. пед. ин-те (дифференциальные уравнения).
- КАРПЕЛЕВИЧ Фридрих Израилевич** (р. 2.X 1927, Москва), ок. Моск. ун-т (1952), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1966), с 1953 работает в Моск. ин-те инж. ж.-д. трансп. (алгебра, алгебраическая топология, геометрия).
- КАРЫ-НИЯЗОВ Ташмухамед Ниязович** (2.IX 1896—17.III 1970), ок. Средаз. ун-т (1929), проф. (1931), акад. АН УзССР (1943), засл. д. н. УзССР (1939), лауреат Гос. премии (1952), Герой Соц. Труда (1967), в 1929—1933 работал в Средаз. ун-те, с 1940 — в АН УзССР (1943—1946 — президент), с 1946 — также в Ташкент. ин-те инж. ирригации и механизации с. х. (аналитическая геометрия, история математики, история астрономии).
- КАТИЛЮС Петрас Иозаса** (р. 7.IV 1903, р-н Мариямполе, н. г. Капсукас ЛитССР), ок. Каунас. (1926) и Гейдельберг. (1929) ун-ты, д-р естествозн. Гейдельберг. ун-та (1930), канд. физ.-мат. н. (1946), проф. (1968), в 1926—1940 работал в Каунас. ун-те, с 1940 работает в Вильнюс. ун-те (дифференциальная геометрия).
- КАЦ Георгий Исаакович** (р. 2.V 1924, Одесса), ок. Киев. ун-т (1946), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1965) (функциональный анализ, алгебра).
- КВАЛЬВАССЕР Владимир Исаакович** (р. 14.IX 1899), ок. Ростов. ун-т (1925), канд. техн. н. (1938), проф. (1961), в 1931—1939 работал в Новочеркасск.

- политехн. ин-те, с 1939 работает в Куйбышев. политехн. ин-те (операционное исчисление, дифференциальные уравнения).
- КВЕСЕЛАВА** Давид Александрович (р. 25.VIII 1911, с. Лецицхване, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1937), асп. Тбил. мат. ин-та (1940), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1951), засл. д. н. ГрССР (1966), с 1940 работает в Тбил. ун-те, Тбил. мат. ин-те АН ГрССР и ВЦ АН ГрССР (топология, математическая логика, геометрия).
- КЕЛДЫШ** Людмила Всеволодовна (р. 12.III 1904, Оренбург), ок. Моск. ун-т (1925), асп. там же (1929), д-р физ.-мат. н. (1941), проф. (1964), с 1934 работает в Мат. ин-те АН СССР (топология, теория функций действительного переменного, математическая логика).
- КЕЛДЫШ** Мстислав Всеволодович (р. 10.II 1911, Рига), ок. Моск. ун-т (1931), проф. (1937), д-р физ.-мат. н. (1938), чл.-корр. АН СССР (1943), акад. АН СССР (1946), дважды лауреат Гос. премии (1942, 1946), лауреат Ленинск. премии (1957), дважды Герой Соц. Труда (1956, 1961), акад. АН МНР (1961), чл. Польск. АН (1962), действ. чл. Чехослов. АН (1962), почетн. д-р Вроцлав. ун-та (1964), почетн. чл. АН СРР (1965), чл. Леопольдина (ГДР) (1965), почетн. иностр. чл. Амер. акад. искусств и наук (1966), Болгар. АН (1966), чл.-корр. Саксон. АН в Лейпциге (1966), Герм. АН (1966), почетн. чл. Делийск. ун-та (1967), почетн. д-р Будапешт. ун-та (1967), с 1936 работает в АН СССР (с 1961—президент) (теория функций, дифференциальные и интегральные уравнения, функциональный анализ, топология, численные и приближенные методы, прикладная математика, гидроаэродинамика).
- КЕЛЬЗОН** Анатолий Саулович (р. 13.X 1908, Ростов-на -Дону), ок. Ленингр. ин-т инж. гражд. возд. фл. (1931), канд. техн. н. (1940), д-р техн. н. (1963), проф. (1964), в 1933—1951 работал в Ленингр. политехн. ин-те, с 1955 работает в Ленингр. высш. инж. мор. уч-ще (кибернетика).
- КЕМХАДЗЕ** Шота Степанович (р. 14.II 1917, г. Кобулет, н. АджАССР), ок. Кутаис. пед. ин-т (1939), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1939 работает в Батум. пед. ин-те (алгебра, методика математики).
- КЕРЕС** Харальд Петрович (р. 15.XI 1912, г. Пернов, н. г. Пярну ЭССР), ок. Тартуск. ун-т (1936), д-р физ.-мат. н. (1949), проф. (1954), акад. АН ЭССР (1961), в 1949—1960 работал в Тартуск. ун-те, с 1960 работает в Ин-те физ. и астрон. АН ЭССР (прикладная математика, теория относительности).
- КЕРОПЯН** Кирилл Кириллович (р. 18.I 1915, Петроград), ок. Всесоюзн. ин-т маслосойно-маргарин. пром. (1936), асп. Краснодар. хим.-технол. ин-та (1941), канд. техн. н. (1942), д-р техн. н. (1954), проф. (1955), работал в Краснодар. ин-те пищ. пром., Ереван. политехн. ин-те, с 1954 работает в Ростов. инж.-строит. ин-те (теория функций действительного переменного, прикладная математика, электро моделирование).
- КИБЕЛЬ** Илья Афанасьевич (р. 19.X 1904—5.IX. 1970), ок. Саратов. ун-т (1925), чл.-корр. АН СССР (1943), лауреат Гос. премии (1941) (дифференциальные уравнения, алгебра, прикладная математика, газовая динамика).
- КИЛЬЧЕВСКИЙ** Николай Александрович (р. 15.VI 1909, г. Каменец-Подольский, н. Хмельницк. обл.), ок. Киев. физ.-хим.-мат. ин-т (1933), асп. Киев. ун-та (1936), канд. физ.-мат. н. (1936), ок. докт. Ин-та мат. АН УССР (1939), д-р физ.-мат. н. (1941), проф. (1941), чл.-корр. АН УССР (1961), акад. АН УССР (1969), в 1933—1941 работал в Киев. политехн. ин-те, 1941—1944 — Ташкент. ин-те инж. ж.-д трансп., с 1944 работает в Киев. политехн. ин-те, с 1958 — также в Ин-те мех. АН УССР (аналитические методы в механике, механика сплошной среды, теория упругости).
- КИМ** Енгван Инсугович (р. 12.XI 1911, Хасанский р-н, н. Приморск. края), ок. Моск. ун-т (1937), канд. физ.-мат. н. (1942), д-р физ.-мат. н. (1959), проф. (1960), чл.-корр. АН КазССР (1962), с 1964 работает в Ин-те мат. и мех. АН КазССР (дифференциальные уравнения, операционное исчисление).
- КИПРИЯНОВ** Иван Александрович (р. 20.VIII 1923, с. Кузнецкое, н. Челяб. обл.), ок. Челяб. пед. ин-т (1949), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1965), проф. (1966), в 1956—1960 работал в Воронеж. лесотехн. ин-те, с 1960 работает в Воронеж. технол. ин-те (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения).

- КИРИЛЛОВ Александр Александрович** (р. 9. V 1936, Москва), ок. Моск. ун-т (1959), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1964), работает в Моск. ун-те и Ин-те прикл. мат. АН СССР (алгебра).
- КИРИЛЛОВА Фаина Михайловна** (р. 29. IX 1931, пос. Зуевка Киров. обл.), ок. Уральск. ун-т (1954), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р физ.-мат. н. (1968), в 1954—1960 работала в Уральск. политехн. ин-те, 1962—1967 — в Уральск. фил. АН СССР, с 1967 работает в Ин-те мат. АН БССР (теория оптимальных процессов, функциональный анализ).
- КИСЛИЦЫН Сергей Георгиевич** (р. 19. V 1907, Ташкент), ок. Ленингр. пед. ин-т (1930), асп. там же (1937), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р физ.-мат. н. (1959), проф. (1960), в 1934—1961 работал в Ленингр. пед. ин-те, с 1961 работает в Севастополе. приборостроит. ин-те (дифференциальные уравнения в частных производных, проективная геометрия, прикладная математика).
- КОБРИНСКИЙ Натан Ефимович** (р. 15. IX 1910, г. Волковыск, н. Гроднен. обл.), ок. Моск. ин-т силикатов (1931), канд. техн. н. (1939), д-р техн. н. (1943), проф. (1944), в 1934—1941 работал в Моск. авиац. технол. ин-те, 1939—1950 — в АН СССР, 1951—1959 — в Пенз. политехн. ин-те, 1959—1965 — в Госплане СССР, 1965—1968 — в Моск. инж.-экон. ин-те, с 1968 работает в Моск. экон.-стат. ин-те (математическая кибернетика, теория механизмов и машин).
- КОВАЛЕНКО Анатолий Дмитриевич** (р. 16. I 1905, Киев), ок. Киев. политехн. ин-т (1929), асп. там же (1938), канд. техн. н. (1938), д-р техн. н. (1947), проф. (1949), чл.-корр. АН УССР (1951), акад. АН УССР (1961), засл. д. н. и т. УССР (1964), с 1935 работает в Ин-те мех. АН УССР, с 1949 — также в Киев. ун-те (математические методы в механике, теория пластин и оболочек).
- КОВАЛЕНКО Игорь Николаевич** (р. 16. III 1935, Киев), ок. Киев. ун-т (1957), канд. физ.-мат. н. (1960), д-р техн. н. (1964), проф. (1965), с 1963 работает во Всесоюзн. ин-те научн. и техн. информации АН УССР (теория вероятностей).
- КОВАНЦОВ Николай Иванович** (р. 2. XI 1924, хут. Соколов, н. Уральск. обл.), ок. Кзыл-Ординск. пед. ин-т (1944), канд. физ.-мат. н. (1948), ок. докт. Моск. ун-та (1957), д-р физ.-мат. н. (1959), проф. (1960), в 1944—1950 работал в Кзыл-Ординск. пед. ин-те, 1950—1960 — в Запорож. пед. ин-те, с 1960 работает в Киев. ун-те (геометрия).
- КОВАНЬКО Александр Сергеевич** (р. 18. VII 1893, г. Константиноград, н. г. Красноград Харьк. обл.), ок. Моск. ун-т (1915), асп. там же (1918), проф. (1926), канд. физ.-мат. н. (1936), д-р физ.-мат. н. (1938), в 1918—1919 работал в Киев. политехн. ин-те, 1920—1926 — в Крым. ун-те, 1926—1932 и 1936—1938 — в Азерб. ун-те, 1932—1935 — Ленингр. ун-те, 1935—1936 — в Томск. ун-те, 1938—1945 — в Иванов. текстильн. ин-те, с 1945 работает во Львов. ун-те (теория функций).
- КОВНЕР Семен Самсонович** (22. II 1896, Москва — 1962), ок. Моск. ун-т (1921), асп. там же (1928), проф. (1931), д-р техн. н. (1959), в 1920—1937 и с 1949 работал в Моск. текстильн. ин-те, 1938—1949 — в Ин-те теор. геофиз. АН СССР (прикладная математика).
- КОВТУН Дмитрий Георгиевич** (р. 12. IX 1907, г. Минусинск, н. Красноярск. края), ок. Донецк. ИНО (1931), Донецк. мех.-машиностр. ин-т (1931), асп. Харьк. ун-та (1935), канд. физ.-мат. н. (1940), проф. (1963), с 1935 работает в Харьк. ин-те инж. ж.-д. трансп. (дифференциальные уравнения в частных производных, прикладная математика).
- КОЗЛОВ Владимир Яковлевич** (р. 28. VI 1914, Москва), ок. Моск. ун-т (1937), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1952) чл.-корр. АН СССР (1966), в 1942—1951 работал в вузах Москвы, с 1951 работает в Моск. ун-те (теория функций действительного переменного, функциональный анализ).
- КОЛМОГОРОВ Андрей Николаевич** (р. 25. IV 1903, Тамбов), ок. Моск. ун-т (1925), асп. там же (1929), проф. (1930), д-р физ.-мат. н. (1935), акад. АН СССР (1939), акад. АПН СССР (1968), президент Моск. мат. о-ва (1964—1966), чл. Польск. АН (1956), чл.-корр. АН СРР (1957), лауреат Гос. премии (1941), лауреат премии им. П. Л. Чебышева (1949), д-р Париж. ун-та (1955), Герой Соц. Труда (1963), лауреат Ленинск. премии (1965), иностр. чл. Нац. АН (США) (1967), лауреат премии им. Больцано (1963), почетн. чл. Моск. (1953), Индийск. и Калькутск. (1962) мат. о-в, с 1929 работает в Моск. ун-те, с 1939 — также в Мат. ин-те АН

- СССР (теория функций, теория множеств, теория вероятностей и математическая статистика, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, геометрия, топология, теория автоматического регулирования, приближенные и численные методы, основания математики и математическая логика, методика математики, философские вопросы математики, история математики).
- КОЛМОГОРОВ Николай Андреевич (р. 10.III 1897, г. Верный, н. Алма-Ата — 17.V 1965), ок. Казах. пед. ин-т (1932), канд. физ.-мат. н. (1939), проф., с 1938 работал в Киров. пед. ин-те (геометрия).
- КОЛОСОВ Гурий Васильевич (12.VIII 1897, с. Устье, н. Новгород. обл. — 7.XI 1936), ок. Петерб. ун-т (1889), магистр чист. мат. (1903), д-р чист. мат. (1910), проф. (1911), чл.-корр. АН СССР (1931), в 1903—1913 работал в Юрьев. ун-те, с 1913—в Петерб. электротехн. ин-те, с 1916 — в Ленингр. ун-те (теория функций комплексного переменного, теория упругости, механика твердого тела).
- КОЛЬМАН Эрнест (р. 6.XII 1892, Прага), ок. Карлов ун-т (1913), д-р филос. н. (1934), проф. (1939), чл. Чехослов. АН (1960), чл. Амер. ин-та марксистских исслед. (1964), в 1929—1935 работал в Ком. акад., 1938—1945 — в Моск. энергетич. ин-те, 1945—1952 — в Праж. ун-те, 1952, 1953 — в Моск. автомех. ин-те, 1953—1962 — в Ин-те ист. естествозн. и техн. АН СССР (история математики).
- КОН-ФОССЕН Стефан Эммануилович (1902, г. Вроцлав, н. ПНР — 25. VI 1936), работал в Геттинген. и Кельн. ун-тах, с 1934 — в Ленингр. ун-те и Мат. ин-те АН СССР (геометрия).
- КОНДРАТЬЕВ Александр Сергеевич (р. 15.IV 1908, д. Шадчино, н. Саратов. обл.), ок. Саратов. ун-т (1930), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1952), с 1933 работает в Куйбышев. политехн. ин-те (дифференциальные уравнения, теория колебаний).
- КОНДРАТЬЕВ Владимир Александрович (р. 2.VII 1935, Куйбышев), ок. Моск. ун-т (1957), асп. там же (1960), канд. физ.-мат. н. (1963), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1960 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения).
- КОНДРАШОВ Владимир Иосифович (р. 2.II 1909, Москва), ок. Моск. ун-т (1938), асп. там же (1941), канд. физ.-мат. н. (1942), д-р физ.-мат. н. (1951), пр. ф. (1953), в 1932—1934 работал в Ин-те холод. обраб. метал., 1941—1943 — в Моск. ун-те, 1948—1952 — в Моск. инж.-строит. ин-те, с 1952 работает в Моск. инж.-физ. ин-те (функциональный анализ, теория функций, дифференциальные и интегральные уравнения).
- КОНДУРАРЬ Владимир Трифонович (р. 22. VIII 1911, г. Бельцы, н. МССР), ок. Моск. ун-т (1934), асп. там же (1937), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), с 1946 работает в Иванов. энергетич. ин-те (дифференциальные уравнения в частных производных).
- КОНОНЕНКО Виктор Олимпанович (р. 11.IX 1918, г. Короча, н. Белгород. обл.), ок. Харьк. ин-т инж. ж.-д. трансп. (1942), асп. Ин-та мех. АН УССР (1949), канд. техн. н. (1949), д-р техн. н. (1954), проф. (1958), акад. АН УССР (1964), в 1946—1952 работал в Ин-те строит. мех. АН УССР, 1956—1962 — в Ин-те машиновед. АН СССР, 1962—1965 — в Моск. ун-те, с 1965 работает в Ин-те мех. АН УССР (теория колебаний, динамика механических систем).
- КОНТОРОВИЧ Петр Григорьевич (17.III 1905, г. Климовичи, н. Могилев. обл. — 27. II 1968), ок. Казан. ун-т (1930), асп. Моск. ун-та (1937), канд. физ.-мат. н. (1938), д-р физ.-мат. н. (1941), проф. (1941), с 1931 работал в Уральск. ун-те, с 1957 — председатель Уральск. мат. о-ва (алгебра).
- КОРДОНСКИЙ Хаим Борисович (р. 28.III 1919, Тула), ок. Ленингр. ун-т (1941), адъюнкт. Ленингр. в.-возд. акад. (1950), канд. техн. н. (1951), д-р техн. н. (1966), проф. (1967), с 1951 работает в Риж. ин-те инж. гражд. авиац. (теория вероятностей).
- КОРЕНБЛЮМ Борис Исаакович (р. 12.VIII 1923, Одесса), ок. Киев. ун-т (1946), асп. Ин-та мат. АН УССР (1947), канд. физ.-мат. н. (1947), д-р физ.-мат. н. (1956), проф. (1962), в 1947—1952 работал в Ин-те мат. АН УССР, с 1952 работает в Киев. инж.-строит. ин-те (функциональный анализ, теория функций).
- КОРЕНЕВ Борис Григорьевич (р. 24.VIII 1910, г. Екатеринослав, н. Днепропетровск), ок. Днепропетр. инж.-строит. ин-т (1931), д-р техн. н. (1941), проф. (1942) (дифференциальные уравнения в частных производных).

- КОРНЕЙЧУК Николай Павлович** (р. 22.I 1920, с. Бобрик, н. Гомель. обл.), ок. Днепропетр. ун-т (1955), асп. там же (1958), канд. физ.-мат. н. (1959), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), с 1956 работает в Днепропетр. ун-те (теория функций).
- КОРНФЕЛЬД Марк Иосифович** (р. 12.VI 1908, г. Житомир), уч. в Ленингр. ун-те (1929—1932), д-р физ.-мат. н. (1940), проф. (1940), с 1955 работал в Ин-те полупроводников АН СССР (приближенные и численные методы, прикладная математика).
- КОРОБЕЙНИК Юрий Федорович** (р. 18.VII 1930, Ростов-на-Дону), ок. Ростов. ун-т (1952), асп. там же (1955), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1955 работает в Ростов. ун-те (теория функций, дифференциальные уравнения в частных производных, функциональный анализ).
- КОРОВОВ Николай Михайлович** (р. 23.XI 1917, Москва), ок. Моск. ун-т (1941), асп. там же (1948), канд. физ.-мат. н. (1948), ок. докт. Мат. ин-та АН СССР (1953), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1955), в 1947—1954 работал в Моск. высш. техн. уч-ще, 1948—1949 — также в Мат. ин-те АН СССР, с 1954 работает в Мат. ин-те АН СССР, с 1956 — также в Моск. ун-те (теория чисел, приближенные и численные методы).
- КОРОВКИН Павел Петрович** (р. 9.VII 1913, г. Весъегонск, н. Калинин. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1936), асп. там же (1939), канд. физ.-мат. н. (1939), д-р физ.-мат. н. (1948), проф. (1948), в 1939—1952 работал в Калининград. пед. ин-те, 1953—1958 — в Моск. гор. пед. ин-те, с 1958 работает в Моск. автодор. ин-те (теория функций действительного переменного, функциональный анализ, теория приближений, дифференциальные уравнения в частных производных).
- КОРОЛЕВ Лев Николаевич** (р. 6.IX 1926, г. Подольск, н. Моск. обл.), ок. Моск. ун-т (1952), асп. Ин-та точ. мех. и вычисл. техн. АН СССР, д-р физ.-мат. н. (1967), работает в Ин-те точ. мех. и вычисл. техн. АН СССР (программирование).
- КОРОЛЮК Владимир Семенович** (р. 19.VIII 1925, Киев), ок. Киев. ун-т (1950), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), чл.-корр. АН УССР (1967), с 1954 работает в Ин-те мат. АН УССР (теория вероятностей и математическая статистика, приближенные и численные методы).
- КОСТРИКИН Алексей Иванович** (р. 12.II 1929, с. Большой Морец, н. Волгоград. обл.), ок. Моск. ун-т (1952), асп. Мат. ин-та АН СССР (1956), канд. физ.-мат. н. (1956), д-р физ.-мат. н. (1959), лауреат Гос. премии (1968), с 1956 работает в Мат. ин-те АН СССР (алгебра).
- КОСТЮЧЕНКО Анатолий Гордеевич** (р. 19.IV 1931, на ст. Опытное поле Днепропетр. обл.), ок. Киев. ун-т (1954), асп. Моск. ун-та (1957), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1967), с 1957 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения, функциональный анализ, теория функций действительного переменного, геометрия).
- КОТЕЛЬНИКОВ Александр Петрович** (20.X 1865, Казань — 6.III 1944), ок. Казан. ун-т (1888), магистр чист. мат. (1896), д-р чист. и прикл. мат. (1899), д-р техн. н. (1934), проф., засл. д. н. РСФСР (1934), лауреат Гос. премии (1943), в 1899—1903 и 1920—1924 работал в Киев. политехн. ин-те, 1904—1914 — в Казан. ун-те, 1914—1924 — в Киев. ун-те и на Киев. высш. женск. курсах, 1924—1934 — в вузах Москвы (геометрия).
- КОТОВ Иван Иванович** (р. 20.X 1909, г. Камышин, н. Волгоград. обл.), ок. Моск. пед. ин-т (1933), асп. там же (1937), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р техн. н. (1961), проф. (1962), в 1933—1937 работал в Моск. пед. ин-те, с 1946 работает в Моск. авиац. ин-те (геометрия).
- КОЧИН Николай Евграфович** (19.V 1901, Петербург — 31.XII 1944), ок. Петрогр. ун-т (1923), д-р физ.-мат. н. (1935), проф., акад. АН СССР (1939), в 1924—1934 работал в Ленингр. ун-те, 1932—1939 — в Мат. ин-те АН СССР, 1938—1944 — в Моск. ун-те, 1939—1944 — также в Ин-те мех. АН СССР (математические методы в механике, гидроаэродинамика, теоретическая механика).
- КОЧИНА (ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА) Пелагея Яковлевна** (р. 13.V 1899, Астрахань), ок. Петрогр. ун-т (1921), проф. (1933), д-р физ.-мат. н. (1940), чл.-корр. АН СССР (1946), акад. АН СССР (1958), лауреат Гос. премии (1946), Герой Соц. Труда (1969), с 1959 работает в Ин-те гидродинам. СО АН СССР (дифферен-

- циальные уравнения в частных производных, гидроаэромеханика, теория фильтрации, история математики и механики).
- КОШЕЛЕВ Александр Иванович** (р. 19. VIII 1927, Ленинград), ок. Ленингр. ун-т (1949), асп. Мат. ин-та АН СССР (1952), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1961), с 1952 работает в Ленингр. ин-те текстильн. и легк. пром. (дифференциальные уравнения в частных производных, численные и приближенные методы).
- КОШЛЯКОВ Владимир Николаевич** (р. 21. XII 1922, Симферополь), ок. Ленингр. ин-т точ. мех. и оптики (1948), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1966), в 1957—1963 работал в Моск. высш. техн. уч-ще, 1963—1969 — в Ин-те мат. АН УССР, с 1969 работает в НИИ штурман. приборостр. (математические методы в механике, теория гироскопов).
- КОШЛЯКОВ Николай Сергеевич** (23. VII 1891, Петербург — 23. IX 1958), ок. Петерб. ун-т (1914), магистр чист. мат. (1922), проф. (1922), чл.-корр. АН СССР (1933), д-р физ.-мат. н. (1934), чл. Лондон. мат. о-ва (1936), в 1918—1925 работал в Крым. ун-те, 1925—1942 — в Ленингр. ун-те, 1926—1942 — также в Ленингр. электротехн. ин-те (дифференциальные уравнения, теория чисел, математический анализ).
- КОЯЛОВИЧ Борис Михайлович** (1867—1941), магистр чист. мат. (1894), д-р чист. мат. (1903), проф., с 1891 работал в Ленингр. технол. ин-те (дифференциальные уравнения, теория функций).
- КРАВЧУК Михаил Филиппович** (21. XI 1892, с. Човницы, н. Волынск. обл. — 9. III 1942), ок. Киев. ун-т (1914), проф. (1922), д-р физ.-мат. н. (1924), акад. АН УССР (1929), с 1921 работал в Киев. политехн. ин-те, с 1922 — также в Киев. ун-те (алгебра, математический анализ, теория функций, интегро-дифференциальные уравнения, теория вероятностей, приближенные и численные методы).
- КРАСИЛЬЩИКОВА Елена Александровна** (р. 7. VII 1919, Петроград), ок. Моск. ун-т (1941), асп. там же (1946), докт. Мат. ин-та АН СССР (1951), д-р физ.-мат. н. (1951), в 1945—1948 работала в Моск. мех. ин-те, 1947—1951 — в Мат. ин-те АН СССР, с 1951 работает в Ин-те проблем мех. АН СССР (математические методы в гидромеханике).
- КРАСНОСЕЛЬСКИЙ Марк Александрович** (р. 27. IV 1920, г. Староконстантинов, н. Хмельницк. обл.), ок. Объед. Укр. ун-т (1942), канд. физ.-мат. н. (1948), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1953), в 1946—1947 работал в Киев. автодор. ин-те, 1947—1952 — в Ин-те мат. АН УССР, 1952—1969 — в Воронеж. ун-те, с 1967 работает в Ин-те автом. и телемех. АН СССР (функциональный анализ, дифференциальные уравнения, теория функций, топология, приближенные и численные методы, вариационное исчисление).
- КРАШУШКИН Петр Евгеньевич** (р. 27. IV 1913, Москва), ок. Моск. ун-т (1936), канд. физ.-мат. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1946), проф. (1947), с 1936 работает в Мат. ин-те АН СССР и Моск. ун-те (математическая физика, прикладная математика, физика).
- КРАСОВСКИЙ Николай Николаевич** (р. 7. IX 1924, Свердловск), ок. Уральск. политехн. ин-т (1949), асп. там же (1953), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1957), проф. (1958), чл.-корр. АН СССР (1964), акад. АН СССР (1968), в 1949—1959 работал в Уральск. политехн. ин-те, с 1959 работает в Уральск. ун-те (дифференциальные уравнения, функциональный анализ, вариационное исчисление, теория оптимального регулирования, математические методы в механике, приближенные и численные методы).
- КРЕЙН Марк Григорьевич** (р. 3. IV 1907, Киев), ок. Одесск. ИНО (1929), проф. (1934), д-р физ.-мат. н. (1939), чл.-корр. АН УССР (1939), в 1930—1941 работал в Одесск. ун-те, 1940—1941 и 1944—1951 — в Ин-те мат. АН УССР, 1941—1944 — в Куйбышев. индустр. ин-те, 1944—1954 — в Одесск. ин-те инж. мор. фл., с 1954 работает в Одесск. инж.-строит. ин-те (функциональный анализ, алгебра, теория функций, дифференциальные и интегральные уравнения).
- КРЕЙН Селим Григорьевич** (р. 15. VII 1917, Киев), ок. Киев. ун-т (1940), канд. физ.-мат. н. (1942), д-р техн. н. (1950), проф. (1955), в 1941—1951 работал в Ин-те мат. АН УССР, 1952—1954 — в Криворож. горнорудн. ин-те, 1954—1962 — в Воронеж. лесотехн. ин-те, с 1962 работает в Воронеж. ун-те (теория

- функций, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, функциональный анализ, прикладная математика).
- КРЕЙНЕС Михаил Александрович** (р. 4.VI 1903, Москва), ок. Моск. ун-т (1923), канд. физ.-мат. н. (1935), д-р физ.-мат. н. (1944), проф. (1945), лауреат Гос. премии (1945), в 1929—1933 работал в Моск. автотракторн. ин-те, с 1937 работает в Моск. ун-те (номография, теория приближения функций, математическая теория механизмов).
- КРОНРОД Александр Семенович** (р. в 1921), ок. Моск. ун-т, д-р физ.-мат. н. (теория функций действительного переменного).
- КРОТОВ Вадим Федорович** (р. 14. II 1932, Хабаровск), ок. Моск. высш. техн. уч-ще (1956), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р техн. н. (1964), проф. (1966), с 1962 работает в Моск. авиац. ин-те (вариационное исчисление).
- КРУКОВСКИЙ (КРУКОВСКИЙ-СИНЕВИЧ) Борис Валерьянович** (р. 6.X 1889, Одесса), ок. Киев. ун-т (1914), канд. физ.-мат. н. (1938), проф. (1938), в 1919—1950 работал в вузах Киева: ин-те нар. х-ва, ун-те, энергетич. ин-те, технол. ин-те силикатов, политехн. ин-те, с 1950 работает в Киев. автодор. ин-те (алгебра, функциональный анализ).
- КРУТКОВ Юрий Александрович** (28.V 1890, Петербург — 12.IX 1952), ок. Петрогр. ун-т (1915), проф. (1926), чл.-корр. АН СССР (1933), д-р физ.-мат. н. (1934), с 1919 работал в Ленингр. ун-те (геометрия).
- КРУТЬКО Петр Дмитриевич** (р. 27.VI 1931, Сталинград), ок. В.-возд. инж. акад. (1955), канд. техн. н. (1962), д-р техн. н. (1967) (теория вероятностей, кибернетика).
- КРУЧКОВИЧ Георгий Ионович** (р. 3.IV 1925, Москва), ок. Моск. ун-т (1953), асп. там же (1958), канд. физ.-мат. н. (1958), д-р физ.-мат. н. (1965), проф. (1966), в 1953—1959 работал в Моск. энергетич. ин-те, с 1959 работает во Всесоюзн. заочн. энергетич. ин-те (геометрия).
- КРЫЖАНОВСКИЙ Дмитрий Антонович** (7.XI 1883, Одесса — 10.X 1939), уч. в Геттинген. и Рим. ун-тах, ок. Новорос. ун-т (1908), проф. (1920), в 1913—1938 работал в Одесск. ун-те (теория функций действительного переменного, геометрия).
- КРЫЛОВ Алексей Николаевич** (15.VIII 1863, с. Витяга, н. г. Алатыр Ульяновск. обл. — 26. X 1945), ок. Мор. корп. (1884), Мор. акад. (1890), чл.-корр. Петерб. АН (1914), почетн. д-р прикл. мат. (1916), акад. Петерб. АН (1916), засл. д. н. и т. СССР (1939), лауреат Гос. премии (1941), Герой Соц. Труда (1943), с 1890 работал в В.-мор. акад., в 1927—1932 — также в Мат. ин-те АН СССР (директор) (алгебра, дифференциальные уравнения, приближенные и численные методы, прикладная математика и механика, теория кораблестроения).
- КРЫЛОВ Борис Леонидович** (5.III 1905, Симбирск — 23.VII 1966), ок. Казан. ун-т (1928), канд. физ.-мат. н. (1936), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1954), в 1931—1944 работал в Казан. ун-те, с 1944 — в Казан. авиац. ин-те (дифференциальные уравнения, основы операционного исчисления).
- КРЫЛОВ Владимир Иванович** (р. 14.XII 1902, с. Красный Яр, н. Куйбышев. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1929), асп. там же (1934), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1951), акад. АН БССР (1956), в 1930—1956 работал в Ленингр. ун-те, с 1956 работает в Ин-те мат. АН БССР (приближенные и численные методы, вычислительная математика, теория функций, дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление).
- КРЫЛОВ Николай Митрофанович** (29.XI 1879, Петербург — 11.V 1955), ок. Петерб. горн. ин-т (1902), проф. (1910), д-р мат. (1917), акад. АН УССР (1922), чл.-корр. АН СССР (1925), акад. АН СССР (1929), засл. д. н. УССР (1939), в 1912—1917 работал в Петрогр. горн. ин-те, 1917—1922 — в Крым. ун-те, с 1922 — в АН УССР и АН СССР (вариационное исчисление, дифференциальные уравнения, математическая физика, нелинейная механика, приближенные и численные методы).
- КУБИЛЮС Йонас Петрович** (р. 27.VII 1921, д. Фермос ЛитССР), ок. Вильнюс. ун-т (1946), асп. Ленингр. ун-та (1951), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1957), проф. (1960), акад. АН ЛитССР (1962), лауреат республ. премии в области науки ЛитССР (1958), засл. д. н. ЛитССР (1959), Герой Соц. Труда (1969), чл. Амер. мат. о-ва (1965), с 1951 работает в Вильнюс. ун-те (с 1958 —

- ректор), с 1952 — также в Ин-те физ. и мат. АН ЛитССР, с 1962 — чл. Президиума АН ЛитССР (теория чисел).
- КУДРЯВЦЕВ Всеволод Александрович (1885—28.XI 1953), ок. Моск. ун-т (1910), проф. Моск. ун-та (теория функций действительного переменного, алгебра).
- КУДРЯВЦЕВ Лев Дмитриевич (р. 25.III 1923, Москва), ок. Моск. ун-т (1945), асп. там же (1948), канд. физ.-мат. н. (1948), д-р физ.-мат. н. (1957), проф. (1958), с 1947 работает в Моск. физ.-техн. ин-те и Мат. ин-те АН СССР (теория функций, дифференциальные уравнения в частных производных, топология).
- КУЗНЕЦОВ Евграф Сергеевич (13.III 1901, Москва — 17.II 1966), ок. Саратов. ун-т (1924), проф. (1938), д-р физ.-мат. н. (1946), в 1937—1952 работал в Геофиз. ин-те АН СССР, с 1949 — в Моск. ун-те (приближенные и численные методы, математические методы в физике).
- КУЗНЕЦОВ Петр Иванович (р. 21.IX 1911, д. Леоново, н. Калинин. обл.), ок. Моск. торф. ин-т (1934), Моск. ун-т (1935), канд. физ.-мат. н. (1939), д-р физ.-мат. н. (1949), проф. (1952), с 1944 работает в вузах Москвы (уравнения математической физики, теория вероятностей и ее приложения, прикладная математика).
- КУЗЬМИН Павел Алексеевич (р. 16.XI 1908, Оренбург), ок. Казан. ун-т (1932), асп. Казан. авиац. ин-та (1935), канд. физ.-мат. н. (1936), д-р физ.-мат. н. (1949), проф. (1949), засл. д. н. и т. ТАССР (1957), с 1932 работает в Казан. авиац. ин-те, (механика, дифференциальные уравнения).
- КУЗЬМИН Родион Осиевич (9.XI 1891, д. Рябые, н. Витебск. обл. — 23.III 1949), ок. Петрогр. ун-т (1916), д-р физ.-мат. н. (1935), чл.-корр. АН СССР (1946), в 1918—1922 работал в Перм. ун-те, с 1922 — в Ленингр. политехн. ин-те, с 1945 — также в Ленингр. ун-те (теория функций, теория чисел, математический анализ, теория вероятностей, теория упругости, история математики).
- КУКЛЕС Исаак Самойлович (р. 28.IX 1905, Харьков), ок. Ростов. ун-т (1930), асп. Моск. ун-та (1934), канд. физ.-мат. н. (1934), ок. докт. АН СССР (1939), д-р физ.-мат. н. (1944), проф. (1944), чл.-корр. АН УзССР (1960), засл. д. н. УзССР (1957), в 1935—1939 работал в Моск. ин-те тонкой хим. технолог., 1939—1947 — в Моск. авиац. технол. ин-те, с 1947 работает в Самарканд. ун-те (дифференциальные уравнения, механика).
- КУЛАКОВ Александр Антипович (26.III 1898, Таганрог — 26.V 1946), ок. Моск. ун-т (1925), асп. там же (1932), д-р физ.-мат. н. (1936), проф., в 1930—1941 работал в вузах Москвы, с 1941 — в Ташкент. ин-те инж. ж.-д. трансп. (алгебра).
- КУЛИКОВ Леонид Яковлевич (р. 2.XI 1914, с. Никитовка, н. Донецк. обл.), ок. Моск. пед. ин-т (1938), асп. там же (1941), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1952), в 1942—1946 работал в Иванов. текст. ин-те, 1950—1955 — в Ленингр. ин-те авиаприборостр., 1955—1962 — в Мат. ин-те АН СССР, с 1962 работает в Моск. пед. ин-те (алгебра).
- КУПРАДЗЕ Виктор Дмитриевич (р. 2.XI 1903, г. Кутаиси, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1927), асп. АН СССР (1932), д-р физ.-мат. н. (1935), засл. д. н. и т. ГрССР (1944), акад. АН ГрССР (1947), академик-секретарь Отд. мат. и физ. АН ГрССР, с 1937 работает в Тбил. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, математическая физика, прикладная математика, теория упругости).
- КУРЕНСКИЙ Максим Калиникович (8.IV 1895, с. Атюша, н. Чернигов. обл. — 4.IX 1940), ок. Киев. ун-т (1918), проф. (1926), д-р физ.-мат. н. (1930), в 1920—1932 работал в АН УССР, 1926—1932 — также в Киев. ин-те нар. х-ва, 1933—1937 — в Ленингр. ун-те, с 1938 — в Карельск. пед. ин-те (дифференциальные уравнения в частных производных).
- КУРОШ Александр Геннадиевич (р. 19.I 1908, г. Ярцево, н. Смоленск. обл.), ок. Смоленск. ун-т (1928), д-р физ.-мат. н. (1937), проф. (1937), лауреат премии им. П. Л. Чебышева (1946), почетн. д-р Лион. ун-та (1967), с 1930 работает в Моск. ун-те (алгебра, топология, история математики).
- КУФАРЕВ Павел Парфентьевич (18.III 1909, Томск — 17.VII 1968), ок. Томск. ун-т (1931), канд. физ.-мат. н. (1936), д-р физ.-мат. н. (1944), проф. (1944), засл. д. н. РСФСР (1968), с 1932 работал в Томск. ун-те (теория функций комплексного переменного, теория упругости, гидроаэромеханика).

- КУХТЕНКО Александр Иванович** (р. 11.III 1914, г. Городня, н. Чернигов. обл.), ок. Донецк. индустр. ин-т (1936), канд. техн. н. (1941), д-р техн. н. (1955), проф. (1956), чл.-корр. АН УССР (1964), в 1937—1941 работал в Донецк. политехн. ин-те, 1945—1955 — в Ин-те горн. мех. АН УССР, 1955—1963 — в Киев. ин-те инж. гражд. авиац., с 1963 работает в Ин-те кибернетики АН УССР (математические методы в кибернетике, теория автоматического управления).
- ЛАВРЕНТЬЕВ Михаил Алексеевич** (р. 19.XI 1900, Казань), ок. Моск. ун-т (1922), асп. Моск. ун-та (1926), канд. физ.-мат. н. (1926), проф. (1929), д-р техн. н., (1932), д-р физ.-мат. н. (1933), акад. АН УССР (1939), акад. АН СССР (1946), действ. чл. Чехослов. АН (1957), чл. Болгар. АН (1967), чл. Амер. мат. о-ва, дважды лауреат Гос. премии (1946, 1949), лауреат Ленинск. премии (1958), Герой Соц. Труда (1967), в 1931—1939 работал в Моск. ун-те, 1934—1958 — в Мат. ин-те АН СССР, 1939—1950 — в АН УССР, 1950—1953 — в Ин-те точ. мех. и вычисл. техн. АН СССР (директор), вице-президент АН СССР (1957), с 1957 — председатель СО АН СССР (теория функций, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, математические методы в механике, аэрогидродинамика, приближенные и численные методы, математическое программирование, история математики).
- ЛАВРЕНТЬЕВ Михайлович** (р. 21.VII 1932, Москва), ок. Моск. ун-т (1954), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1961), чл.-корр. АН СССР (1968), с 1957 работает в Ин-те мат. СО АН СССР (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные и численные методы, математические методы в механике).
- ЛАВРОВ Святослав Сергеевич** (р. 12.III 1923, Петроград), ок. Ленингр. в.-возд. акад. (1944), Моск. ун-т (1954), д-р техн. н. (1958), проф. (1965), чл.-корр. АН СССР (1966), лауреат Ленинск. премии, с 1959 работает в Моск. ун-те, с 1966 — также в ВЦ АН СССР (математическое программирование, вычислительная математика, механика).
- ЛАДЫЖЕНСКАЯ Ольга Александровна** (р. 7.III 1922, г. Кологрив, н. Костром. обл.), ок. Моск. ун-т (1947), асп. Ленингр. ун-та (1949), канд. физ.-мат. н. (1949), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1955), лауреат премии им. П. Л. Чебышева (1966), Гос. премии (1969), с 1949 работает в Ленингр. ун-те и Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных, функциональный анализ, приближенные и численные методы).
- ЛАМБИН Николай Венедиктович** (р. 6.V 1899, Петербург), ок. Ленингр. ун-т (1925), канд. физ.-мат. н. (1935), д-р физ.-мат. н. (1965), в 1932—1964 работал в Белорус. ун-те, с 1965 работает в Ин-те техн. кибернетики АН БССР (теория функций комплексного переменного).
- ЛАНДИС Евгений Михайлович** (р. 6.X 1921, Харьков), ок. Моск. ун-т (1950), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1957), проф. (1961), с 1954 работает в Моск. ун-те, с 1959 — также в Ин-те теор. и эксперим. физ. АН СССР (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных).
- ЛАНДКОФ Наум Самойлович** (р. 20.I 1915, Харьков), ок. Харьков. ун-т (1937), асп. Ин-та мат. АН УССР (1940), канд. физ.-мат. н. (1940), д-р физ.-мат. н. (1967), с 1940 работает в Харьков. ун-те (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных).
- ЛАППО-ДАНИЛЁВСКИЙ Иван Александрович** (16.X 1896, Петербург — 15.III 1931), ок. Ленингр. ун-т (1925), асп. там же (1929), чл.-корр. АН СССР (1931), работал в вузах Ленинграда (дифференциальные уравнения, алгебра).
- ЛАПТЕВ Борис Лукич** (р. 23. IV 1905, Казань), ок. Казан. ун-т (1930), канд. физ.-мат. н. (1939), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1962), засл. д. н. ТАССР (1965), с 1930 работает в Казан. ун-те, с 1966 — также в Казан. НИИ мат. и мех. (геометрия, история математики).
- ЛАПТЕВ Герман Федорович** (р. 30.VI 1909, г. Арзамас, н. Горьк. обл.), ок. Казан. ун-т (1930), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1952), с 1948 работает в Моск. ун-те, с 1962 — также во Всесоюзн. ин-те научн. и техн. информации АН СССР (дифференциальная геометрия).
- ЛАТЫШЕВА Клавдия Яковлевна** (14.III 1897 — 11.V 1956), ок. Киев. высш. женск. курсы (1921), асп. Киев. ун-та (1928), канд. физ.-мат. н. (1936), д-р физ.-

- мат. н. (1952), проф. (1952), с 1920 работала в Киев. ун-те (дифференциальные уравнения).
- ЛАХТИН** Леонид Кузьмич (1863—1927), ок. Моск. ун-т (1885), магистр чист. мат. (1893), проф. (1893), д-р чист. мат. (1897), в 1892—1896 работал в Дерпт. ун-те, с 1896 — в Моск. ун-те (алгебра, математическая статистика).
- ЛЕБЕДЕВ** Николай Андреевич (р. 9.VIII 1919, д. Красновочка, н. Калининград. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1941), Ленингр. в.-возд. акад. (1944), д-р физ.-мат. н. (1956), проф. (1957), с 1945 работает в вузах Ленинграда, с 1952 — также в Ленингр. ун-те (теория функций комплексного переменного).
- ЛЕБЕДЕВ** Николай Николаевич (р. 1.V 1911, Петербург), ок. Ленингр. политехн. ин-т (1932), канд. физ.-мат. н. (1946), д-р физ.-мат. н. (1952), проф. (1954), в 1932—1941 работал в Ленингр. политехн. ин-те, с 1945 работает в Физ.-техн. ин-те АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных, теория функций, математическая физика, приближенные и численные методы, прикладная математика).
- ЛЕБЕДЕВ** Сергей Алексеевич (р. 2.XI 1902, Нижний Новгород), ок. Моск. высш. техн. уч-ще (1928), проф. (1952), акад. АН УССР (1945), акад. АН СССР (1953), дважды лауреат Гос. премии (1950, 1969), Герой Соц. Труда (1956), в 1928—1945 работал во Всесоюзн. электротехн. ин-те, 1946—1951 — в Ин-те электротехн. АН УССР (директор), 1951—1953 — в Моск. физ.-техн. ин-те, с 1953 работает в Ин-те точ. мех. и вычисл. техн. АН СССР (директор) (электронные вычислительные машины, теория устойчивости энергетических систем, электроавтоматика).
- ЛЕВИН** Борис Вениаминович (р. 29.IV 1927, г. Артемовск, н. Донецк. обл.), ок. Узбек. ун-т (1950), канд. физ.-мат. н. (1956), д-р физ.-мат. н. (1963), с 1956 работает в Ташкент. ун-те (теория чисел).
- ЛЕВИН** Борис Рувимович (р. 24.VI 1919, г. Юзовка, н. Донецк), ок. Моск. ун-т (1941), В.-возд. акад. (1945), канд. техн. н. (1950), д-р техн. н. (1963), проф. (1965), с 1964 работает в Моск. электротехн. ин-те связи (теория вероятностей и ее применение).
- ЛЕВИН** Борис Яковлевич (р. 22.XII 1906, Одесса), ок. Ростов. ун-т (1931), асп. там же (1935), д-р физ.-мат. н. (1939), проф. (1939), в 1935—1941 работал в Одесск. ун-те, 1937—1949 — также в Одесск. ин-те инж. водн. трансп., 1949—1955 — в Харьк. горн. ин-те, с 1955 работает в Харьк. ун-те, с 1968 — также в Физ.-техн. ин-те низких температур АН УССР (теория функций, функциональный анализ).
- ЛЕВИН** Виктор Иосифович (р. 1.XII 1909, г. Могилев), ок. Высш. техн. уч-ще в Берлине (1932), д-р физ.-мат. н. (1939), проф. (1939), в 1938—1949 работал в Моск. энергетич. ин-те, 1949—1951 — в Пенз. индустр. ин-те, 1951—1959 — в Моск. заочн. пед. ин-те, 1959—1962 — в Моск. ин-те стали и сплавов, с 1962 работает в Моск. пед. ин-те (теория функций действительного переменного, математическая физика, история математики).
- ЛЕВИТАН** Борис Моисеевич (р. 7.VI 1914, г. Бердянск, н. Запорож. обл.), ок. Харьк. ун-т (1936), д-р физ.-мат. н. (1940), проф. (1941), лауреат Ленинск. премии (1962), в 1938—1941 работал в Харьк. ун-те, 1944—1962 — в вузах Москвы, с 1962 работает в Моск. ун-те (теория функций, функциональный анализ).
- ЛЕВИЦКИЙ** Владимир Осипович (31.XII 1872, г. Тернополь — 13.VII 1956), ок. Львов. ун-т (1894), д-р филос. (1901), проф. (1941), в 1940—1953 работал во Львов. ун-те (теория функций, дифференциальные уравнения).
- ЛЕДНЕВ** Николай Андреевич (р. в 1917), д-р физ.-мат. н., проф., до 1960 работал в Моск. ин-те геодезии, аэрофотосъемки и картографии (дифференциальные уравнения в частных производных, алгебра).
- ЛЕЙБЕНЗОН** Леонид Самуилович (26.VI 1879, Харьков — 15.III 1951), ок. Моск. ун-т (1901), Моск. высш. техн. уч-ще (1906), магистр прикл. мат. (1915), проф. (1918), чл.-корр. АН СССР (1933), акад. АН СССР (1943), лауреат Гос. премии (1943), в 1915—1918 работал в Юрьев. ун-те, 1921—1923 — в Бакинск. ун-те, с 1923 — в Моск. ун-те, с 1934 — также в ЦАГИ (дифференциальные уравнения, прикладная математика, математические методы в механике, гидроаэродинамика).

- ЛЕЙНИЕКС** Эдгар Юльевич (р. 19.V 1889, Рига — 11. II 1937), ок. Моск. ун-т (1911), проф. (1920), д-р мат. (1934), в 1919—1934 работал в Риж. ун-те (геометрия).
- ЛЕНСКИЙ** Виктор Степанович (р. 23.II 1913, с. Нечаевка, н. МАССР), ок. Моск. ун-т (1938), асп. там же (1941), канд. физ.-мат. н. (1947), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1963), в 1953—1960 работал в Ин-те мех. АН СССР, с 1941 работает в Моск. ун-те (прикладная математика, теория упругости).
- ЛЕОНТЬЕВ** Алексей Федорович (р. 27.III 1917, с. Яковцево, н. Горьк. обл.), ок. Горьк. ун-т (1939), асп. там же (1942), д-р физ.-мат. н. (1948), проф. (1949), в 1942—1945 работал в Марийск. пед. ин-те, 1948—1954 — в Горьк. ун-те, 1954—1962 — в Моск. энергетич. ин-те, с 1962 работает в Мат. ин-те АН СССР (теория функций, дифференциальные уравнения).
- ЛЕПИК** Юло Рудольфович (р. 11.VII 1921, г. Тарту, н. ЭССР), ок. Тартуск. ун-т (1948), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1959), проф. (1960), с 1946 работает в Тартуск. ун-те (прикладная математика, теория пластин и оболочек, теория пластичности).
- ЛЕТОВ** Александр Михайлович (р. 24.XI 1911, д. Хомутово, н. Моск. обл.), ок. Моск. ун-т (1937), асп. там же (1945), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1952), чл.-корр. АН СССР (1968), с 1948 работает в Ин-те автом. и телемех. АН СССР (дифференциальные уравнения, теория автоматического регулирования).
- ЛИБЕР** Александр Евгеньевич (р. 23.I 1914, Полтава), ок. Саратов. ун-т (1938), асп. там же (1941), канд. физ.-мат. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1959), проф. (1961), с 1938 работает в Саратов. ун-те (дифференциальная геометрия, алгебра).
- ЛИВШИЦ** Михаил Самуилович (р. 4.VII 1917, г. Умань, н. Черкасск. обл.), ок. Одесск. ун-т (1938), асп. там же (1942), канд. физ.-мат. н. (1943), д-р физ.-мат. н. (1945), проф. (1947), в 1938—1944 работал в Одесск. ун-те, 1945—1957 — в Одесск. гидрометеоролог. ин-те, с 1957 работает в Харьк. ун-те (функциональный анализ).
- ЛИДСКИЙ** Виктор Борисович (р. 5.V 1924, Одесса), ок. Моск. ун-т (1951), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1962), с 1954 работает в Моск. физ.-техн. ин-те (дифференциальные уравнения, функциональный анализ, алгебра).
- ЛИННИК** Юрий Владимирович (р. 8.I 1915, г. Белая Церковь, н. Киев. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1938), асп. там же (1940), д-р физ.-мат. н. (1940), проф. (1944), чл.-корр. АН СССР (1953), акад. АН СССР (1964), лауреат Гос. премии (1947), президент Ленингр. мат. о-ва (1959—1965), действ. чл. Междунар. стат. ин-та (1962), чл. Мат. стат. ин-та (США) (1962), Герой Соц. Труда (1969), лауреат Ленинск. премии (1970), с 1940 работает в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, с 1944 — также в Ленингр. ун-те (теория чисел, теория вероятностей и математическая статистика).
- ЛИПИН** Николай Вячеславович (17.II 1886, Петербург — 8.IV 1955), ок. Петерб. ун-т (1910), канд. физ.-мат. н. (1937), проф. (1937), в 1910—1924 работал в Ленингр. горн. ин-те, 1929—1937 — в Ленингр. ин-те инж. ж.-д. трансп., 1937—1947 — в Ленингр. ин-те инж. связи, с 1947 — в Ленингр. ин-те холодильн. пром. (алгебра).
- ЛОЗИНСКИЙ** Сергей Михайлович (р. 2.VIII 1914, Петроград), ок. Ленингр. ун-т (1938), асп. там же (1940), канд. физ.-мат. н. (1940), д-р физ.-мат. н. (1944), проф. (1946), засл. д. н. и т. РСФСР (1966), в 1945—1960 работал в Ленингр. ун-те, с 1942 работает в вузах Ленинграда, с 1965 — президент Ленингр. мат. о-ва (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения, функциональный анализ, приближенные и численные методы).
- ЛОКУЦИЕВСКИЙ** Олег Вячеславович (р. 11. XI 1922, г. Новониколаевск, н. Новосибирск), ок. Моск. ун-т (1948), асп. там же, канд. физ.-мат. н., д-р физ.-мат. н. (1966), лауреат Гос. премии (1953), работает в Ин-те прикл.мат. АН СССР (топология, приближенные и численные методы).
- ЛОМАДЗЕ** Георгий Арсеньевич (р. 27.XII 1912, Москва), ок. Тбил. ун-т (1937), канд. физ.-мат. н. (1948), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1966), с 1948 работает в Тбил. ун-те (теория чисел).
- ЛОМНИЦКИЙ** Антон Марианович (17.I 1881, Львов — 7.VII 1941), ок. Львов. ун-т, д-р мат. (1903), проф. (1921), с 1913 работал во Львов. политехн. ин-те (математическая статистика и теория вероятностей).

- ЛОПАТИНСКИЙ** Ярослав Борисович (р. 9.XI 1906, Тифлис), ок. Азерб. ун-т (1926), канд. физ.-мат. н. (1938), д-р физ.-мат. н. (1946), проф., чл.-корр. АН СССР (1951), акад. АН СССР (1965), в 1946—1963 работал во Львов. ун-те и Ин-те мат. АН СССР, 1963—1965 — в Моск. ин-те нефтехим. и газ. пром., с 1965 работает в Донецк. ВЦ АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, алгебра).
- ЛОПШИЦ** Абрам Миронович (р. 27.V 1897, Одесса), ок. Одесск. ун-т (1919), Моск. ун-т (1924), асп. там же (1928), канд. физ.-мат. н. (1938), проф. (1962), с 1949 работает в Ярослав. пед. ин-те (приближенные и численные методы, начертательная геометрия, дифференциальная геометрия).
- ЛОХИН** Иван Федорович (р. 31.III 1905, г. Сергач, н. Горьк. обл.), ок. Горьк. ун-т (1928), асп. Ленингр. ун-та, д-р физ.-мат. н. (1955), проф. (1956), засл. д. н. РСФСР (1966), в 1932—1952 работал в Горьк. ун-те (теория функций комплексного переменного).
- ЛУЗИН** Николай Николаевич (9.XII 1883, Томск — 28.II 1950), ок. Моск. ун-т (1908), д-р чист. мат. (1916), проф. (1917), акад. АН СССР (1929), действ. чл. Краков. АН, почетн. чл. Калькуттск. и Бельгийск. мат. о-в, с 1917 работал в Моск. ун-те, в 1919—1921 — также в Иваново-Вознесенск. политехн. ин-те, 1929—1936 и 1941—1950 — также в Мат. ин-те АН СССР, 1936—1950 — также в Ин-те автом. и телемех. АН СССР (теория функций, теория множеств, математический анализ, основания математики и математическая логика, дифференциальные уравнения, теория чисел, дифференциальная геометрия).
- ЛУНЦ** Григорий Львович (р. 5. I 1911, Смоленск), ок. Моск. ун-т (1931), асп. там же (1940), канд. физ.-мат. н. (1940), д-р физ.-мат. н. (1965), проф. (1965), в 1953—1959 работал в Центр. заочн. ин-те рыбной пром., с 1959 работает в Моск. высш. техн. уч-ще, с 1960 — также в Моск. ин-те хим. машиностр. (математический анализ, теория функций, история математики).
- ЛУПАНОВ** Олег Борисович (р. 2.VI 1932, Ленинград), ок. Моск. ун-т (1955), асп. АН СССР (1958), д-р физ.-мат. н. (1963), лауреат Ленинск. премии (1966), в 1954—1966 работал в Мат. ин-те АН СССР, с 1964 работает в Моск. ун-те, с 1965 — также в Ин-те прикл. мат. АН СССР (математическая логика, электронные вычислительные машины).
- ЛУРЬЕ** Анатолий Исаакович (р. 19.VII 1901, г. Могилев), ок. Ленингр. политехн. ин-т (1925), асп. там же (1929), проф. (1935), д-р техн. н. (1939), чл.-корр. АН СССР (1960), с 1925 работает в Ленингр. политехн. ин-те (дифференциальные уравнения, операционное исчисление, прикладная математика, теория упругости, аналитическая механика).
- ЛУРЬЕ** Соломон Яковлевич (6.I 1891, г. Могилев — 30.X 1964), ок. Петерб. ун-т (1913), проф. (1927), д-р ист. н. (1934), д-р филол. н. (1943), работал в Ленингр. ун-те, Ин-те ист. естествозн. и техн. АН СССР и Львов. ун-те (история математики).
- ЛУСИС** Арвид Янович (24.XI 1900, с. Кони, н. ЛатвССР — 11.II 1969), ок. Риж. ун-т (1924), канд. мат. (1925), д-р мат. (1938), д-р физ.-мат. н. (1946), проф. (1946), с 1928 работал в Латв. ун-те (математический анализ, интегральные уравнения, история математики).
- ЛЮБАРСКИЙ** Григорий Яковлевич (р. 11.III 1919, г. Кременчуг, н. Полтав. обл.), ок. Харьк. ун-т (1941), асп. Куйбышев. пед. ин-та (1944), канд. физ.-мат. н. (1945), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1967), в 1942—1945 работал в Куйбышев. авиац. ин-те, 1945—1946 — в Барнаульск. пед. ин-те, с 1946 работает в Физ.-техн. ин-те АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных, алгебра, прикладная математика).
- ЛЮБИЧ** Юрий Ильич (р. 22.IV 1931, Красноярск), ок. Харьк. ун-т (1952), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1965), проф. (1967), с 1956 работает в Харьк. ун-те (функциональный анализ, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения).
- ЛЮКШИН** Василий Сергеевич (р. 7.I 1899, г. Кирсанов, н. Тамбов. обл.), ок. Саратов. ун-т (1924), асп. Моск. ун-та (1929), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р техн. н. (1964), проф. (1965), с 1930 работает в Моск. станкоинструмент. ин-те (дифференциальная геометрия).

- ЛЮСТЕРНИК Лазарь Аронович (р. 31.XII 1899, г. Здунская Воля, н. ПНР), ок. Моск. ун-т (1922), асп. там же, д-р физ.-мат. н. (1935), проф. (1935), чл.-корр. АН СССР (1946), лауреат Гос. премии (1946), с 1930 работает в Моск. ун-те, в 1934—1948 работал также в Мат. ин-те АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных, теория функций, функциональный анализ, вариационное исчисление, топология, приближенные и численные методы, программирование, геометрия, история математики).
- ЛЯНЦЕ Владислав Элиевич (р. 19.XI 1920, Варшава), ок. Львов. ун-т (1948), асп. Ин-та мат. АН УССР (1951), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1965), в 1948—1964 работал во Львов. политехн. ин-те, с 1964 работает во Львов. ун-те (функциональный анализ, дифференциальные уравнения).
- ЛЯПИН Евгений Сергеевич (р. 19.IX 1914, Одесса), ок. Ленингр. ун-т (1936), асп. там же, канд. физ.-мат. н. (1939), д-р физ.-мат. н. (1946), проф. (1946), с 1946 работает в Ленингр. пед. ин-те (алгебра).
- ЛЯПУНОВ Алексей Андреевич (р. 8.X 1911, Москва), ок. асп. Моск. ун-та (1939), д-р физ.-мат. н. (1949), проф. (1950), чл.-корр. АН СССР (1964), в 1934—1961 работал в Мат. ин-те АН СССР, 1953—1961 — также в Моск. ун-те, с 1961 работает в Ин-те теор. кибернетики и Ин-те мат. СО АН СССР (математическая логика, математическая статистика, электронные вычислительные машины, программирование, приближенные и численные методы, кибернетика).
- ЛЯШКО Иван Иванович (р. 9.IX 1922, с. Мацковцы н. Полтав. обл.), ок. Киев. пед. ин-т (1952), асп. Киев. ун-та (1955), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1965), проф. (1965), чл.-корр. АН УССР (1969), с 1955 работает в Киев. ун-те (теория функций комплексного переменного, математическая физика, теория фильтрации).
- МАГОМЕДОВ Гаджи Абдулкадырович (р. 1.VII 1935, с. Уллучара ДАССР), ок. Дагестан. ун-т (1959), д-р физ.-мат. н. (1964, Польша), канд. физ.-мат. н. (1966, пострифицировано), с 1964 работает в Дагестан. ун-те (теория функций комплексного переменного, интегральные уравнения).
- МАЗЬЯ Владимир Гилелевич (р. 31.XII 1937, Ленинград), ок. Ленингр. ун-т (1960), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1960 работает в Ленингр. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных).
- МАЙЕР Артемий Григорьевич (6.IX 1905, г. Дмитриев, н. Курск. обл.— 19.IX 1951), ок. Моск. ун-т (1926), д-р физ.-мат. н. (1948), с 1930 работал в Горьк. ун-те (дифференциальные уравнения, геометрия).
- МАЙЗЕЛЬ Вениамин Михайлович (20. VI 1900, Минск — 28.II 1943), ок. Харьк. технол. ин-т (1921), Харьк. ИНО (1922), проф. (1928), д-р инж.-техн. н. (1929), чл.-корр. АН УССР (1939), в 1922—1928 работал в Харьк. технол. ин-те, с 1929 — в Харьк. мех.-машиностр. ин-те, с 1933 — также в Харьк. ун-те (прикладная математика, механика).
- МАЙОРОВ Федор Васильевич (р. 4. VI 1908), ок. Ленингр. ун-т, д-р техн. н., работал в Ин-те точ. мех. и вычисл. техн. АН СССР (электронно-вычислительные машины).
- МАКАРОВ Иринарх Петрович (р. 22.VI 1906, с. Константиновка, н. Куйбышев. обл.), ок. асп. Моск. ун-та (1941), канд. физ.-мат. н. (1947), проф. (1964), почетн. чл. уч. совета Эрфуртск. ун-та (1966), с 1938 работает в Рязан. пед. ин-те (дифференциальные уравнения, теория функций действительного переменного, история математики).
- МАЛАХОВСКИЙ Владислав Степанович (р. 14.III 1929, г. Сычевка, н. Смоленск. обл.), ок. Томск. ун-т (1953), канд. физ.-мат. н. (1958), д-р физ.-мат. н. (1965), проф. (1965), с 1953 работает в Томск. ун-те (дифференциальная геометрия, алгебра).
- МАЛЕЕВ Всеволод Александрович (20.III 1889, с. Шемонаевское, н. Томск. обл.— 1938), ок. Казан. ун-т (1912), проф. (1920), в 1915—1918 работал в Казан. ун-те, 1920—1937 — в Томск. политехн. ин-те (алгебра).
- МАЛИЕВ Алексей Семенович (12.III 1895, с. Кишертъ, н. Перм. обл.— 26.X 1966), ок. Ленингр. политехн. ин-т (1924), проф. (1934), д-р техн. н. (1952), засл. д. н. и т. РСФСР, в 1924—1954 работал в вузах Ленинграда, с 1954 — в Ленингр. ин-те инж. ж.-д. трансп. (теория функций действительного переменного).

- МАЛКИН** Иоэль Гильевич (6.XI 1907, г. Нежин, н. Чернигов. обл. — 14.VI 1958), ок. Казан. ун-т (1927), д-р физ.-мат. н. (1936), проф. (1937), с 1937 работал в Уральск. ун-те (дифференциальные уравнения, теория устойчивости движения).
- МАЛЫШЕВ** Александр Васильевич (р. 17.XI 1928, Ленинград), ок. Ленингр. ун-т (1951), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1962), с 1951 работает в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР (теория чисел, геометрия).
- МАЛЫЦЕВ** Анатолий Иванович (27.XI 1909, Мишеронский стекольный з-д, н. пос. Мишеронский Моск. обл. — 7.VII 1967), ок. Моск. ун-т (1931), асп. там же (1937), канд. физ.-мат. н. (1937), ок. докт. Мат. ин-та АН СССР (1941), д-р физ.-мат. н. (1941), проф. (1944), чл.-корр. АН СССР (1953), акад. АН СССР (1958), лауреат Гос. премии (1946), засл. д. н. РСФСР (1956), лауреат Ленинск. премии (1964), в 1932—1960 работал в Иванов. пед. ин-те, 1942—1960 — также в Мат. ин-те АН СССР, с 1960 — в Ин-те мат. СО АН СССР и Новосиб. ун-те, президент Сиб. мат. о-ва (1965—1967) (алгебра, математическая логика, вычислительная математика).
- МАМЕДОВ** Рашид Гамид оглы (р. 2.V 1930, с. Дашсалахлы АзССР), ок. Азерб. пед. ин-т (1952), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), в 1953—1960 работал в Азерб. пед. ин-те, 1960—1963 — в Ин-те мат. и мех. АН АзССР, с 1963 работает в Азерб. политехн. ин-те (теория функций действительного переменного).
- МАМЕДОВ** Яхья Джафар оглы (р. 10.X 1930, г. Нахичевань АзССР), ок. Азерб. ун-т (1954), асп. там же (1957), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1967), с 1965 (также в 1954—1960) работает в Азерб. ун-те (функциональный анализ, интегральные и дифференциальные уравнения).
- МАНДЗЮК** Анастасия Ивановна (р. 11.XI 1903, с. Ивашковцы, н. Хмельницк. обл.), ок. Киев. ИНО (1929), асп. Моск. инж.-пед. ин-та (1932), канд. физ.-мат. н. (1938), проф. (1963), с 1949 работает в Киев. технол. ин-те пищ. пром. (математический анализ, номография).
- МАНЕВИЧ** Владимир Абрамович (р. 8.VIII 1933, Москва), ок. Моск. гор. пед. ин-т (1955), канд. физ.-мат. н. (1959), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1960 работает в Моск. ин-те инж. ж.-д. трансп. (геометрия).
- МАНИН** Юрий Иванович (р. 16. II 1937, Симферополь), ок. Моск. ун-т (1958), асп. там же (1960), канд. физ.-мат. н. (1961), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1967), лауреат Ленинск. премии (1967), с 1960 работает в Мат. ин-те АН СССР, с 1965 — также в Моск. ун-те (алгебра, теория чисел, алгебраическая геометрия).
- МАНИЯ** Гванджи Михайлович (р. 29. V 1918, г. Зугдиди, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1940), асп. Моск. гор. пед. ин-та, канд. физ.-мат. н. (1949), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1964), в 1956—1964 работал в ВЦ АН ГрССР, с 1964 работает в Тбил. ун-те (теория вероятностей и математическая статистика, алгебра).
- МАРДЖАНИШВИЛИ** Константин Константинович (р. 26.VIII 1903, Москва), ок. Ленингр. ун-т (1924), д-р физ.-мат. н. (1949), проф. (1950), чл.-корр. АН СССР (1964), в 1927—1934 работал в Груз. ун-те и Груз. политехн. ин-те, 1935—1952 — в Моск. ин-те инж. связи, с 1934 работает в Мат. ин-те АН СССР (теория чисел).
- МАРКОВ** Андрей Андреевич (14.VI 1856 — 20.VII 1922), ок. Петерб. ун-т (1878), магистр чист. мат. (1880), д-р чист. мат. (1884), проф. (1886), акад. Петерб. АН (1896), с 1880 работал в Петрогр. ун-те (теория вероятностей, теория чисел, математический анализ, приближенные и численные методы).
- МАРКОВ** Андрей Андреевич (р. 22.IX 1903, Петербург), ок. Ленингр. ун-т (1924), асп. Астрон. ин-та (1928), д-р физ.-мат. н. (1935), проф. (1936), чл.-корр. АН СССР (1953), в 1934—1942 и 1944—1953 работал в Ленингр. ун-те, 1939—1953 — также в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, с 1954 работает в Мат. ин-те АН СССР и Моск. ун-те (математическая логика и основания математики, топология, алгебра, электронные вычислительные машины, история математики, теоретическая физика).
- МАРКОВИЧ** Эммануил Соломонович (р. 12.X 1897, г. Витебск), ок. Петрогр. ун-т (1919), канд. пед. н. (1951), проф. (1966), в 1944—1948 работал в Моск. авиац. ин-те, 1953—1956 — в Моск. горн. ин-те, с 1948 работает во Всесоюзн. заочн. фин.-экон. ин-те (алгебра, методика математики).

- МАРКУШЕВИЧ** Алексей Иванович (р. 2.IV 1908, г. Петрозаводск), ок. Средаз. ун-т (1930), асп. Моск. ун-та (1934), канд. физ.-мат. н. (1934), д-р физ.-мат. н. (1944), чл.-корр. АПН РСФСР (1945), проф. (1946), акад. АПН СССР (1950), с 1935 работает в Моск. ун-те, в 1950—1958 — вице-президент АПН РСФСР, 1958—1963 — первый зам. министра просв. РСФСР, с 1964 — вице-президент АПН СССР (теория функций комплексного переменного, история и методика математики, педагогика).
- МАРЧЕВСКИЙ** Михаил Николаевич (р. 19.X 1884, Харьков), ок. Харьк. ун-т (1907), проф. (1934), канд. физ.-мат. н. (1936), с 1917 работает в Харьк. ун-те (математический анализ, история математики).
- МАРЧЕНКО** Владимир Александрович (р. 7.VII 1922, Харьков), ок. Харьк. ун-т (1945), асп. там же (1948), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1953), чл.-корр. АН УССР (1961), акад. АН УССР (1969), лауреат Ленинск. премии (1962), в 1945—1960 работал в Харьк. ун-те, с 1960 работает в Физ.-техн. ин-те низких температур АН УССР (теория функций, математический анализ, функциональный анализ, дифференциальные уравнения).
- МАРЧУК** Гүрий Иванович (р. 8.VI 1925, с Петро-Херсонеп, н. Оренбург. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1949), асп. Геофиз. ин-та АН СССР (1952), д-р физ.-мат. н. (1956), проф. (1960), чл.-корр. АН СССР (1962), работал в Обнинск. физ.-энергетич. ин-те, с 1962 работает в Ин-те мат. и ВЦ СО АН СССР (приближенные и численные методы).
- МАСЛОВ** Александр Федорович (р. 5.VIII 1890, Москва), ок. Моск. ун-т (1912), д-р физ.-мат. н. (1938), проф. (1938), в 1914—1919 и 1922—1933 работал в Моск. ин-те инж. ж.-д. трансп., 1918 и 1922—1927 — в Моск. ун-те, 1919—1922 — в Горьк. ун-те, 1929—1951 — в Моск. ин-те инж. водн. трансп., 1945—1957 — также в Моск. ин-те инж. гор. строит. (прикладная математика, механика).
- МАСЛОВ** Виктор Павлович (р. 15.VII 1930, Москва), ок. Моск. ун-т (1953), асп. там же (1956), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1967), с 1956 работает в Моск. ун-те (дифференциальные и интегральные уравнения, функциональный анализ, кибернетика, математические методы в механике).
- МАСЛОВ** Петр Георгиевич (р. 26.I 1915, г. Мезень, н. Арханг. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1938), канд. физ.-мат. н. (1949), д-р физ.-мат. н. (1955), проф. (1956), в 1937—1941 работал в Ленингр. ин-те инж. сигнал. и связи. ж.-д. трансп., 1946—1959 — в вузах Ленинграда, с 1959 работает в Ленингр. пед. ин-те (прикладная математика, теоретическая физика).
- МАТВИЕВСКАЯ** Галина Павловна (р. 13.VII 1930, Днепропетровск), ок. Ленингр. ун-т (1954), асп. Ленингр. отд. Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР (1958), канд. физ.-мат. н. (1959), д-р физ.-мат. н. (1969), в 1954—1959 работала в Ленингр. отд. Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР, с 1959 работает в Ин-те мат. АН УзССР (история математики).
- МАЯНЦ** Лазарь Соломонович (р. 19.V 1912, г. Гомель), ок. Моск. ун-т (1937), асп. Физ.-хим. НИИ (1941), канд. хим. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1948), проф. (1951), в 1944—1946 работал в Ин-те органич. хим., 1946—1949 — в Физ. ин-те АН СССР, 1949—1954 — в Иванов., Саратов., Смоленск. пед. ин-тах, с 1955 работает в Ин-те элементоорганич. соед. АН СССР (приближенные и численные методы, теория вероятностей и математическая статистика, теоретическая и статистическая физика).
- МЕДВЕДЕВ** Борис Валентинович (р. 13.VII 1924, Саратов), ок. Моск. ун-т (1948), асп. Мат. ин-та АН СССР, д-р физ.-мат. н. (1964), работает в Мат. ин-те АН СССР (математические методы в теоретической физике).
- МЕДЕР** Альфред Рихардович (1.X 1873, Рига — 1944), ок. Тартуск. ун-т (1895), проф. (1914), д-р мат. (1938), в 1897—1918 работал в Риж. политехн. ин-те, 1919—1939 — в Риж. ун-те (теория вероятностей, история математики).
- МЕЙМАН** Наум Натанович (Нохим Санелевич) (р. 11.V 1912, м. Базар, н. Житомир. обл.), ок. Казан. ун-т (1932), д-р физ.-мат. н. (1937), проф. (1939), лауреат Гос. премии (1953), в 1947—1954 работал в Ин-те физ. проблем АН СССР, с 1954 работает в Ин-те теор. и эксперим. физ. АН СССР (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные и численные методы).

- МЕНЬШОВ Дмитрий Евгеньевич** (р. 18.IV 1892, Москва), ок. Моск. ун-т (1916), проф. (1934), д-р физ.-мат. н. (1935), чл.-корр. АН СССР (1953), лауреат Гос. премии (1951), в 1920—1922 работал в Иванов. пед. и политехн. ин-тах, с 1922 работает в Моск. лесотехн. ин-те и Моск. ун-те, с 1947 (и в 1934—1941) — также в Мат. ин-те АН СССР (теория функций, математический анализ, история математики).
- МЕРГЕЛЯН Сергей Никитович** (р. 19. V 1928, Симферополь), ок. Ереван. ун-т (1947), асп. там же (1949), д-р физ.-мат. н. (1949), проф. (1952), чл.-корр. АН СССР (1953), акад. АН АрмССР (1956), лауреат Гос. премии (1952), в 1945—1958 работал в Ин-те мат. и мех. АН АрмССР, 1949—1956 — также в Ереван. ун-те, с 1953 работает в Моск. ун-те, с 1961 — также в Мат. ин-те АН СССР, с 1963 — зам. академика-секретаря Отд. мат. АН СССР (теория функций, дифференциальные уравнения в частных производных).
- МИГИРЕНКО Георгий Сергеевич** (р. 30.IX 1916, Одесса), ок. Одесск. ин-т инж. мор. фл. (1939), Ленингр. в.-мор. акад. (1941), адъюнкт. там же (1949), канд. техн. н. (1949), ок. докт. Мат. ин-та АН СССР (1952), д-р техн. н. (1954), проф. (1958), лауреат Ленинск. премии (1962), в 1949—1958 работал в вузах Ленинграда, с 1958 работает в Ин-те гидродинам. СО АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных, гидродинамика, теория колебаний, история математики).
- МИКЕЛАДЗЕ Мераб Шалвович** (р. 3.II 1926, Тбилиси), ок. Груз. политехн. ин-т (1948), асп. Ин-та мех. АН СССР (1952), канд. техн. н. (1952), д-р техн. н. (1959), проф. (1960), в 1952—1953 работал в Ин-те мех. АН СССР, 1953—1956 — в Тбил. ун-те, 1958—1959 — в Тбил. ин-те инж. ж.-д. трансп., с 1959 работает в Груз. политехн. ин-те, с 1965 (и в 1953—1960) — в Тбил. мат. ин-те АН ГрССР (приближенные и численные методы, прикладная математика, теория тонких пластичных оболочек, теория строительной механики машин).
- МИКЕЛАДЗЕ Шалва Ефимович** (р. 29.III 1895, г. Телави, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1929), д-р физ.-мат. н. (1935), проф. (1935), чл.-корр. АН ГрССР (1950), акад. АН ГрССР (1960), лауреат Гос. премии (1952), засл. д. н. ГрССР (1962), с 1929 работает в Тбил. ун-те, с 1935 — также в Тбил. мат. ин-те АН ГрССР (дифференциальные уравнения, приближенные и численные методы, математическая физика).
- МИЛИН Исаак Моисеевич** (р. 16.II 1919, г. Остер, н. Чернигов. обл.), ок. Ленингр. в.-возд. акад. (1944), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1966) (теория функций комплексного переменного).
- МИЛЛИОНЩИКОВ Владимир Михайлович** (р. 22.X 1939, Москва), ок. Моск. ун-т (1961), асп. там же (1964), канд. физ.-мат. н. (1966), д-р физ.-мат. н. (1968), с 1964 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения).
- МИНЛОС Роберт Адольфович** (р. 28.II 1931, Москва), ок. Моск. ун-т (1954), канд. физ.-мат. н. (1958), д-р физ.-мат. н. (1969), с 1956 работает в Моск. ун-те (функциональный анализ, статистическая физика).
- МИРОНОВ Владимир Тимофеевич** (р. 16.VI 1902, г. Мокшан, н. Пенз. обл.), ок. Иркутск. ун-т (1925), канд. физ.-мат. н. (1940), проф. (1963), в 1931—1945 работал в Иркутск. пед. ин-те, с 1945 работает в Саратов. пед. ин-те (теория функций действительного переменного, теория чисел).
- МИТРОПОЛЬСКИЙ Аристарх Константинович** (р. 18.I 1888, с. Преображенское, н. Тамбов. обл.), ок. Петерб. ун-т (1913), проф. (1926), д-р техн. н. (1945), в 1914—1941 работал в Ленингр. ун-те, с 1924 работает в Ленингр. лесотехн. акад. (математическая статистика).
- МИТРОПОЛЬСКИЙ Юрий Алексеевич** (р. 3.I 1917, с. Шишаки, н. Полтав. обл.), ок. Казах. ун-т (1942), канд. физ.-мат. н. (1948), д-р техн. н. (1951), проф. (1954), чл.-корр. АН УССР (1958), акад. АН УССР (1961), лауреат Ленинск. премии (1965), засл. д. н. УССР (1967), лауреат премии им. Н. М. Крылова (1969), в 1946—1950 работал в Ин-те строит. мех. АН УССР, с 1950 работает в Ин-те мат. АН УССР (с 1958 — директор) (дифференциальные уравнения, нелинейная механика).
- МИТЮК Игорь Петрович** (р. 6.I 1928, с. Волчково, н. Киев. обл.), ок. Моск. ун-т (1950), асп. Киев. политехн. ин-та (1961), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р физ.-мат. н. (1967), в 1950—1958 работал в Майкоп. пед. ин-те, 1961—1963 — в Полтав.

- инж.-строит. ин-те, с 1963 работает в Ин-те мат. АН УССР (теория функций комплексного переменного).
- МИТЯГИН** Борис Самуилович (р. 12.VIII 1937, Воронеж), ок. Моск. ун-т (1958), асп. там же (1961), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), в 1961—1967 работал в Воронеж. ун-те, с 1967 работает в Центр. экон.-мат. ин-те АН СССР (теория функций, функциональный анализ).
- МИХАЙЛОВ** Валентин Петрович (р. 15.XII 1930, г. Вологда), ок. Моск. ун-т (1953), асп. там же, д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1966), работает в Моск. ун-те и Мат. ин-те АН СССР (дифференциальные уравнения).
- МИХАЙЛОВ** Леонид Григорьевич (р. 28.II 1928, с. Михайловка БашАССР), ок. Казан. ун-т (1950), канд. физ.-мат. н. (1956), д-р физ.-мат. н. (1965), чл.-корр. АН ТаджССР (1968), в 1950—1959 работал в Тадж. ун-те, 1959—1967 — в АН ТаджССР (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных).
- МИХАЛЕВИЧ** Владимир Сергеевич (р. 10.III 1930, Чернигов), ок. Киев. ун-т (1952), асп. Моск. ун-та (1955), канд. физ.-мат. н. (1956), д-р физ.-мат. н. (1967), чл.-корр. АН УССР (1967), с 1958 работает в Ин-те кибернетики АН УССР (математическая статистика, экономическая кибернетика).
- МИХЕЛЬСОН** Николай Семенович (14.V 1873, Петербург — 10.III 1955), ок. Петерб. ун-т (1895), д-р техн. н. (1939), проф. (1939), с 1896 работал в Ленингр. технол. ин-те (прикладная математика).
- МИХЛИН** Соломон Григорьевич (р. 23.IV 1908, пос. Холмечь, н. Гомель. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1929), д-р физ.-мат. н. (1935), проф. (1937), в 1932—1941 работал в Сейсмолог. ин-те АН СССР, с 1944 работает в Ленингр. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, математическая физика, интегральные уравнения, приближенные и численные методы).
- МИЩЕНКО** Евгений Фролович (р. 9.III 1922, пос. Нововязники, н. Владимир. обл.), ок. Моск. ун-т (1951), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1958), проф. (1959), лауреат Ленинск. премии (1962), с 1957 работает в Мат. ин-те АН СССР (дифференциальные уравнения, теория оптимальных процессов и их приложения).
- МЛОДЗЕЕВСКИЙ** Болеслав Корнелиевич (10.VII 1858, Москва — 18.I 1923), ок. Моск. ун-т (1880), магистр чист. мат. (1886), д-р мат. (1890), проф. (1892), президент Моск. мат. о-ва (1921—1923), в 1892—1911 и 1917—1922 работал в Моск. ун-те (дифференциальная геометрия, математические методы в механике, динамика твердого тела).
- МОВЧАН** Александр Андреевич (р. 13.VIII 1922, с. Горбы, н. Полтав. обл.), ок. Моск. ун-т (1950), асп. там же (1954), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1961), в 1954—1965 работал в Ин-те мех. АН СССР, с 1965 работает в Ин-те физ. Земли АН СССР (дифференциальные уравнения).
- МОИСЕЕВ** Никита Николаевич (р. 23.VIII 1917), ок. Моск. ун-т (1941), В.-возд. инж. акад. (1942), д-р физ.-мат. н. (1955), проф. (1956), чл.-корр. АН СССР (1967), работал в Моск. физ.-техн. ин-те, с 1955 работает в ВЦ АН СССР (приближенные и численные методы, дифференциальные уравнения в частных производных, вариационное исчисление, гидроаэромеханика).
- МОИСЕЕВ** Николай Дмитриевич (16.XII 1902, г. Пермь — 6.XII 1955), ок. I Моск. ун-т (1924), асп. Астрон. ин-та им. П. К. Штернберга (1929), канд. физ.-мат. н. (1929), д-р физ.-мат. н. (1935), проф. (1935), в 1922—1943 работал в Астрон. ин-те им. П. К. Штернберга (1939—1943 — директор), 1938—1955 — в Моск. ун-те (математические методы в механике, небесная механика).
- МОЛИН** Федор Эдуардович (10.IX 1861, Рига — 25. XII 1941), ок. Дерпт. ун-т (1883), магистр чист. мат. (1885), д-р чист. мат. (1892), проф. (1900), засл. д. н. (1934), с 1900 работал в Томск. технол. ин-те, с 1917 — также в Томск. ун-те (теория функций, алгебра, теория чисел).
- МОЛОДШИЙ** Владимир Николаевич (р. 1.III 1906, г. Белгород-Днестровский, н. Одесск. обл.), ок. Иркутск. ун-т (1928), канд. физ.-мат. н. (1936), д-р физ.-мат. н. (1967), с 1934 работает в Моск. гор. пед. ин-те (история математики).
- МОЛЧАНОВ** Альберт Макарьевич (р. 14.VI 1928, г. Середа, н. г. Фурманов Иванов. обл.), ок. Моск. ун-т (1948), асп. там же (1952), канд. физ.-мат. н.

- (1952), д-р физ.-мат. н. (1963), с 1952 работает в Моск. ун-те, с 1955 — также в Ин-те прикл. мат. АН СССР (алгебра, функциональный анализ).
- МОЛЮКОВ Иван Дмитриевич** (р. 19.VI 1910, с. Карповское, н. Рязан. обл.), ок. Вятск. пед. ин-т (1930), канд. физ.-мат. н. (1935), проф. (1964), с 1935 работает в Казах. ун-те (механика, математическое моделирование).
- МОНАХОВ Валентин Николаевич** (р. 17.VII 1932, г. Енакиево, н. Донецк. обл.), ок. Казан. ун-т (1955), асп. там же (1958), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р физ.-мат. н. (1967), в 1956—1961 работал в Казан. авиац. ин-те, 1961—1966 — в Казан. ун-те, с 1967 работает в Ин-те гидродинам. СО АН СССР и Новосиб. ун-те (теория функций комплексного переменного).
- МОНИН Андрей Сергеевич** (р. 2.VII 1921, Москва), ок. Моск. ун-т (1942), асп. там же (1948), канд. физ.-мат. н. (1949), д-р физ.-мат. н. (1956), проф. (1963), в 1945—1951 работал в Центр. ин-те прогнозов, с 1951 работает в Геофиз. ин-те АН СССР и Ин-те океанологии АН СССР (теория вероятностей, статистическая гидродинамика).
- МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ Дмитрий Дмитриевич** (9.VIII 1876, г. Павловск, н. Ленингр. обл. — 7.II 1952), ок. Петерб. ун-т (1898), магистр чист. мат. (1906), проф. (1909), д-р физ.-мат. н. (1935), в 1909—1914 работал в Варшав. ун-те, 1915—1949 — в Ростов. ун-те, 1950—1952 — в Пятигорск. пед. ин-те (теория функций, теория чисел, геометрия, история математики).
- МОРОЗОВ Владимир Владимирович** (р. 15.XII 1910, г. Вологда), ок. Казан. ун-т (1930), канд. физ.-мат. н. (1938), д-р физ.-мат. н. (1943), проф. (1944), засл. д. н. ТАССР (1955), в 1930—1934 работал в Казан. мед. ин-те, 1932—1941 — в Казан. ин-те инж. коммун. строит., с 1943 работает в Казан. ун-те (алгебра, история математики).
- МОСКВИТИН Виктор Васильевич** (р. 19.IX 1923, г. Темников, н. МАССР), ок. Моск. ун-т (1948), асп. там же (1951), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1963), с 1951 работает в Моск. ун-те (математическая физика, прикладная математика, теория пластичности, реология).
- МУСХЕЛИШВИЛИ Николай Иванович** (р. 16. II 1891, Тифлис), ок. Петерб. ун-т (1914), проф. (1922), чл.-корр. АН СССР (1933), д-р физ.-мат. н. (1934), акад. АН СССР (1939), акад. АН ГрССР (1941), лауреат Гос. премии (1941, 1947), Герой Соц. Труда (1945), иностр. чл. Болг. (1957) и Польск. (1960) АН, чл.-корр. Герм. АН (1968), с 1920 работает в Тбил. ун-те, с 1942 — в Тбил. мат. ин-те АН ГрССР (директор), с 1941 — президент АН ГрССР (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, математические методы в механике, теория упругости).
- МУШТАРИ Хамид Музафарович** (р. 22. VII 1900, Оренбург), ок. Средаз. ун-т (1923), асп. Моск. ун-та (1929), канд. физ.-мат. н. (1934), д-р физ.-мат. н. (1938), проф. (1938), засл. д. н. и т. ТАССР (1940), засл. д. н. и т. РСФСР (1965), с 1938 работает в Казан. хим.-технол. ин-те, с 1946 — также в Казан. физ.-техн. ин-те АН СССР (директор) (приближенные и численные методы, прикладная математика, теория пластин и оболочек).
- МЧЕДЛИШВИЛИ Евстафий Александрович** (р. 29.VIII 1911, с. Сагареджо, н. г. Сагареджо ГрССР), ок. Тбил. лесотехн. ин-т (1935), канд. техн. н. (1942), д-р техн. н. (1963), проф. (1966), с 1949 работает в Тбил. ун-те (начертательная геометрия).
- МЫСОВСКИХ Иван Петрович** (р. 25.XI 1921, д. Друганово, н. Тюмен. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1947), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1965), проф. (1966), с 1950 работает в Ленингр. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные и численные методы).
- МЫШКИС Анатолий Дмитриевич** (р. 13.IV 1920, г. Спасский, н. Рязан. обл.), ок. Моск. ун-т (1941), В.-возд. акад. (1944), канд. физ.-мат. н. (1946), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1952), в 1945—1947 работал в Моск. ун-те, 1948—1953 — в Латв. ун-те, 1953—1956 — в Белорус. ун-те, с 1956 работает в Харьк. авиац. ин-те, с 1961 — также в Физ.-техн. ин-те низких температур АН УССР (дифференциальные уравнения, прикладная математика).
- НАГАЕВ Сергей Викторович** (р. 11.XII 1932, Оренбург), ок. Средаз. ун-т (1955), асп. там же (1958), канд. физ.-мат. н. (1958), д-р физ.-мат. н. (1963),

- в 1958—1964 работал в Ин-те мат. АН УзССР, с 1964 работает в Ин-те мат. СО АН СССР (теория вероятностей).
- НАЗАРОВ Армена́к Гео́ргиевич** (р. 1.IV 1908, Париж), ок. Груз. инж.-строит. ин-т (1932), д-р техн. н. (1945), чл.-корр. АН АрмССР (1945), акад. АН АрмССР (1960), засл. д. н. и т. АрмССР (1958), в 1929—1941 работал в Закавказ. ин-те сооружений, 1941—1946 — в АН ГрССР, с 1946 работает в АН АрмССР, с 1961 — также в Ин-те геофиз. и инж. сейсмологии АН АрмССР (директор) (операционное исчисление, математические методы в механике).
- НАЗАРОВ Никола́й Николаевич** (23.II 1908, Ашхабад — 18.VII 1947), ок. Средаз. ун-т (1924), асп. Мат. ин-та АН СССР (1928), д-р физ.-мат. н. (1938), в 1929—1947 работал в Средаз. ун-те, 1943 — 1947 — в Ин-те мат. и мех. АН УзССР (директор) (функциональный анализ, интегро-дифференциальные уравнения, приближенные и численные методы, математический анализ, механика).
- НАЙМАРК Марк Аронович** (р. 5.XII 1909, Одесса), ок. Одесск. физ.-хим.-мат. ин-т (1933), асп. Одесск. ун-та (1936), канд. физ.-мат. н. (1937), ок. докт. Мат. ин-та АН СССР (1941), д-р физ.-мат. н. (1941), проф. (1942), в 1933—1938 работал в Одесск. ун-те, 1938—1950 — в АН СССР, 1950—1954 — в вузах Москвы, 1954—1962 — в Моск. физ.-техн. ин-те, с 1962 работает в Мат. ин-те АН СССР (функциональный анализ, алгебра).
- НАРЫШКИНА Екатерина Алексеевна** (1895 — 8.III 1940), д-р физ.-мат. н. (теория чисел, математическая физика).
- НАТАНСОН Иси́дор Па́влович** (8.II 1906, Цюрих — 3.VII 1964), ок. Ленингр. ун-т (1929), канд. физ.-мат. н. (1935), д-р физ.-мат. н. (1937), проф. (1939), в 1930—1936 работал в Ленингр. ин-те инж. пром. строит., 1936—1942 — в Ленингр. ин-те точ. мех. и оптики, 1944—1957 — в Ленингр. инж.-строит. ин-те, с 1932 — в Ленингр. ун-те (теория функций, приближенные и численные методы).
- НАУМОВ Адольф Львович** (р. 9.II 1900, г. Староконстантинов, н. Хмельницк. обл.), ок. Киев. ун-т (1922), асп. Киев. ИНО (1929), Киев. политехн. ин-т (1930), канд. техн. н. (1929), канд. физ.-мат. н. (1934), д-р техн. н. (1941), проф. (1946), в 1930—1941 и 1945—1950 работал в Киев. инж.-строит. ин-те, 1932—1941 — также в Ин-те мат. АН УССР, 1941—1944 — в Энергетич. ин-те АН УзССР, 1945—1960 — в Киев. технол. ин-те пищ. пром., с 1960 работает в Киев. ун-те (теория нелинейных колебаний, математические методы в электромеханике).
- НАФТАЛЕВИЧ Арон Генохович** (р. 24. III 1921, г. Шавли, н. г. Шяуляй ЛитССР), ок. Вильнюс. ун-т (1946), асп. Моск. ун-та (1951), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1947 работает в Вильнюс. ун-те (теория функций).
- НЕЙМАРК Ю́рий Исаа́кович** (р. 24.XI 1920, г. Амур-Нижнеднепровский, н. р-н г. Днепропетровска), ок. Горьк. ун-т (1944), асп. там же (1947), канд. физ.-мат. н. (1947), д-р техн. н. (1956), проф. (1961), с 1946 работает в Горьк. ун-те (дифференциальные уравнения, топология, прикладная математика, математические методы в механике, теория реле и автоматов, механика).
- НЕЙШУ́ЛЕР Леони́д Яковле́вич** (23. III 1901, г. Черкассы — 25. III 1959), ок. Моск. ун-т (1926), д-р физ.-мат. н. (1954), в 1931—1934 работал в Моск. ун-те, 1935—1948 — в Мат. ин-те АН СССР, 1948—1950 — в Ин-те точ. мех. и вычисл. техн. АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные и численные методы).
- НЕКРАСОВ Алекса́ндр Ива́нович** (9.XII 1883 — 21.V 1957), ок. Моск. ун-т (1906), проф. (1918), чл.-корр. АН СССР (1932), акад. АН СССР (1946), засл. д. н. и т. РСФСР (1947), лауреат премии им. Н. Е. Жуковского (1922), Гос. премии (1951), с 1912 работал в Моск. ун-те, с 1944 — также в Ин-те мех. АН СССР (интегро-дифференциальные уравнения, функциональный анализ, аэродинамика).
- НЕЛЕ́ПИН Рона́льд Аполло́нович** (р. 20.V 1928, Москва), ок. Ленингр. высш. в.-мор. инж. уч-ще (1951), асп. там же (1957), канд. техн. н. (1958), д-р техн. н. (1967), с 1957 работает в вузах Ленинграда (прикладная математика, механика).
- НЕ́МЫЦКИЙ Ви́ктор Влади́мирович** (22.XI 1900, Смоленск — 7.VIII 1967), ок. Моск. ун-т (1925), асп. там же (1929), д-р физ.-мат. н. (1936), проф. (1936), с 1929 работал в Моск. ун-те (дифференциальные и интегральные уравнения, функциональный анализ, теория функций, топология).

- НЕСТОРОВИЧ Николай Михайлович** (1891—21.XII 1955), ок. Ростов. ун-т (1915), канд. физ.-мат. н. (1936), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1953), в 1918—1955 работал в Ростов. ун-те (геометрия).
- НИКОЛАДЗЕ Георгий Николаевич** (10.VIII 1888, с. Диди-Джихаиши, н. ГрССР — 22.IX 1931), ок. Петерб. технол. ин-т (1913), проф. (1918), д-р мат. (1928), в 1918—1931 работал в Тбил. ун-те (вариационное исчисление, алгебраическая геометрия).
- НИКОЛАЕВ Петр Владимирович** (р. 10.IX 1902, с. Параней, н. ЧАССР), ок. Казан. ун-т (1928), канд. физ.-мат. н. (1940), проф. (1964), с 1930 работает в Уральск. политехн. ин-те, с 1960 — также в Свердловск. пед. ин-те (номография).
- НИКОЛЬСКИЙ Сергей Михайлович** (р. 30.IV 1905, з-д Талица, н. Перм. обл.), ок. Днепропетр. ИНО (1929), асп. Моск. ун-та (1935), канд. физ.-мат. н. (1935), ок. докт. Мат. ин-та АН СССР (1942), д-р физ.-мат. н. (1942), проф. (1943), чл.-корр. АН СССР (1968), лауреат Гос. премии (1952), чл. Амер. мат. о-ва (1965), в 1930—1940 работал в Днепропетр. ун-те, с 1941 работает в Мат. ин-те АН СССР, с 1947 — также в Моск. физ.-техн. ин-те (теория функций, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные уравнения, приближенные и численные методы, функциональный анализ).
- НОВИКОВ Петр Сергеевич** (р. 28.VIII 1901, Москва), ок. Моск. ун-т (1925), д-р физ.-мат. н. (1935), проф. (1939), чл.-корр. АН СССР (1953), акад. АН СССР (1960), лауреат Ленинск. премии (1957), в 1929—1934 работал в Моск. хим.-технол. ин-те, с 1934 работает в Мат. ин-те АН СССР (основания математики, математическая логика, алгебра, топология, теория функций, математическая физика, история математики).
- НОВИКОВ Сергей Петрович** (р. 20.III 1938, Москва), ок. Моск. ун-т (1960), асп. Мат. ин-та АН СССР (1963), д-р физ.-мат. н., чл.-корр. АН СССР (1966), проф. (1967), лауреат Ленинск. премии (1967), с 1963 работает в Мат. ин-те АН СССР и Моск. ун-те (топология).
- НОВОСЕЛОВ Виктор Сергеевич** (р. 2.VII 1926, д. Захарово, н. Моск. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1951), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1962), с 1951 работает в Ленингр. ун-те (дифференциальные уравнения, теория функций действительного переменного, прикладная математика, аналитическая механика).
- НОРДЕН Александр Петрович** (р. 24.VII 1904, Саратов), ок. Моск. ун-т (1930), асп. там же (1932), д-р физ.-мат. н. (1937), проф. (1937), засл. д. н. ТАССР (1954), засл. д. н. РСФСР (1964), в 1930—1941 работал в Моск. ун-те, 1941—1945 — в Новосиб. ин-те инж. ж.-д. трансп., с 1945 работает в Казан. ун-те (геометрия, история математики).
- НУЖИН Михаил Тихонович** (р. 21.X 1914, с. Острожка, н. Перм. обл.), ок. Казан. ун-т (1938), асп. там же (1947), д-р физ.-мат. н. (1954), проф. (1955), засл. д. н. РСФСР (1964), с 1946 (и в 1936—1939) работает в Казан. ун-те (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных).
- НУМЕРОВ Сергей Николаевич** (р. 3.VIII 1910, Новгород), ок. Ленингр. ун-т (1937), канд. техн. н. (1943), д-р техн. н. (1956), проф. (1957), в 1945—1952 работал в Ленингр. политехн. ин-те, 1952—1958 — в Ленингр. ин-те механиз. и электрификац. с. х., с 1932 работает во Всесоюзн. НИИ газа, с 1958 — также в Ленингр. инж.-строит. ин-те (приближенные и численные методы, прикладная математика, гидромеханика).
- НУУТ Юрий Юрьевич** (10.VII 1898, Петербург — 31.V 1952), ок. Петерб. ун-т (1914), д-р филос. (1927), проф. (1936), д-р физ.-мат. н. (1946), акад. АН ЭССР (1946), в 1926—1936 работал в Тартуск. ун-те, 1936—1941 — в Таллин. политехн. ин-те (основания математики, геометрия).
- ОБМОРШЕВ Александр Николаевич** (29.V 1901, г. Козлов, н. г. Мичуринск Тамбов. обл. — 12.XI 1961), ок. Моск. ун-т (1928), канд. техн. н. (1938), д-р техн. н. (1953), проф. (1954), с 1929 работал в Моск. высш. техн. уч-ще (математические методы в механике).
- ОБУХОВ Александр Михайлович** (р. 5.V 1918, Саратов), ок. Моск. ун-т (1940), асп. там же (1941), канд. физ.-мат. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1947), проф. (1949), чл.-корр. АН СССР (1953), в 1941—1955 работал в Геофиз. ин-те АН СССР,

- с 1956 работает в Ин-те физ. атмосферы АН СССР (директор) (теория вероятностей и математическая статистика).
- ОВСЯННИКОВ Лев Васильевич** (р. 22.IV 1919, г. Васильсурск, н. Горьк. обл.), ок. Моск. ун-т (1941), Ленингр. в.-возд. инж. акад. (1945), адъюнкт. там же (1948), канд. техн. н. (1949), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1963), чл.-корр. АН СССР (1964), лауреат Ленинск. премии (1958), в 1950—1953 работал в Ленингр. ун-те, 1956—1959 — в Моск. физ.-техн. ин-те, с 1959 работает в Ин-те гидродинам. СО АН СССР и Новосиб. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, гидродинамика).
- ОГИБАЛОВ Петр Матвеевич** (р. 10.VII 1907, пос. Садчиковский, н. Кустанай. обл.), ок. Моск. ун-т (1937), асп. там же (1940), канд. физ.-мат. н. (1940), д-р физ.-мат. н. (1950), проф. (1951), засл. д. н. РСФСР (1967), с 1931 работает в Моск. ун-те (математические методы в механике, теория упругости).
- ОГИВЕЦКИЙ Исаак Ефимович** (4.IV 1889, г. Староконстантинов, н. Хмельницк. обл. — 19.II 1956), ок. Новорос. ун-т (1913), проф. (1927), канд. физ.-мат. н. (1938), в 1922—1956 работал в Днепропетр. ун-те, 1930—1956 — также в Днепропетр. ин-те инж. ж.-д. трансп. (геометрия, математический анализ, теория функций).
- ОГЛОБЛИН Николай Васильевич** (24.XII 1881, г. Житомир — 23.VII 1935), ок. Киев. ун-т (1904), проф. (1921), в 1912—1919 работал на Киев. высш. женск. курсах, 1919—1925 — в Крым. ун-те, с 1925 — в Крым. пед. ин-те (геометрия, математический анализ, механика, методика математики).
- ОГОРОДНИКОВ Кирилл Федорович** (р. 30. VII 1900, Петербург), ок. Моск. ун-т (1923), асп. там же (1929), проф. (1931), д-р физ.-мат. н. (1936), действ. чл. Междунаро. акад. астрономии (1963), в 1922—1934 работал в Астрон. ин-те им. П. К. Штернберга, 1934—1938 — в Главной астрон. обсерватории АН СССР, 1938—1941 — в В.-трансп. акад., с 1941 — работает в Ленингр. ун-те, с 1953 — также во Всесоюзн. ин-те научн. и техн. информации АН СССР (прикладная математика, строение и динамика звездных систем).
- ОЛЕВСКИЙ Александр Моисеевич** (р. 12.II 1939, Москва), ок. Моск. ун-т (1960), асп. там же, д-р физ.-мат. н. (1967), проф., работает в Моск. ин-те электрон. машиностр. (теория функций).
- ОЛЕВСКИЙ Моисей Натанович** (р. 26.II 1906, с. Усть-Уда, н. Иркутск. обл.), ок. Иркутск. ун-т (1927), асп. Моск. ун-та, д-р физ.-мат. н. (1944), проф. (1945), с 1944 работает в Моск. ин-те с.-х. производства (дифференциальные уравнения в частных производных).
- ОЛЕЙНИК Ольга Арсеньевна** (р. 2.VII 1925), ок. Моск. ун-т (1947), асп. там же (1950), д-р физ.-мат. н. (1954), проф. (1955), действ. иностр. чл. Итал. АН (1967), с 1950 работает в Моск. ун-те, с 1965 — также в Ин-те проблем мех. АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных, топология, прикладная математика).
- ОПЕЙКО Федор Александрович** (р. 21.II 1908, Минск), ок. Моск. торф. ин-т (1932), д-р техн. н. (1949), проф. (1950), чл.-корр. АН БССР (1950), в 1933—1941 работал в Белорус. политехн. ин-те, 1942—1949 — в Моск. ин-те механиз. и электрификац. с. х., с 1949 работает в Белорус. политехн. ин-те (прикладная математика).
- ОРЛОВ Михаил Хрисанфович** (7.I 1900, Киев — окт. 1936), ок. Киев. ИНО (1924), асп. там же (1928), канд. физ.-мат. н. (1928), проф. (1929), д-р физ.-мат. н. (1931), чл.-корр. АН УССР (1934), в 1931—1934 работал в Укр. НИИ мат. и мех. (директор), 1933—1934 — также в Харьк. ун-те, с 1934 — в Киев. ун-те и Ин-те мат. АН УССР (интегральные уравнения, приближенные и численные методы).
- ОСТАПЕНКО Владимир Николаевич** (р. 29. VII 1923, г. Глухов, н. Сумск. обл.), ок. Киев. ун-т (1952), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1966), в 1951—1957 работал в Ин-те мат. АН УССР, с 1957 работает в Ин-те кибернетики АН УССР (дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные и численные методы).
- ОСТРОВСКИЙ Геннадий Маркович** (р. 20.VIII 1930, Москва), ок. Моск. ун-т (1953), канд. физ.-мат. н. (1958), д-р техн. н. (1967), в 1953—1957 работал в НИИ теплоприборостр., 1957—1961 — в НИИ счетмаш., с 1961 работает в Физ.-хим.

- НИИ (приближенные и численные методы, математическое моделирование, прикладная математика).
- ОСТРОВСКИЙ Иосиф Владимирович (р. 6.IV 1934, Днепропетровск), ок. Харьк. ун-т (1956), асп. там же (1958), канд. физ.-мат. н. (1959), д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1967), с 1958 работает в Харьк. ун-те (теория функций, теория вероятностей).
- ОХОЦИМСКИЙ Дмитрий Евгеньевич (р. 26. II 1921), ок. Моск. ун-т (1946), асп. Мат. ин-та АН СССР, д-р физ.-мат. н. (1958), проф. (1961), чл.-корр. АН СССР (1960), в 1945—1954 работал в Мат. ин-те АН СССР, с 1953 работает в Ин-те прикл. мат. АН СССР, с 1960 — также в Моск. ун-те (вариационное исчисление, математическая статистика).
- ПАВЛЮК Иван Адамович (р. 28.VI 1915, с. Журбинцы, н. Винницк. обл.), ок. Киев. ун-т (1952), асп. там же (1955), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1969), с 1955 работает в Киев. ун-те (дифференциальные уравнения).
- ПАЛАМODOB Виктор Павлович (р. 28.V 1938, г. Рыбинск Ярослав. обл.), ок. Моск. ун-т (1960), канд. физ.-мат. н. (1963), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1960 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения, комплексный анализ, математическая статистика).
- ПАНОВ Дмитрий Юрьевич (р. 5.IX 1904, Москва), ок. Моск. ун-т (1927), асп. там же (1930), д-р техн. н. (1937), проф. (1937), в 1950—1958 работал в Ин-те точ. мех. и вычисл. техн. АН СССР, 1952—1958 — также в Ин-те научн. информации АН СССР (в 1952 — директор), с 1947 работает в Моск. ун-те (приближенные и численные методы, теория информации).
- ПАНЬКИН Николай Андреевич (р. 19.XI 1922, с. Урлейка, н. Пенз. обл.), ок. Моск. энерго-мех. ин-т инж. трансп. (1949), асп. там же (1952), канд. техн. н. (1952), д-р техн. н. (1964), проф. (1966), в 1952—1960 работал во Всесоюзн. заочн. ин-те инж. ж.-д. трансп., с 1960 работает в Моск. ин-те инж. ж.-д. трансп. (дифференциальные уравнения, прикладная математика и механика).
- ПАПАЛЕКСИ Николай Дмитриевич (2.XII 1880, Симферополь — 3.II 1947), ок. Страсбург. ун-т (1904), проф. (1922), чл.-корр. АН СССР (1931), акад. АН СССР (1939), лауреат Гос. премии (1942), в 1918—1922 работал в Одесск. политехн. ин-те, 1923—1935 — в Ленингр. центр. радиолабор., с 1935 — в Физ. ин-те АН СССР, с 1938 — также в Ленингр. энергетич. ин-те, с 1944 — также во Всесоюзн. научн. совете по радиофиз. и радиотехн. при АН СССР (приближенные и численные методы, физика).
- ПАРАСЮК Остап Степанович (р. 20.XII 1921, с. Билка, н. Львов. обл.), ок. Львов. ун-т (1947), асп. АН УССР (1949), канд. физ.-мат. н. (1949), ок. докт. АН УССР (1954), д-р физ.-мат. н. (1955), проф. (1957), чл.-корр. АН УССР (1958), акад. АН УССР (1964), с 1949 работает в Ин-те мат. АН УССР, с 1966 — также в Ин-те теор. физ. АН УССР, в 1966 — 1969 — академик-секретарь Отд. физ. АН УССР (математическая и теоретическая физика, дифференциальные уравнения, функциональный анализ, топология, теория вероятностей, теория упругости).
- ПАРФЕНТЬЕВ Николай Николаевич (31.III 1877 — 22.I 1943), ок. Казан. ун-т, (1899), магистр чист. мат. (1911), проф. (1911), засл. д. н. и т. (1940), с 1904 работал в Казан. ун-те (теория вероятностей, теория функций, история математики).
- ПАСЫНКОВ Борис Алексеевич (р. 24.VI 1937, г. Бийск Алтайск. края), ок. Моск. ун-т (1959), канд. физ.-мат. н. (1963), д-р физ.-мат. н. (1965), с 1964 работает в Моск. ун-те (топология).
- ПЕНТКОВСКИЙ Мстислав Вячеславович (р. 1.III 1911, Петербург), ок. Моск. ун-т (1934), асп. там же (1937), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1955), чл.-корр. АН КазССР (1954), акад. АН КазССР (1958), в 1937—1940 работал в Казах. пед. ин-те, 1940—1956 — в вузах Москвы и Ленинграда, 1957—1962 — в АН КазССР, с 1962 работает в Моск. хим.-технол. ин-те (номография).
- ПЕРВОЗВАНСКИЙ Анатолий Аркадьевич (р. 23.IV 1932, Ленинград), ок. Ленингр. политехн. ин-т (1954), д-р техн. н. (1963), проф. (1965), в 1954—1957 работал в Ин-те электромех. АН СССР, с 1958 работает в Ленингр. политехн. ин-те (прикладная математика, теория автоматического регулирования, программирование).

- ПЕРЕПЕЛКИН Дмитрий Иванович** (9.VI 1900, Москва — 9.XI 1954), ок. Моск. ун-т (1923), асп. там же (1930), проф. (1935), д-р физ.-мат. н. (1944), чл.-корр. АПН РСФСР (1950), с 1935 работал в Моск. пед. ин-те (геометрия, номография, методика математики).
- ПЕРСИДСКИЙ Константин Петрович** (р. 23.X 1903, г. Сызрань, н. Куйбышев. обл.), ок. Казан. ун-т (1927), проф. (1934), д-р физ.-мат. н. (1947), акад. АН КазССР (1951), засл. д. н. КазССР (1944), в 1927—1940 работал в Казан. ун-те, с 1940 работает в Казах. ун-те, с 1946 — также в АН КазССР, с 1966 — в Ин-те мат. и мех. АН КазССР (директор) (дифференциальные уравнения).
- ПЕТРАШЕНЬ Георгий Иванович** (р. 5.VIII 1914, г. Череповец, н. Вологод. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1937), асп. там же (1940), д-р физ.-мат. н. (1945), проф. (1946), работает в Ленингр. ун-те и Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР (с 1958 — директор) (дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные и численные методы).
- ПЕТРЕНКО Аким Иванович** (р. 19. IX 1882), ок. Моск. межевой ин-т (1909), д-р техн. н. (1939), с 1944 работал в Харьк. с.-х. ин-те (геометрия).
- ПЕТРОВ Алексей Зиновьевич** (р. 28.X 1910, с. Кошки, н. Куйбышев. обл.), ок. Казан. ун-т (1937), канд. физ.-мат. н. (1943), д-р физ.-мат. н. (1958), проф. (1959), акад. АН УССР (1969), в 1938—1941 работал в Казан. авиац. ин-те, в 1943—1969 — в Казан. ун-те, с 1969 работает в Ин-те теор. физ. АН УССР (дифференциальная геометрия, математическая физика, квантовая теория поля).
- ПЕТРОВ Борис Николаевич** (р. 11.III 1913), ок. Моск. энергетич. ин-т (1939), д-р физ.-мат. н. (1945), проф. (1948), чл.-корр. АН СССР (1953), акад. АН СССР (1960), с 1939 работает в Ин-те автомат. и телемех. АН СССР (1946—1951 — директор), с 1944 — также в Моск. авиац. ин-те (дифференциальные уравнения, теория автоматического регулирования, телемеханика).
- ПЕТРОВ Валентин Владимирович** (р. 10.II 1931, с. Холомки, н. Псков. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1952), асп. там же (1955), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1963), с 1955 работает в Ленингр. ун-те (теория вероятностей).
- ПЕТРОВ Георгий Иванович** (р. 31.V 1912, г. Пинега, н. Арханг. обл.), ок. Моск. ун-т (1935), проф. (1953), чл.-корр. АН СССР (1953), акад. АН СССР (1958), лауреат Гос. премии (1949), Герой Соц. Труда (дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные и численные методы, начертательная геометрия).
- ПЕТРОВСКИЙ Иван Георгиевич** (р. 18.I 1901, г. Севск, н. Брянск. обл.), ок. Моск. ун-т (1927), проф. (1933), д-р физ.-мат. н. (1935), акад. АН СССР (1946), дважды лауреат Гос. премии (1946, 1952), Герой Соц. Труда (1968), почетн. д-р Лундск. (Швеция) ун-та (1968), с 1930 работает в Моск. ун-те (с 1951 — ректор) (дифференциальные уравнения, топология, вариационное исчисление, функциональный анализ, алгебраическая геометрия).
- ПЕТРОСЯН Гарегин Бахшиевич** (р. 10.IX 1902, г. Горис, н. АрмССР), ок. Ереван. ун-т (1929), асп. Моск. ун-та (1934), д-р физ.-мат. н. (1956), проф. (1964), чл.-корр. Междунар. акад. ист. наук (1965), с 1934 работает в Ереван. ун-те, с 1958 — также в АН АрмССР (история математики).
- ПЕТУНИН Юрий Иванович** (р. 30.IX 1937, г. Мичуринск Тамбов. обл.), ок. Тамбов. пед. ин-т (1959), асп. Воронеж. ун-та (1961), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р физ.-мат. н. (1968), с 1963 работает в Воронеж. ун-те (функциональный анализ, теория вероятностей и математическая статистика, биологическая кибернетика).
- ПИНСКЕР Арон Григорьевич** (р. 13.XI 1905, с. Юрковщино, н. Смоленск. обл.), ок. Ленингр. пед. ин-т (1939), канд. физ.-мат. н. (1939), д-р физ.-мат. н. (1950), проф. (1951), в 1939—1941, 1945—1950 работал в Ленингр. ин-те точ. мех. и оптики, 1950—1953 — в Ленингр. пед. ин-те, с 1954 работает в Ленингр. инж.-экон. ин-те (функциональный анализ, алгебра).
- ПИНСКЕР Марк Семенович (Шлемович)** (р. 24.IV 1925, Москва), ок. Моск. ун-т (1949), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1963), с 1955 работает в Ин-те проблем передачи информации АН СССР (теория вероятностей и теория информации).

- ПИСАРЕНКО** Георгий Степанович (р. 12.XI 1910, Полтава), ок. Горьк. индустр. ин-т (1936), асп. Киев. индустр. ин-та (1940), канд. физ.-мат. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1948), проф. (1950), чл.-корр. АН УССР (1957), акад. АН УССР (1964), лауреат Гос. премии УССР (1969), в 1939—1951 работал в Ин-те строит. мех. АН УССР, 1951—1966 — в Ин-те проблем материаловед., 1962—1966 — главный ученый секретарь Президиума АН УССР, с 1966 работает в Ин-те проблем прочности АН УССР (директор), с 1970 — вице-президент АН УССР (прикладная математика, математические методы в механике).
- ПISKУНОВ** Николай Семенович (р. 9.V 1908, д. Фрольцево, н. Иванов. обл.), ок. Ярослав. пед. ин-т (1929), асп. Моск. ун-та (1935), канд. физ.-мат. н. (1936), д-р физ.-мат. н. (1939), проф. (1939), засл. д. н. РСФСР (1965), с 1941 работает в Мат. ин-те АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных, математическая физика, математическое моделирование, гидромеханика).
- ПЛАТОНОВ** Владимир Петрович (р. 1.XII 1939, пос. Богушевск Витебск. обл.), ок. Белорус. ун-т (1961), асп. там же (1963), канд. физ.-мат. н. (1963), д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1968), чл.-корр. АН БССР (1968), с 1963 работает в Белорус. ун-те (алгебра).
- ПЛЕСНЕР** Абрам Иезекиилович (13.II 1900, г. Лодзь — 18.IV 1961), уч. в Гиссен., Геттинген., Берлин. ун-тах, ок. Гиссен. ун-т (1922), д-р физ.-мат. н. (1935), проф. (1938), в 1932—1948 работал в Моск. ун-те, 1934—1949 — также в Мат. ин-те АН СССР (теория функций комплексного переменного, функциональный анализ, операционное исчисление).
- ПЛЕХОТИН** Анатолий Потапович (р. 10.III 1919, г. Новороссийск, н. Краснодар. край), ок. Ленингр. ун-т (1941), канд. физ.-мат. н. (1956), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1967) (приближенные и численные методы, дифференциальные уравнения).
- ПЛИСС** Виктор Александрович (р. 10.II 1932, г. Сыктывкар, н. Коми АССР), ок. Ленингр. ун-т (1954), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1959), проф. (1961), с 1957 работает в Ленингр. ун-те (дифференциальные уравнения).
- ПЛОТКИН** Борис Исаакович (р. 21.X 1925, г. Бобруйск, н. Могилев. обл.), ок. Уральск. ун-т (1950), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1956), проф. (1958), засл. д. н. ЛатвССР (1966), в 1956—1960 работал в Уральск. ин-те инж. ж.-д. трансп., с 1960 работает в вузах Риги (алгебра).
- ПОВЗНЕР** Александр Яковлевич (р. 27.VI 1915, Полтава), ок. Харьк. ун-т (1936), канд. физ.-мат. н. (1938), д-р физ.-мат. н. (1946), проф. (1947), в 1938—1941, 1946—1960 работал в Харьк. ун-те, 1960—1969 — в Ин-те хим. физ. АН СССР, с 1969 работает в Ин-те физики Земли АН СССР (функциональный анализ, математическая физика).
- ПОГОРЕЛОВ** Алексей Васильевич (р. 3.III 1919, г. Короча, н. Белгород. обл.), ок. В.-возд. инж. акад. (1945), канд. физ.-мат. н. (1947), д-р физ.-мат. н. (1948), проф. (1950), чл.-корр. АН УССР (1951), акад. АН УССР (1961), чл.-корр. АН СССР (1960), лауреат Гос. премии (1950), Ленинск. премии (1962), с 1947 работает в Харьк. ун-те, с 1960 — также в Физ.-техн. ин-те низких температур АН УССР (геометрия, дифференциальные уравнения в частных производных, теория упругих оболочек).
- ПОГРЕБЫССКИЙ** Иосиф Бенедиктович (р. 23.II 1906, г. Умань, н. Черкасск. обл.), ок. Киев. ИНО (1928), канд. физ.-мат. н. (1940), чл.-корр. Междунар. акад. ист. наук (1965), д-р физ.-мат. н. (1966), в 1935—1941, 1946—1962 работал в Ин-те мат. АН УССР, с 1962 работает в Ин-те истории естествозн. и техн. АН СССР (прикладная математика, механика, история математики и механики).
- ПОЗНЯК** Эдуард Генрихович (р. 1.V 1923, Оренбург), ок. Моск. ун-т (1947), асп. там же (1950), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1967), проф. (1967), с 1951 работает в Моск. ун-те (геометрия).
- ПОЛОЖИЙ** Георгий Николаевич (23.IV 1914, ст. 37-й разъезд, н. Читинск. обл. — 26.IX 1968), ок. Саратов. ун-т (1938), канд. физ.-мат. н. (1946), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1953), чл.-корр. АН УССР (1967), в 1938—1948 работал в Саратов. ун-те, с 1949 — в Киев. ун-те (теория функций комплексного переменного, приближенные и численные методы, математическая физика, прикладная математика, теория упругости, теория фильтрации).
- ПОЛОСУХИНА** Ольга Андреевна (13.I 1883, Петербург — 7.VII 1958), ок. Пе-

- терб. высш. женск. курсы (1906), д-р филос. Цюрих. ун-та (1910), канд. физ. мат. н. (1938), в 1910—1919 работала на Петроград. высш. женск. курсах, 1919—1957 — в Ленингр. ун-те (дифференциальные уравнения).
- ПОНОМАРЕВ Владимир Иванович** (р. 11.V 1937, Москва), ок. Моск. ун-т (1959), д-р физ.-мат. н. (1965), с 1961 работает в Моск. ун-те (топология).
- ПОНТРЯГИН Лев Семенович** (р. 3.IX 1908, Москва), ок. Моск. ун-т (1929), д-р физ.-мат. н., проф. (1935), акад. АН СССР (1958), лауреат Гос. премии (1941), Ленинск. премии (1962), премии им. Н. И. Лобачевского (1966), Герой Соц. Труда (1969), с 1930 работает в Мат. ин-те АН СССР и Моск. ун-те (топология, алгебра, дифференциальные уравнения, функциональный анализ, теория оптимальных процессов).
- ПОПОВ Александр Иванович** (р. 17.V 1899, Петербург), ок. Ленингр. ун-т (1924), канд. физ.-мат. н. (1938), д-р ист. н. (1950), проф. (1950), в 1930—1946 работал в Ленингр. политехн. ин-те, с 1944 работает в Ленингр. ун-те (теория функций действительного переменного).
- ПОПОВ Алексей Александрович** (р. 17.X 1905, г. Мотовилиха, н. Перм. обл.), ок. Моск. ин-т инж. трансп. (1928), асп. там же (1931), д-р техн. н. (1938), проф. (1938), засл. д. н. и т. (1966), в 1928—1960 работал в НИИ ж.-д. трансп., 1940—1966 — в Моск. автомех. ин-те (приближенные и численные методы, номография).
- ПОПОВ Геннадий Яковлевич** (р. 6. X 1932, с. Челкар Караганд. обл.), ок. Одесск. гидротехн. ин-т (1954), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1965), с 1961 работает в Одесск. инж.-строит. ин-те (интегро-дифференциальные уравнения, прикладная математика, теория упругости).
- ПОССЕ Константин Александрович** (1847—1928), ок. Петерб. ун-т (1868), магистр чист. мат. (1873), д-р чист. мат. (1882), проф. (1886), с 1873 работал в Петерб. ун-те, ин-те инж. путей сообщ., электротехн. и технол. ин-тах (математический анализ, теория функций).
- ПОСТНИКОВ Алексей Георгиевич** (р. 12.VI 1921, Москва), ок. Моск. ун-т (1946), асп. там же (1949), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1956), чл. Моск. и Амер. мат. о-в, с 1950 работает в Мат. ин-те АН СССР (теория чисел, теория функций, теория вероятностей).
- ПОСТНИКОВ Михаил Михайлович** (р. 27.X 1927, г. Шатура, н. Моск. обл.), ок. Моск. ун-т (1945), асп. Мат. ин-та АН СССР (1949), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1954), лауреат Ленинск. премии (1961), с 1949 работает в Мат. ин-те АН СССР, с 1954 — также в Моск. ун-те (топология).
- ПОТАПОВ Василий Силуанович** (1900, с. Ракашево, н. ТАССР — 8.I 1956), ок. Киев. ун-т (1923), канд. физ.-мат. н., проф. (1930), в 1928—1930 работал в Казах. ун-те, 1930—1941 — в Куйбышев. индустр. ин-те, 1944—1955 — в Сталинград. пед. ин-те (дифференциальные уравнения в частных производных, теория функций действительного переменного, история математики).
- ПОТАПОВ Владимир Петрович** (р. в 1914), проф., работает в Одесск. технол. ин-те пищ. и холодильн. пром. (функциональный анализ, теория функций).
- ПРИВАЛОВ Иван Иванович** (11.II 1891, г. Нижний Ломов, н. Пенз. обл. — 13. VII 1941), ок. Моск. ун-т (1913), д-р физ.-мат. н., проф., чл.-корр. АН СССР (1939), с 1916 работал в Моск. ун-те, с 1923 — также в других вузах Москвы (теория функций, интегральные уравнения).
- ПРОХОРОВ Юрий Васильевич** (р. 15. XII 1929, Москва), ок. Моск. ун-т (1949), д-р физ.-мат. н. (1956), проф. (1958), чл.-корр. АН СССР (1966), лауреат Ленинск. премии (1970), с 1949 работает в Мат. ин-те АН СССР, с 1952 — также в Моск. ун-те (теория вероятностей, математические методы в теоретической физике).
- ПУГАЧЕВ Владимир Семенович** (р. 25.III 1911, Рязань), ок. В.-возд. инж. акад. (1931), д-р техн. н. (1939), проф. (1939), засл. д. н. и т. РСФСР (1958) (теория вероятностей и математическая статистика).
- ПУДОВКИН Михаил Александрович** (р. 21.XI 1914, с. Паново, н. ТАССР), ок. Казан. ун-т (1938), асп. там же (1946), канд. физ.-мат. н. (1947), д-р физ.-мат. н. (1966), в 1938—1940 работал в Куйбышев. индустр. ин-те, с 1946 (и в 1940, 1941) работает в Казан. ун-те (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных).

- ПУЛЬКИН** Степан Павлович (р. 11.I 1907, с. Вотча, н. КомиАССР), ок. Иркутск. ун-т (1930), канд. физ.-мат. н. (1938), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1961), с 1931 работает в Куйбышев. пед. ин-те (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные и численные методы).
- ПУТЯТА** Татьяна Васильевна (р. 19.XII 1906, Киев), ок. Киев. ИНО (1926), асп. Киев. физ.-хим.-мат. ин-та (1931), канд. физ.-мат. н. (1948), проф. (1966), с 1930 работает в Киев. политехн. ин-те (теория функций комплексного переменного, прикладная математика, механика, история механики).
- ПУХОВ** Георгий Евгеньевич (р. 23.VIII 1916, г. Сарапул, н. УАССР), ок. Томск. политехн. ин-т (1940), асп. там же (1944), канд. техн. н. (1944), д-р техн. н. (1952), проф. (1954), чл.-корр. АН УССР (1961), акад. АН УССР (1967), с 1957 работает в Киев. ин-те инж. гражд. авиац., с 1962 — также в Ин-те кибернетики АН УССР (в 1958—1962 — в ВЦ АН УССР) (вычислительная математика и техника, кибернетика).
- ПФЕЙФЕР** Георгий (Юрий) Васильевич (23.X 1872, с. Сокиринцы, н. Чернигов. обл. — 10.X 1946), ок. Киев. ун-т (1896), магистр чист. мат. (1903), д-р чист. мат. (1911), проф., акад. АН УССР (1920), в 1900—1946 работал в Киев. ун-те, 1941—1944 — также в Ин-те мат. и физ. АН УССР (директор) (дифференциальные уравнения в частных производных, алгебраическая геометрия).
- ПХАКАДЗЕ** Шалва Самсонович (р. 25.III 1919, с. Зеда Сакара, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1941), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1965), в 1962—1967 работал в Груз. политехн. ин-те, с 1952 работает в Тбил. мат. ин-те АН ГрССР, с 1967 — также в Тбил. ун-те (теория функций действительного переменного).
- ПШЕБОРСКИЙ** Антоний Бонифаций Павлович (3.VIII 1871 — 11.IX 1941), ок. Киев. ун-т (1894), магистр чист. мат. (1902), д-р чист. мат. (1908), проф. (1908), с 1901 работал в Харьк. ун-те, в 1923 — в Варшав. ун-те и Варшав. политехн. ин-те (математический анализ, вариационное исчисление, механика).
- ПЯТЕЦКИЙ-ШАПИРО** Илья Иосифович (р. 30.III 1929), ок. Моск. ун-т (1951), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1967), с 1964 работает в Ин-те прикл. мат. АН СССР и Моск. ун-те (теория чисел, алгебра, теория функций, функциональный анализ).
- РАБОТНОВ** Юрий Николаевич (р. 24.II 1914, Нижний Новгород), ок. Моск. ун-т (1935), д-р физ.-мат. н. (1946), проф. (1946), чл.-корр. АН СССР (1953), акад. АН СССР (1958), в 1935—1946 работал в Моск. энергетич. ин-те, с 1947 работает в Моск. ун-те (прикладная математика, теория пластин и оболочек).
- РАГУЛЬСКИС** Казимерас Миколо (р. 9.I 1928, д. Кловайняй, н. ЛитССР) ок. Каунас. политехн. ин-т (1951), асп. Ин-та машиновед. АН СССР (1954), канд. техн. н. (1954), д-р техн. н. (1963), проф. (1967), в 1954—1963 работал в Ин-те энергет. и электротехн. АН ЛитССР, с 1963 работает в Каунас. политехн. ин-те (прикладная математика, дифференциальные уравнения).
- РАЗМАДЗЕ** Андрей Михайлович (11.VIII 1889, с. Чхениси, н. ГрССР — 2. X 1929), ок. Моск. ун-т (1910), проф. (1918), д-р физ.-мат. н. (1925), с 1918 работал в Тбил. ун-те (вариационное исчисление, математический анализ).
- РАЗУМИХИН** Борис Сергеевич (р. 19. III 1918, г. Кострома), ок. Моск. ун-т (1941), асп. там же, канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1959), проф. (1966), в 1953—1964 работал в Ин-те мех. АН СССР, с 1964 работает в Ин-те автом. и телемех. АН СССР (дифференциальные уравнения, аналитическая механика, вычислительная математика, программирование, математические методы в экономике).
- РАЙКОВ** Дмитрий Абрамович (р. 11.XI 1905, Одесса), ок. Моск. ун-т (1929), д-р физ.-мат. н. (1941), проф. (1950), в 1933—1935 работал в Воронеж. ун-те, 1935—1943 — в Гостехиздате, 1938—1948 — в Мат. ин-те АН СССР, 1949—1952 — в Костром. пед. ин-те, 1952—1956 — в Шуйск. пед. ин-те, с 1957 работает в Моск. пед. ин-те (функциональный анализ, теория вероятностей, топология).
- РАПОПОРТ** Илья Маркович (р. 26.VII 1913, Петербург), ок. Киев. ун-т (1938), д-р техн. н. (1949), проф. (1956), с 1947 работал в Ин-те мат. АН УССР, с 1954 — также в Киев. пед. ин-те (дифференциальные и интегральные уравнения, функциональный анализ, приближенные и численные методы).

- РАСУЛОВ Меджид Лятифович** (р. 6.VII 1916, г. Нуха, н. АзССР), ок. Азерб. пед.ин-т (1938), асп. там же (1939), Львов. фил. АН УССР (1948), канд. физ.-мат. н. (1949), д-р физ.-мат. н. (1961), проф., чл.-корр. АН АзССР (1968), в 1948—1953 работал в Азерб. ун-те, 1953—1960 — во Львов. ун-те, с 1960 работает в Азерб. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, функциональный анализ).
- РАХМАТУЛИН Халил Ахмедович** (р. 23.IV 1909, г. Токмак, н. КиргССР), ок. Моск. ун-т (1934), асп. там же (1937), д-р физ.-мат. н. (1943), проф. (1944), акад. АН УзССР (1947), лауреат Гос. премии (1949), засл. д. н. и т. УзССР (1959), засл. д. н. и т. РСФСР (1965), с 1937 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных).
- РАШЕВСКИЙ Петр Константинович** (р. 27.VII 1907, Москва), ок. Моск. ун-т (1928), асп. там же (1931), канд. физ.-мат. н. (1933), проф. (1934), д-р физ.-мат. н. (1938), в 1930—1934 работал в Моск. энергетич. ин-те, 1931—1941 — в Моск. гор. пед. ин-те, 1942—1949 — в Моск. ин-те инж. ж.-д. трансп., с 1938 работает в Моск. ун-те (геометрия, алгебра, дифференциальные уравнения в частных производных).
- РВАЧЕВ Владимир Логвинович** (р. 21.X 1926, г. Чигирин, н. Черкасск. обл.), ок. Львов. ун-т (1952), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1961), в 1955—1963 работал в Бердянск. пед. ин-те, с 1963 работает в Харьк. ин-те радиоэлектрон. (вычислительная математика, программирование, теория упругости).
- РЕМЕЗ Евгений Яковлевич** (р. 17.II 1896, г. Мстиславль, н. Могилев. обл.), ок. Киев. ИНО (1924), асп. АН УССР (1929), д-р физ.-мат. н. (1936), проф. (1938), чл.-корр. АН УССР (1939), в 1928—1955 работал в Киев. пед. ин-те, 1928—1935 — также в Киев. горн.-геол. ин-те, с 1934 работает в Ин-те мат. АН УССР (теория функций, приближенные и численные методы, дифференциальные уравнения, алгебра, история математики).
- РЕШЕТНЯК Юрий Григорьевич** (р. 26.IX 1929, Ленинград), ок. Ленингр. ун-т (1951), асп. там же (1954), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1962), в 1954—1957 работал в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, с 1957 работает в Ин-те мат. СО АН СССР (геометрия, алгебра, теория функций, вариационное исчисление).
- РОГОЖИН Владимир Сергеевич** (р. 5.VIII 1921, г. Каменский, н. Ростов. обл.), ок. Ростов. ун-т (1945), асп. там же (1948), канд. физ.-мат. н. (1949), д-р физ.-мат. н. (1968), проф. (1968), в 1949—1963 работал в Казан. ун-те, с 1963 работает в Ростов. ун-те (теория функций комплексного переменного, интегральные уравнения).
- РОДИН Юрий Леонидович** (р. 6.VIII 1936, Одесса), ок. Перм. ун-т (1958), асп. там же (1961), д-р физ.-мат. н. (1967), работал в Перм. политехн. ин-те, ныне работает в Одесск. ин-те инж. мор. фл. (теория функций комплексного переменного).
- РОДОССКИЙ Кирилл Андреевич** (р. 25.II 1913, Петербург), ок. Саратов. ун-т (1940), д-р физ.-мат. н. (1954), проф. (1955), в 1948—1957 работал в Саратов. ун-те, с 1958 работает в Воронеж. ун-те (теория чисел).
- РОЖАНСКАЯ Юлия Антоновна** (24.V 1901, Москва — 23.IV 1967), чл. Моск. мат. о-ва, работала в Ин-те мат. и мех. при физ.-мат. ф-те 1-го Моск. ун-та (математическая логика, геометрия, топология).
- РОЖДЕСТВЕНСКИЙ Борис Леонидович** (р. 28.IX 1928, с. Кратово Моск. обл.), ок. Моск. ун-т (1950), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1963), с 1953 работает в Мат. ин-те АН СССР (дифференциальные уравнения, математическая физика, газовая динамика).
- РОЗАНОВ Юрий Анатольевич** (р. 7.XII 1934, Москва), ок. Моск. ун-т (1957), асп. Мат. ин-та АН СССР (1959), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1965), лауреат Ленинск. премии (1970), с 1957 работает в Мат. ин-те АН СССР (теория вероятностей).
- РОЗЕНВАССЕР Ефим Натанович** (р. 28.VII 1932, Ленинград), ок. Ленингр. кораблестроит. ин-т (1956), Ленингр. ун-т (1959), асп. Ленингр. кораблестроит. ин-та (1961), канд. техн. н. (1961), д-р техн. н. (1964), проф. (1968), с 1958 работает в Ленингр. кораблестроит. ин-те (дифференциальные уравнения, теория колебаний).

- РОЗЕНФЕЛЬД Борис Абрамович** (р. 30.VIII 1917, Петроград), ок. Моск. ун-т (1939), асп. там же (1942), канд. физ.-мат. н. (1942), д-р физ.-мат. н. (1948), проф. (1951), в 1942—1943 работал в Харьк. гидрометеоролог. ин-те, 1943—1947 — в Моск. высш. техн. уч-ще, 1950—1955 — в Азерб. ун-те, 1955—1964 — в Коломен. пед. ин-те, с 1964 работает в Ин-те ист. естествозн. и техн. АН СССР (геометрия, история математики).
- РОЗОВСКИЙ Моисей Исаакович** (р. 12.X 1906, г. Синельниково, н. Днепропетр. обл.), ок. Днепропетр. ИНО (1929), асп. Ленингр. ун-та (1932), канд. физ.-мат. н. (1940), д-р физ.-мат. н. (1959), проф. (1959), в 1932—1934 работал в Горьк. с.-х. ин-те, 1934—1941 — в Витебск. пед. ин-те, с 1945 работает в Днепропетр. горн. ин-те (дифференциальные уравнения в частных производных, прикладная математика).
- РОЙТЕНБЕРГ Яков Наумович** (р. 28.V 1910, г. Троянов, н. Житомир. обл.), ок. Моск. высш. техн. уч-ще (1938), канд. физ.-мат. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1947), проф. (1948), с 1938 работает в Моск. ун-те (программирование, прикладная математика).
- РОМАНОВ Николай Павлович** (р. 19.II 1907, с. Больше-Окинский, н. Иркутск. обл.), ок. Иркутск. ун-т (1929), асп. Моск. ун-та (1932), д-р физ.-мат. н. (1936), проф. (1937), засл. д. н. УзССР (1949), в 1935—1944 работал в Томск. ун-те, 1944—1951 — в Узбек. ун-те, с 1951 работает в Ташкент. ун-те и Ин-те мат. АН УзССР (теория чисел, теория функций комплексного переменного).
- РОМАНОВСКИЙ Владимир Борисович** (25.II 1896, г. Орша, н. Витебск. обл. — 13.I 1959), ок. Ленингр. электротехн. ин-т (1928), проф. (1937), д-р техн. н. (1940), с 1932 работал в Ленингр. электротехн. ин-те связи (теория функций действительного переменного).
- РОМАНОВСКИЙ Всеволод Иванович** (4.XII 1879, г. Верный, н. Алма-Ата — 6.X 1954), ок. Ленингр. ун-т (1906), магистр чист. мат. (1912), д-р физ.-мат. н. (1935), проф., акад. АН УзССР (1943), лауреат Гос. премии (1948), засл. д. н. УзССР, в 1911—1918 работал в Ростов. ун-те, с 1918 — в Средаз. ун-те и Ин-те мат. и мех. АН УзССР (теория вероятностей и математическая статистика, алгебра).
- РОМАНОВСКИЙ Павел Игнатьевич** (р. 18.XII 1900, Москва), ок. Моск. ун-т (1922), д-р физ.-мат. н. (1940), проф. (1940), в 1943—1960 работал в Моск. обл. пед. ин-те, с 1931 работает в Моск. авиац. ин-те (теория функций действительного переменного, функциональный анализ).
- РОССИНСКИЙ Сергей Дмитриевич** (17.VII 1897, Тифлис — 25.V 1965), ок. Моск. ун-т (1920), асп. там же (1926), д-р физ.-мат. н. (1943), проф. (1944), чл. Итал. мат. о-ва (1935), в 1920—1932 работал в Моск. высш. техн. уч-ще, с 1930 — в Моск. ун-те (геометрия, история математики).
- РОСТОВЦЕВ Николай Андреевич** (р. 27.XII 1911, Омск), ок. Казан. ун-т (1934), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1965), проф. (1965), в 1954—1965 работал в Комсомольском-на-Амуре пед. ин-те, с 1965 работает в Новосиб. пед. ин-те (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных).
- РОХЛИН Владимир Абрамович** (р. 23.VIII 1919, Баку), ок. Моск. ун-т (1940), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1954), в 1947—1952 работал в Мат. ин-те АН СССР, 1952—1955 — в Арханг. лесотехн. ин-те, 1955—1957 — в Иванов. пед. ин-те, 1957—1959 — в Коломен. пед. ин-те, 1960—1967 — в Моск. ун-те, с 1967 работает в Ленингр. ун-те (топология, дифференциальные уравнения, функциональный анализ).
- РУБАНИК Василий Павлович** (р. 1.I 1917, с. Клишки, н. Сумск. обл.), ок. Киев. пед. ин-т (1948), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1953 работает в Черновицк. ун-те (дифференциальные уравнения).
- РУБИНШТЕЙН Геннадий Шлемович** (р. 26.IV 1923, Одесса), ок. Ленингр. ун-т (1949), канд. физ.-мат. н. (1956), д-р физ.-мат. н. (1966), в 1955—1961 работал в вузах Ленинграда, с 1962 работает в Ин-те мат. СО АН СССР (алгебра, приближенные и численные методы, программирование).
- РУБИНШТЕЙН Лев Исаакович** (р. 17.X 1914, г. Бердичев, н. Житомир. обл.), ок. Моск. ун-т (1937), канд. физ.-мат. н. (1946), д-р физ.-мат. н. (1959), проф. (1960), в 1937—1940 работал в Ин-те теор. геофиз. АН СССР, 1947, 1948 —

- в Вологод. пед. ин-те, 1948—1952 и 1955—1959—в Уфимск. нефт. НИИ, 1952—1955 — во Всесоюзн. научн.-исслед. нефт. ин-те, 1959—1961 — в Башк. ун-те, с 1961 работает в Латв. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, прикладная математика).
- РУДНЕВ** Георгий Викторович (р. 11.IV 1912, г. Курск), ок. Моск. ун-т (1934), асп. там же (1937), канд. физ.-мат. н. (1937), ок. докт. Мат. ин-та АН СССР (1950), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1953), с 1938 работает в Моск. ин-те инж. ж.-д. трансп. (дифференциальные уравнения, газовая динамика).
- РУКАВИЦЫН** Иннокентий Николаевич (4.V 1892, Иркутск — 16.VIII 1958), ок. Казан. ун-т (1915), канд. физ.-мат. н., проф. (1941), в 1919—1957 работал в Иркутск. ун-те, с 1931 — в Иркутск. пед. ин-те (геометрия).
- РУМЕР** Юрий Борисович (р. 28. IV 1901, Москва), ок. Моск. ун-т (1924), д-р физ.-мат. н. (1935), проф. (1935), в 1933—1937 работал в Моск. ун-те, с 1957 работает в Ин-те радиофиз. и электрон. и Ин-те ядерной физ. СО АН СССР (тензорный анализ, прикладная математика, оптика, теоретическая физика).
- РУМЯНЦЕВ** Валентин Витальевич (р. 19.VII 1921, с. Ново-Скатовка, н. Саратов. обл.), ок. Саратов. ун-т (1945), асп. при Ин-те мех. АН СССР (1948), канд. физ.-мат. н. (1948), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1956), с 1945 работает в Ин-те проблем мех. АН СССР и ВЦ АН СССР (дифференциальные и интегральные уравнения, прикладная математика, история математики).
- РУСЬЯН** Цезарь Карлович (1867, с. Макеево, н. Херсон. обл.— 30.III 1934), ок. Новорос. ун-т (1889), магистр чист. мат. (1896), д-р чист. мат. (1900), проф. (1906), в 1906—1934 работал в Харьк. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных).
- РУТИЦКИЙ** Яков Брониславович (р. 3.VI 1922, Киев), ок. Киев. ун-т (1949), асп. там же (1952), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), в 1952—1956 работал в Жданов. металлург. ин-те, с 1956 работает в Воронеж. инж.-строит. ин-те (функциональный анализ, теория функций действительного переменного, интегральные уравнения).
- РУТМАН** Моисей Аронович (р. 21.V 1917, Одесса), ок. Одесск. ун-т (1934), асп. там же (1939), канд. физ.-мат. н. (1939), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1962), в 1937—1941, 1948—1951 и 1964 работал в Одесск. ун-те, 1944—1949 — в Одесск. ин-те инж. мор. фл., с 1949 работает в Одесск. гидрометеоролог. ин-те, с 1966 — также в Одесск. электротехн. ин-те связи (функциональный анализ, дифференциальные уравнения в частных производных).
- РУХАДЗЕ** Амвросий Калистратович (р. 30.IV 1906, г. Самтредиа, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1928), асп. АН СССР (1933), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р физ.-мат. н. (1948), проф. (1948), в 1933—1946 работал в Тбил. ун-те, с 1933 (и в 1928—1931) работает в Груз. политехн. ин-те, с 1956 — также в Тбил. НИИ приборостр. и средств автоматизации (дифференциальные уравнения в частных производных, прикладная математика, механика, теория упругости).
- РЫБНИКОВ** Константин Алексеевич (р. 18.VIII 1913, стан. Луганская, н. Ворошиловград. обл.), ок. Моск. ун-т (1936), асп. там же (1941), д-р физ.-мат. н. (1955), проф. (1956), с 1945 (и в 1936—1941) работает в Моск. ун-те (математическая логика, история математики).
- РЫЖКОВ** Валерий Витальевич (р. 19.II 1920, Харьков), ок. Моск. ун-т (1941), канд. физ.-мат. н. (1943), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1962), в 1950—1959 работал в Моск. инж.-физ. ин-те, 1959—1961 — в Моск. инж.-строит. ин-те, с 1961 работает в Ун-те дружбы народов им. П. Лумумбы (геометрия).
- РЫМАРЕНКО** Борис Александрович (24.II 1906, г. Екатеринослав, н. Днепропетровск — 9.V 1966), ок. Харьк. ун-т (1926), асп. там же (1930), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1953), в 1926—1928 работал в Харьк. ун-те, 1928—1931 — в Харьк. технол. ин-те, 1931—1944 — в Харьк. трансп. ин-те, 1944—1946 — в Ленингр. ин-те инж. ж.-д. трансп., 1946—1948 — в Ленингр. электротехн. ин-те инж. ж.-д. трансп., с 1945 — в вузах Ленинграда (теория функций действительного переменного).
- РЯБОВ** Юрий Александрович (р. 15.VI 1923, Харьков), ок. Моск. ун-т (1950), асп. там же (1953), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), в 1953—1955 работал в Астрон. ин-те им. П. К. Штернберга, 1955—1960 — во Всесоюзн. заочн. энергетич. ин-те, 1960—1964 — в Моск. ун-те, с 1964 ра-

- ботает в Ун-те дружбы народов им. П. Лумумбы (дифференциальные уравнения, небесная механика).
- РЯГО Герхард Августович** (р. 5.XII 1892, Выруск. р-н, н. ЭССР), ок. Тартуск. ун-т (1913), канд. физ.-мат. н. (1913), проф. (1920), в 1915—1920 работал в Донск. политехн. ин-те, с 1920 работает в Тартуск. ун-те (история и методика математики).
- САВИН Гурий Николаевич** (р. 1.II 1907, г. Вельегонск, н. Калинин. обл.), ок. Днепропетр. ун-т (1932), канд. физ.-мат. н. (1935), д-р физ.-мат. н. (1941), проф. (1941), акад. АН УССР (1948), лауреат Гос. премии (1952), засл. д. н. и т. АН УССР (1966), в 1948—1951 работал во Львов. ун-те, с 1951 работает в АН УССР, с 1961 — в Ин-те мех. АН УССР (математические методы в механике, теория упругости).
- САВИЧ Сергей Евгеньевич** (1864—1936), ок. Петерб. ун-т (1886), магистр чист. мат. (1892), проф., работал в Петерб. электротехн. ин-те и на Петерб. высш. женск. курсах (теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения).
- САГОМОНЯН Артур Яковлевич** (р. 23.III 1914, г. Андижан), ок. Моск. ун-т (1939), асп. там же (1947), д-р физ.-мат. н. (1954), проф. (1956), с 1947 работает в Моск. ун-те (прикладная математика, математические методы в газовой динамике, механика сплошных сред).
- САДОВСКИЙ Леонид Ефимович** (р. 14.VIII 1916, г. Симферополь), ок. Моск. ун-т (1938), асп. там же (1941), канд. физ.-мат. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1965), проф. (1966), с 1949 работает в Моск. ин-те инж. ж.-д. трансп. (алгебра, история математики и техники).
- САЗОНОВ Вячеслав Васильевич** (р. 25.VIII 1935, Москва), ок. Моск. ун-т (1958), асп. Мат. ин-та АН СССР (1961), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р физ.-мат. н. (1968), с 1961 работает в Мат. ин-те АН СССР (теория вероятностей).
- САЙКИН Семен Федорович** (р. 14.IX 1914, д. Чепкас-Ильметево, н. ЧАССР), ок. Казан. ун-т (1937), асп. там же (1940), канд. физ.-мат. н. (1948), д-р техн. н. (1966), с 1951 работает в Казан. ун-те (прикладная математика, теория фильтрации).
- САЛАХИТДИНОВ Махмуд Салахитдинович** (р. 23.XI 1933, г. Наманган, Андижан. обл.), ок. Средаз. ун-т (1955), асп. там же (1958), канд. физ.-мат. н. (1958), д-р физ.-мат. н. (1968), проф., чл.-корр. АН УзССР (1968), с 1959 работает в Ин-те мат. АН УзССР (с 1967 — директор) (дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные и численные методы).
- САЛЕХОВ Гарун Самигуллович** (р. 15.VIII 1913, Казань), ок. Казан. ун-т (1935), канд. физ.-мат. н. (1939), д-р физ.-мат. н. (1948), проф. (1948), засл. д. н. и т. ТАССР (1957), в 1938—1957 работал в Казан. пед. ин-те, с 1946 работает в Казан. физ.-техн. ин-те АН СССР (дифференциальные уравнения, приближенные и численные методы, прикладная математика).
- САМАРСКИЙ Александр Андреевич** (р. 19.II 1919, г. Амвросиевка, н. Донецк. обл.), ок. Моск. ун-т (1945), асп. там же (1948), д-р физ.-мат. н. (1957), проф. (1959), чл.-корр. АН СССР (1966), лауреат Ленинск. и Гос. премий, с 1948 работает в Моск. ун-те и Ин-те прикл. мат. АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные и численные методы).
- САМОЙЛЕНКО Анатолий Михайлович** (р. 2. I 1938, с. Потиевка Житомир. обл.), ок. Киев. ун-т (1960), асп. Ин-та мат. АН УССР (1963), канд. физ.-мат. н. (1963), д-р физ.-мат. н. (1968), лауреат республ. комсомольск. премии им. Н. Островского (1968), с 1963 работает в Ин-те мат. АН УССР, с 1965 — также в Киев. ун-те (дифференциальные уравнения).
- САМОЙЛОВА-ЯХОНТОВА Наталия Сергеевна** (р. 2.VIII 1896, Харьков), ок. Харьк. ун-т, проф., работала в Ин-те теор. астроном. АН СССР (теория функций действительного переменного, астрономия).
- САПОГОВ Николай Александрович** (р. 27.VIII 1915, г. Кимры, н. Калинин. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1939), асп. там же (1940), канд. физ.-мат. н. (1946), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1952), в 1947—1952 работал в Ленингр. ун-те, с 1952 работает в Ленингр. ин-те инж. ж.-д. трансп. (теория вероятностей, теория функций).

- САПОНДЖЯН Оксен Мурадович (р. 23.III 1908, г. Эрдыш, Турция), ок. Ереван. политехн. ин-т (1932), асп. Моск. инж.-строит. ин-та (1939), канд. техн. н. (1939), д-р техн. н. (1950), проф. (1950), чл.-корр. АН АрмССР (1960), засл. д. н. АрмССР (1961), с 1939 (и в 1931—1936) работает в Ереван. политехн. ин-те (приближенные и численные методы в теории упругости).
- САРВ Яан Хеннович (21. XII 1877, Выруск. р-н, н. ЭССР — 23.VIII 1954), ок. Юрьев. ун-т (1908), проф. (1919), д-р филос. (1931), д-р физ.-мат. н. (1946), в 1919—1951 работал в Тартуск. ун-те (основания геометрии).
- САРМАНОВ Олег Васильевич (р. 28.I 1916, г. Самара, н. Куйбышев), ок. Ленингр. ун-т (1938), асп. там же (1941), канд. физ.-мат. н. (1941), ок. докт. Мат. ин-та АН СССР (1948), д-р физ.-мат. н. (1948), проф. (1950), с 1955 работает в Мат. ин-те АН СССР (теория вероятностей и математическая статистика и их приложения).
- САРЫМСАКОВ Ташмухамед Алиевич (р. 10.IX 1915, с. Шарихан, н. Андижан. обл.), ок. Средаз. ун-т (1936), д-р физ.-мат. н. (1942), проф. (1942), акад. АН УзССР (1943), лауреат Гос. премии (1948), засл. д. н. и т. УзССР (1960), работает в АН УзССР (1946—1952 — президент), с 1936 — также в Ташкент. ун-те (1943—1945 и 1952—1958 — ректор), с 1959 — министр высш. и средн. спец. образования УзССР (теория вероятностей и математическая статистика, функциональный анализ).
- САУЛЬЕВ Владислав Климентьевич (р. 22.III 1924, Томск), ок. Латв. ун-т (1950), асп. Ин-та точ. мех. и вычисл. техн. АН СССР (1954), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1967), с 1954 работает в Моск. авиац. ин-те (дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные и численные методы, прикладная математика).
- САХНОВИЧ Лев Аронович (р. 23.II 1932, г. Луганск), ок. Одесск. пед. ин-т (1953), асп. там же, канд. физ.-мат. н. (1958), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1962), в 1957—1963 работал в Одесск. ин-те пищ. и холодильн. пром., с 1963 работает в Одесск. электротехн. ин-те связи (функциональный анализ).
- САЧЕНКОВ Александр Васильевич (р. 11.IX 1928, с. Б/Монадыши, н. МАССР), ок. Казан. ун-т (1951), асп. Казан. фил. АН СССР (1954), д-р физ.-мат. н. (1966), в 1954—1956 работал в Казан. фил. АН СССР, с 1956 работает в Казан. ун-те (прикладная математика).
- СВЕШНИКОВ Алексей Георгиевич (р. 19.XI 1924, Саратов), ок. Моск. ун-т (1950), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1965), с 1953 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, история математики).
- СВЕШНИКОВ Арам Арутюнович (р. 18.XI 1911, Петербург), ок. Ленингр. ун-т (1935), асп. там же (1938), канд. техн. н. (1944), д-р техн. н. (1951), проф. (1953), засл. д. н. и т. РСФСР (1964), с 1938 работает в вузах Ленинграда (теория вероятностей, прикладная математика).
- СВИРСКИЙ Иосиф Вениаминович (р. 21.II 1917, Петроград), ок. Белорус. ун-т (1938), асп. Куйбышев. пед. ин-та (1944), канд. физ.-мат. н. (1949), д-р физ.-мат. н. (1964), в 1944—1945 работал в Куйбышев. авиац. и Куйбышев. индустр. ин-тах, с 1946 работает в Казан. физ.-техн. ин-те АН СССР (приближенные и численные методы, прикладная математика, теория упругости).
- СЕГАЛ Бенцион Израилевич (р. 17. XII 1901, г. Остров, н. Псков. обл.), ок. Воронеж. ун-т (1924), асп. АН СССР (1932), д-р физ.-мат. н. (1935), проф. (1938), в 1932—1948 работал в Мат. ин-те АН СССР, с 1935 работает в Моск. станкоинструм. ин-те (теория чисел, дифференциальные уравнения в частных производных, теория вероятностей, приближенные и численные методы).
- СЕДОВ Леонид Иванович (р. 14. XI 1907, Ростов-на-Дону), ок. Моск. ун-т (1931), д-р физ.-мат. н. (1937), проф. (1937), чл.-корр. АН СССР (1946), акад. АН СССР (1953), лауреат Гос. премии (1952), Герой Соц. Труда (1967), почетн. чл. Амер. акад. искусств и наук (1960), Сербск. АН (1965), Финск. техн. акад. (1966), Амер. ин-та астронавт. и аэронавт. (1966), чл. Междунар. астронавт. акад. (1959), иностр. чл. Леопольдина (ГДР) (1969), чл. Нац. геогр. о-ва (США) (1967), корр. Франц. АН (1967), почетн. д-р Варшав. (1963) и Праж. (1964) политехн. ин-тов, почетн. д-р Свободного ун-та в Брюсселе (1969), д-р Ун-та в Пуатье (1966), в 1931—1947 работал в ЦАГИ, 1947—1956 — в Центр. ин-те

- авиамоторостр., с 1937 работает в Моск. ун-те (прикладная математика, гидроаэромеханика, газовая динамика).
- СЕЛИВАНОВ Дмитрий Федорович** (1855, г. Городище, н. Пенз. обл. — 1932), ок. Петерб. ун-т (1878), магистр чист. мат. (1885), проф. (1905), с 1885 работал в Ленингр. ун-те (приближенные и численные методы).
- СЕМЕНДЯЕВ Константин Адольфович** (р. 9. XII 1908, г. Симферополь), ок. Моск. ун-т (1929), канд. физ.-мат. н. (1940), д-р физ.-мат. н. (1957), проф. (1959), в 1936—1964 работал в Мат. ин-те АН СССР, с 1964 работает в Гидрометцентре АН СССР (приближенные и численные методы, программирование).
- СИГАЛОВ Александр Григорьевич** (20. VII 1913, г. Белая Церковь, н. Киев. обл. — 5. IX 1969), ок. Уральск. ун-т (1937), асп. Моск. ун-та (1945), канд. физ.-мат. н. (1946), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1952), с 1946 работает в Горьк. ун-те (вариационное исчисление, математические проблемы квантовой механики).
- СИКОРСКИЙ Юрий Станиславович** (28. V 1879, Варшава — 1954), ок. Петерб. ун-т (1909), проф. (1925), с 1925 работал в Одесск. электротехн. ин-те связи и Одесск. политехн. ин-те (математические методы в механике, прикладная математика).
- СИМОНЕНКО Игорь Борисович** (р. 16. VIII 1935, Киев), ок. Ростов. ун-т (1958), асп. там же (1960), канд. физ.-мат. н. (1961), д-р физ.-мат. н. (1968), с 1960 работает в Ростов. ун-те (функциональный анализ, интегральные уравнения).
- СИМОНОВ Николай Иванович** (р. 14. II 1910, Москва), ок. Калинин. пед. ин-т (1931), асп. Моск. ун-та (1935), канд. физ.-мат. н. (1936), д-р физ.-мат. н. (1956), проф. (1959), в 1935—1945 работал в Саратов. ун-те, 1946—1958 — в Черно-вицк. ун-те, 1958—1965 — в Киев. ин-те инж. гражд. авиац., с 1965 работает в Моск. технол. ин-те (дифференциальные уравнения, история математики).
- СИНАЙ Яков Григорьевич** (р. 21. IX 1935, Москва), ок. Моск. ун-т (1957), канд. физ.-мат. н. (1960), д-р физ.-мат. н. (1964), с 1960 работает в Моск. ун-те (теория вероятностей, статистическая физика).
- СИНЦОВ Дмитрий Матвеевич** (20. XI 1867, г. Вятка — 28. I 1946), ок. Казан. ун-т (1890), магистр чист. мат. (1895), д-р чист. мат. (1898), проф. (1899), акад. АН УССР (1939), засл. д. н. УССР (1935), в 1894—1899 работал в Казан. ун-те, 1899—1903 — в Екатеринбург. высш. горн. уч-ще, с 1903 — в Харьк. ун-те (геометрия, дифференциальные уравнения, педагогика, методика и история математики).
- СИРАЖДИНОВ Сагды Хасанович** (р. 10. V 1921, г. Коканд, н. Ферган. обл.), ок. Средаз. ун-т (1942), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1956), чл.-корр. АН УзССР (1956), акад. АН УзССР (1966), в 1954—1956 работал в Моск. ун-те, с 1956 работает в Ташкент. ун-те, с 1957 — также в Ин-те мат. АН УзССР (теория функций действительного переменного, теория вероятностей и математическая статистика).
- СИРАЗЕТДИНОВ Талгат Касимович** (р. 13. XI 1927, д. Сауш ТАССР), ок. Казан. авиац. ин-т (1950), канд. техн. н. (1953), д-р техн. н. (1967), с 1952 работает в Казан. авиац. ин-те (дифференциальные уравнения в частных производных, вариационное исчисление, прикладная математика).
- СИТНИКОВ Кирилл Александрович** (р. 14. II 1926, Нижний Новгород), ок. Моск. ун-т (1949), асп. там же (1952), д-р физ.-мат. н. (1955), с 1952 работает в Мат. ин-те АН СССР (топология).
- СКЛЯРЕНКО Евгений Григорьевич** (р. 3. VIII 1935, с. Ольховатка Воронеж. обл.), ок. Моск. ун-т (1958), асп. там же (1960), канд. физ.-мат. н. (1961), д-р физ.-мат. н. (1964), с 1960 работает в Моск. ун-те (топология).
- СКОБЕЛКИН Владимир Иванович** (р. 4. V 1913, Петербург), ок. Ленингр. ун-т (1941), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1962), в 1942—1946 работал в ЦАГИ, 1946—1952 — в Центр. ин-те авиамоторостр., 1952—1960 — в Моск. ун-те, 1956—1962 — также в Ин-те хим. физ. АН СССР, с 1962 работает в Моск. ин-те электрон. техн. (прикладная математика, теоретическая и математическая физика).
- СКОПЕЦ Залман Алтерович** (р. 1. I 1917, г. Краслав, н. ЛатвССР), ок. Латв. ун-т (1938), канд. физ.-мат. н. (1946), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1963), с 1942 работает в Ярослав. пед. ин-те (геометрия).

- СКОРНЯКОВ Лев Анатольевич (р. 14.II 1924, Москва), ок. Моск. ун-т (1947), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1958), проф. (1960), в 1950—1952 работал в Карело-Финск. ун-те, 1952—1954 — в Моск. высш. техн. уч-ще, с 1954 работает в Моск. ун-те (алгебра, электронные вычислительные машины).
- СКОРОБОГАТКО Виталий Яковлевич (р. 18.VII 1927, Киев), ок. Львов. ун-т (1951), асп. там же (1954), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1967), в 1953—1961 работал во Львов. ун-те, 1961—1965 — во Львов. отд. Ин-та мат. АН УССР, с 1965 работает в Физ.-мех. ин-те АН УССР (дифференциальные уравнения, геометрия).
- СКОРОХОД Анатолий Владимирович (р. 10.IX 1930, г. Никополь, н. Днепропетр. обл.), ок. Киев. ун-т (1953), канд. физ.-мат. н. (1957), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1964), чл.-корр. АН УССР (1967), с 1956 работает в Киев. ун-те и Ин-те мат. АН УССР (теория вероятностей и математическая статистика, математический анализ).
- СЛЕЗКИН Николай Алексеевич (р. 22.XI 1905, с. Ново-Никольское, н. Тульск. обл.), ок. Моск. ун-т (1930), асп. там же (1933), канд. физ.-мат. н. (1935), д-р физ.-мат. н. (1938), проф. (1938), засл. д. н. и т. РСФСР (1966), в 1931—1934 работал в Моск. авиац. ин-те, с 1933 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, прикладная математика, гидроаэромеханика).
- СЛОВОДЕЦКИЙ Лев Наумович (р. 24.XII 1914, г. Радомышль, н. Житомир. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1939), асп. там же (1947), канд. физ.-мат. н. (1947), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1962), в 1947—1960 работал в Ленингр. пед. ин-те, с 1960 работает в Ленингр. ин-те водн. трансп. (теория функций, уравнения в частных производных).
- СЛОБОДЯНСКИЙ Михаил Григорьевич (р. 5.I 1912, с. Махновка, н. с. Комсомольское Винницк. обл.), ок. Моск. ун-т (1936), асп. там же (1939), д-р физ.-мат. н. (1940), проф. (1946), с 1940 работает в Моск. энергетич. ин-те (дифференциальные уравнения в частных производных, численные и приближенные методы).
- СЛУГИНОВ Серапион Петрович (р. 2.VI 1879, Нижний Новгород), работал в Перм. ун-те (геометрия, теория функций действительного переменного, история математики).
- СЛУЦКИЙ Евгений Евгеньевич (19.IV 1880, с. Новое, н. Ярослав. обл. — 10.III 1948), ок. Киев. ун-т (1911), д-р физ.-мат. н., проф. (1935), в 1913—1926 работал в Киев. ин-те нар. х-ва, с 1926 — в научн.-исслед. и учебн. заведениях Москвы (теория вероятностей и математическая статистика, численные и приближенные методы).
- СМИРНОВ Владимир Иванович (р. 10.VI 1887, Петербург), ок. Петерб. ун-т (1910), магистр чист. мат. (1918), проф. (1926), чл.-корр. АН СССР (1932), д-р физ.-мат. н. (1936), акад. АН СССР (1943), почетн. чл. Моск. мат. о-ва, почетн. президент Ленингр. мат. о-ва (1968), иностр. чл. Сербск. АН (1965), лауреат Гос. премии (1947), Герой Соц. Труда (1967), в 1912—1930 работал в Ин-те инж. путей сообщ., с 1915 работает в Ленингр. ун-те (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, математический анализ, вариационное исчисление, математическая физика, функциональный анализ, прикладная математика, история математики).
- СМИРНОВ Дмитрий Матвеевич (р. 27.X 1919, д. Шилово, н. Иванов. обл.), ок. Иванов. пед. ин-т (1941), асп. там же (1951), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1966), в 1946—1962 работал в Иванов. пед. ин-те, с 1962 работает в Новосиб. ун-те, с 1965 — также в Ин-те мат. СО АН СССР (алгебра).
- СМИРНОВ Николай Васильевич (17.X 1900 — 2.VI 1966), ок. Моск. ун-т (1926), д-р физ.-мат. н., проф. (1939), чл.-корр. АН СССР (1960), лауреат Гос. премии (1951), в 1931—1938 работал в Моск. ун-те, с 1938 — в Мат. ин-те АН СССР (теория вероятностей и математическая статистика).
- СМИРНОВ Юрий Михайлович (р. 19.IX 1921, г. Калуга), ок. Моск. ун-т (1948), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1957), проф. (1959), с 1951 работает в Мат. ин-те АН СССР и Моск. ун-те (топология).
- СМОГОРЖЕВСКИЙ Александр Степанович (6.III 1896, с. Берлинцы Лесовые, н. Винницк. обл. — 10.V 1969), ок. Киев. ИНО (1929), проф. (1938), д-р физ.-мат. н.

- (1945), засл. д. н. УССР (1966), с 1930 работал в Киев. политехн. ин-те (геометрия, основания математики, дифференциальные уравнения).
- СМОЛЕНСКИЙ Борис Иванович (28.VI 1891, с. Масленниково, н. Ярослав. обл.— 1954), ок. Казан. ун-т (1917), проф. (1934), канд. физ.-мат. н. (1935), с 1920 работал в Уральск. ун-те и Уральск. политехн. ин-те, с 1930 — также в Уральск. лесотехн. ин-те (алгебра, алгебраическая геометрия).
- СМОЛИЦКИЙ Хаим Львович (р. 6.XI 1912, г. Фергана), ок. Ленингр. ун-т (1936), канд. физ.-мат. н. (1940), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1951), с 1944 работает в вузах Ленинграда (дифференциальные уравнения в частных производных, прикладная математика, механика твердого тела, численные методы анализа).
- СМОЛЯКОВ Петр Трофимович (22.VI 1899, с. Новая Заимка, н. Сев.-Казахстан. обл.— 5. V 1952), ок. Казан. ун-т (1928), д-р физ.-мат. н. (1944), проф. (1944), с 1928 работал в Казан. ун-те (теория функций действительного переменного, алгебра).
- СОБОЛЕВ Владимир Иванович (р. 21.VII 1913), ок. Воронеж. ун-т (1936), канд. физ.-мат. н. (1940), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1963), с 1944 работает в Воронеж. ун-те (вариационное исчисление, функциональный анализ).
- СОБОЛЕВ Сергей Львович (р. 6.X 1908, Петербург), ок. Ленингр. ун-т (1929), проф. (1930), чл.-корр. АН СССР (1933), д-р физ.-мат. н. (1934), акад. АН СССР (1939), лауреат Гос. премии (1941), Герой Соц. Труда, почетн. д-р Ун-та им. Гумбольта в Берлине, почетн. д-р Карлова ун-та, чл. Эдинбург. королевск. о-ва, иностр. чл. Нац. акад. деи Линчеи (Рим), в 1929—1934 работал в Сейсмолог. ин-те АН СССР, 1935—1957 — в Моск. ун-те, 1932—1957 — также в Мат. ин-те АН СССР, с 1958 работает в Ин-те мат. СО АН СССР (директор), с 1961 — также в Новосиб. ун-те (дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, интегральные уравнения, функциональный анализ, приближенные и численные методы, программирование, математический анализ, история математики).
- СОБОЛЕВСКИЙ Павел Евсеевич (р. 26.III 1930, Киев), ок. Киев. ун-т (1952), асп. Воронеж. с.-х. ин-та (1958), канд. физ.-мат. н. (1958), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1965), в 1958—1967 работал в Воронеж. с.-х. ин-те, с 1967 работает в Воронеж. ун-те (функциональный анализ, дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные и численные методы).
- СОКОЛОВ Иван Георгиевич (р. 2.VI 1903, Астрахань), ок. Моск. ун-т (1929), канд. физ.-мат. н. (1938), проф. (1964), с 1945 работает во Львов. ун-те (теория функций действительного переменного).
- СОКОЛОВ Николай Петрович (р. 16.XI 1889, г. Елисаветград, н. Кировоград), ок. Петрогр. ун-т (1915), канд. физ.-мат. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1962), в 1943—1961 работал в Киев. гидромелиорат. ин-те, 1961—1966 — в Киев. технол. ин-те легкой пром. (алгебра).
- СОКОЛОВ Юрий Дмитриевич (р. 26.V 1896, стан. Лабинская, н. г. Лабинск Краснодар. края), ок. Киев. ун-т (1921), д-р физ.-мат. н. (1929), проф. (1930), чл.-корр. АН УССР (1939), с 1921 работает в Ин-те мат. АН УССР (дифференциальные уравнения, прикладная математика, приближенные и численные методы, теория фильтрации, небесная механика).
- СОЛОВЬЕВ Павел Александрович (р. 22.XII 1890, с. Бикшень, н. Харьк. обл.— 1.XI 1945), ок. Харьк. ун-т, в 1925—1941 работал в Харьк. ун-те, 1925 — 1930 — также в Харьк. ИНО, с 1943 — в Харьк. пед. ин-те (геометрия).
- СОЛОДОВНИКОВ Александр Самуилович (р. 16.II 1931, г. Пинск, н. Брест. обл.), ок. Моск. ун-т (1953), асп. Моск. пед. ин-та (1956), канд. физ.-мат. н. (1956), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1965), с 1960 работает в Моск. заочн. пед. ин-те (проективная геометрия).
- СОЛОННИКОВ Всеволод Алексеевич (р. 8.VI 1933, Ленинград), ок. Ленингр. ун-т (1957), канд. физ.-мат. н. (1961), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1957 работает в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных, теория функций).
- СОХОЦКИЙ Юлиан Васильевич (5.II 1842, Варшава — 14.XII 1927), ок. Петерб. ун-т (1866), магистр. чист. мат. (1868), д-р чист. мат. (1873), проф. (1882), с 1868 работал в Ленингр. ун-те (теория функций комплексного переменного, интегральные уравнения, алгебра).

- СПРИНДЖУК Владимир Геннадиевич** (р. 22.VII 1936, Минск), ок. Белорус. ун-т (1959), асп. Вильнюс. ун-та (1962), канд. физ.-мат. н. (1963), д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1966), чл.-корр. АН БССР (1968), с 1964 работает в Ин-те мат. АН БССР, с 1966 — также в Белорус. ун-те (теория чисел, алгебра).
- СРЕТЕНСКИЙ Леонид Николаевич** (р. 27.II 1902, Москва), ок. Моск. ун-т (1923), асп. там же (1929), канд. физ.-мат. н. (1929), проф. (1934), д-р физ.-мат. н. (1936), чл.-корр. АН СССР (1939), в 1931—1941 работал в ЦАГИ, с 1934 работает в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, прикладная математика, гидроаэромеханика).
- СТАНЮКОВИЧ Кирилл Петрович** (р. 3.III 1916, Москва), ок. Моск. ун-т (1939), канд. физ.-мат. н. (1944), д-р техн. н. (1947), проф. (1952), с 1952 работает в Моск. высш. техн. уч-ще (дифференциальные уравнения в частных производных, прикладная математика, механика сплошных сред).
- СТАРЖИНСКИЙ Вячеслав Михайлович** (р. 10.III 1918, с. Лемешевичи, н. Брест. обл.), ок. Моск. ун-т (1941), асп. там же (1948), канд. физ.-мат. н. (1948), д-р физ.-мат. н. (1958), проф. (1959), с 1950 работает во Всесоюз. заочн. ин-те текст. и легк. пром. (дифференциальные уравнения, теория колебаний).
- СТАТУЛЯВИЧУС Витаутас Антонович** (р. 27.XI 1929, д. Бикунай ЛитССР), ок. Вильнюс. ун-т (1954), асп. Ленингр. ун-та (1957), д-р физ.-мат. н. (1967), работает в Ин-те физ. и мат. АН ЛитССР (директор) и Вильнюс. ун-те (теория вероятностей и математическая статистика).
- СТЕКЛОВ Владимир Андреевич** (9.I 1864 — 30.V 1926), ок. Харьк. ун-т (1887), д-р чист. мат. (1902), проф. (1896), чл.-корр. Петерб. АН (1903), акад. Петерб. АН (1912), акад. АН УССР (1925), с 1919 — вице-президент АН СССР, в 1896—1906 работал в Харьк. ун-те, с 1906 — в Ленингр. ун-те (дифференциальные уравнения, математическая физика).
- СТЕПАНОВ Вячеслав Васильевич** (4.IX 1889, Смоленск — 22.VII 1950), ок. Моск. ун-т (1912), д-р физ.-мат. н., проф. (1928), чл.-корр. АН СССР (1946), лауреат Гос. премии (1951), с 1928 работал в Моск. ун-те (дифференциальные уравнения, теория функций действительного переменного, функциональный анализ, история математики).
- СТЕЧКИН Сергей Борисович** (р. 6.IX 1920, Москва), ок. Моск. ун-т (1944), асп. там же (1947), д-р физ.-мат. н. (1958), проф. (1959), чл. Амер. мат. о-ва (1964), с 1949 работает в Мат. ин-те АН СССР (теория функций, функциональный анализ).
- СТРАТОНОВИЧ Руслан Леонтьевич** (р. 31.V 1930, Москва), ок. Моск. ун-т (1953), канд. физ.-мат. н. (1956), д-р физ.-мат. н. (1965), с 1956 работает в Моск. ун-те (теория вероятностей, дифференциальные уравнения в частных производных).
- СТУПОЧЕНКО Евгений Владимирович** (р. 20.II 1902, Петербург), ок. Моск. ун-т (1930), канд. физ.-мат. н. (1939), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1953), в 1930—1937 работал во Всесоюз. теплотехн. ин-те, 1938—1941 — в Моск. гор. пед. ин-те, с 1942 работает в Моск. ун-те (приближенные и численные методы, прикладная математика, гидродинамика).
- СУББОТИН Михаил Федорович** (р. 29.VI 1893, г. Остроленка, н. ПНР), ок. Варшав. ун-т (1914), д-р физ.-мат. н. (1945), проф. (1945), чл.-корр. АН СССР (1946), в 1930, 1934—1942 работал в Ленингр. ун-те, 1931—1934 — в Пулков. обсерватории, с 1942 работает в Ин-те теор. астроном. АН СССР (директор) (приближенные и численные методы, небесная механика, теоретическая астрономия).
- СУБХАНКУЛОВ Мағалим Акрамович** (р. 11.IV 1920, с. Старое-Куручево БашАССР), ок. Бухар. пед. ин-т (1944), Узбек. ун-т (1947), асп. там же (1950), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), с 1954 работает в Тадж. ун-те (теория функций действительного переменного, теория чисел).
- СУВОРОВ Георгий Дмитриевич** (р. 17.V 1919, Саратов), ок. Томск. ун-т (1941), асп. там же (1949), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1963), чл.-корр. АН УССР (1965), в 1949—1964 работал в Томск. ун-те, с 1965 работает в Донецк. ВЦ АН УССР и Донецк. ун-те (теория функций комплексного переменного).
- СУЕТИН Павел Кондратьевич** (р. 11.II 1926, г. Уральск), ок. Уральск. пед. ин-т (1949), асп. Мат. ин-та АН СССР (1953), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-

- мат. н. (1965), в 1953—1961 работал в Уральск. пед. ин-те, с 1961 работает в Свердловск. отд. Мат. ин-та АН СССР (теория функций).
- СУПРУНЕНКО Дмитрий Алексеевич** (р. 8.XI 1915, г. Майкоп, н. Адыгейск. автон. обл.), ок. Ростов. ун-т (1938), асп. там же (1941), канд. физ.-мат. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1955), проф. (1956), чл.-корр. АН БССР (1959), акад. АН БССР (1966), в 1945—1963 работал в Белорус. ун-те, с 1963 работает в Ин-те мат. АН БССР (алгебра).
- СУХОМЛИНОВ Георгий Акимович** (р. 7.VI 1906), ок. Моск. ун-т (1934), асп. там же (1937), канд. физ.-мат. н. (1937), проф. (1966), засл. учит. КиргССР (1946), в 1951—1954 работал в Киргиз. ун-те, с 1954 работает во Фрунз. политехн. ин-те (директор) (теория функций действительного переменного).
- СУШКЕВИЧ Антон Казимирович** (22.I 1889, г. Борисоглебск, н. Воронеж. обл.— 30.VIII 1961), ок. Петерб. ун-т (1913), д-р физ.-мат. н. (1926), проф. (1935), в 1918—1921 и с 1933 работал в Харьк. ун-те, 1921—1929 — в Воронеж. ун-те (алгебра, методика и история математики).
- ТАЙМАНОВ Асан Дабсович** (р. 25.X 1917, Урдин. р-н, н. Уральск. обл.), ок. Уральск. пед. ин-т (1936), асп. Моск. пед. ин-та (1947), канд. физ.-мат. н. (1947), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1961), акад. АН КазССР (1962), работает в Ин-те мат. СО АН СССР и Новосиб. ун-те (математическая логика, топология, теория функций комплексного переменного).
- ТАЛАЛЯН Александр Андраникович** (р. 22.IX 1928, с. Гетк АрмССР), ок. Ереван. ун-т (1951), асп. Мат. ин-та АН СССР (1956), канд. физ.-мат. н. (1956), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1963), чл.-корр. АН АрмССР (1965), с 1956 работает в Ереван. ун-те и Ин-те мат. и мех. АН АрмССР (теория функций действительного переменного).
- ТАЛДЫКИН Александр Тихонович** (р. 8.VIII 1910, с. Рамонь, н. Воронеж. обл.), ок. Воронеж. ун-т (1931), асп. Ленингр. ун-та (1935), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р физ.-мат. н. (1955), проф. (1955), с 1938 работает в вузах Ленинграда (функциональный анализ, математический анализ, теория вероятностей).
- ТАМРАЗОВ Промарз Меликович** (р. 17. VI 1933, Киев), ок. Киев. политехн. ин-т (1956), асп. там же (1961), канд. физ.-мат. н. (1963), д-р физ.-мат. н. (1966), в 1961, 1962 работал в Киев. политехн. ин-те, 1962, 1963 — в Ин-те теплоэнергет. АН УССР, с 1963 работает в Ин-те мат. АН УССР (теория функций комплексного переменного).
- ТАРТАКОВСКИЙ Владимир Абрамович** (р. 13.I 1901, Киев), ок. Киев. ун-т (1922), асп. Ленингр. ун-та (1928), д-р физ.-мат. н. (1935), проф. (1936), в 1930—1952 работал в Ленингр. ун-те, с 1944 работает в Ленингр. ин-те точ. мех. и оптики (математическая логика, алгебра, дифференциальные уравнения, геометрия).
- ТАТЕВСКИЙ Владимир Михайлович** (р. 5.XI 1914, Тула), ок. Моск. ун-т (1939), д-р хим. н. (1952), проф. (1953) (приближенные и численные методы).
- ТЕЛЯКОВСКИЙ Сергей Александрович** (р. 22.XII 1932, Саратов), ок. Саратов. ун-т (1955), асп. Мат. ин-та АН СССР (1958), д-р физ.-мат. н. (1967), с 1958 работает в Мат. ин-те АН СССР (теория функций действительного переменного).
- ТЕМЛЯКОВ Алексей Александрович** (24. III 1903, г. Царевококшайск, н. Йошкар-Ола МАССР — 11.II 1968), ок. Казан. ун-т (1929), д-р физ.-мат. н. (1949), проф. (1950), в 1933—1938 работал в Томск. ун-те, 1938—1945 — в Перм. ун-те, с 1949 — в Моск. обл. пед. ин-те (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, функциональный анализ).
- ТЕР-КРИКОРОВ Александр Мартынович** (р. 18.X 1932, Ростов-на-Дону), ок. Ростов. ун-т (1955), асп. Моск. физ.-техн. ин-та, д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1967), с 1958 работает в Моск. физ.-техн. ин-те (прикладная математика, гидроаэромеханика).
- ТЕРСЕНОВ Савва Авраамович** (р. в 1924, с. Цинцаро ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1947), асп. Тбил. мат. ин-та АН ГрССР (1950), д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1967), работает в Ин-те мат. СО АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных).
- ТЕР-СТЕПАНИЯН Георгий Исаевич** (р. 16.IV 1907, Тифлис), ок. Тбил. политехн. ин-т (1931), д-р техн. н. (1958), проф. (1960), с 1945 работает в Ин-те геол. наук АН АрмССР (номография).

- ТИМАН Александр Филиппович** (р. 26.VI 1920, г. Золотоноша, н. Черкасск. обл.), ок. Днепропетр. ун-т (1941), канд. физ.-мат. н. (1947), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1952), в 1946—1962 работал в Днепропетр. ун-те, с 1962 работает в Днепропетр. хим.-технол. ин-те (теория функций, функциональный анализ).
- ТИМЧЕНКО Иван Юрьевич** (22.II 1863, Одесса — 30.VIII 1939), ок. Новорос. ун-т (1885), проф. (1918), с 1888 работал в Одесск. ун-те (теория функций комплексного переменного, история математики).
- ТИХОМАНДРИЦКИЙ Матвей Александрович** (1844, Киев — 1921), ок. Петерб. ун-т (1865), магистр чист. мат. (1876), д-р чист. мат. (1885), проф. (1888), в 1878—1883 работал в Петерб. ун-те и на Петерб. высш. женск. курсах, 1883—1903 — в Харьк. ун-те, 1904—1917 в Новорос. ун-те, с 1918 — в Крым. ун-те (теория функций действительного переменного).
- ТИХОНОВ Андрей Николаевич** (р. 30.X 1906, г. Гжатск, н. Смоленск. обл.), ок. Моск. ун-т (1927), асп. там же, д-р физ.-мат. н. (1936), проф. (1936), чл.-корр. АН СССР (1939), акад. АН СССР (1966), лауреат Гос. премии (1953), Ленинск. премии (1966), Герой Соц. Труда (1953), с 1936 работает в Моск. ун-те и Ин-те прикл. мат. АН СССР (дифференциальные уравнения, топология, функциональный анализ, приближенные и численные методы, вариационное исчисление, математическая физика).
- ТИХОНОВ Василий Иванович** (р. 23.VIII 1921, д. Чеварда, н. Горьк. обл.), ок. В.-возд. инж. акад. (1945), адъюнкт. там же (1949), канд. техн. н. (1950), д-р техн. н. (1958), проф. (1962) (теория вероятностей, статистическая радиофизика).
- ТОЗОНИ Олег Валентинович** (р. 30.IX 1927, Кзыл-Орда), ок. Новочеркасск. политехн. ин-т (1951), канд. техн. н. (1958), д-р техн. н. (1965), проф. (1967), в 1951—1960 работал в Новочеркасск. политехн. ин-те, с 1960 работает в Ин-те кибернетики АН УССР (математическая физика, теория функций комплексного переменного, кибернетика).
- ТОЛСТОВ Георгий Павлович** (р. 26.V 1911, Оренбург), ок. Моск. ун-т (1937), д-р физ.-мат. н. (1949), проф. (1949), в 1938—1941 работал в Моск. хим.-технол. ин-те, с 1946 работает в вузах Москвы (теория функций, дифференциальные уравнения в частных производных).
- ТОПОРНИН Дмитрий Сергеевич** (р. 7.IX 1885, Ташкент), ок. Михайловск. арт. акад. (1911), канд. прикл. мат. (1918), д-р техн. н. (1942), проф. (1947), с 1918 работает в Ташкент. политехн. ин-те (прикладная математика, методика математики).
- ТРАХТЕНБРОТ Борис Авраамович** (р. 20.II 1921, пос. Бричево, н. МССР), ок. Черновицк. ун-т (1947), асп. Ин-та мат. АН УССР (1950), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1963), в 1950—1958 работал в Пенз. пед. ин-те, 1958—1960 в Пенз. политехн. ин-те, с 1960 работает в Ин-те мат. СО АН СССР и Новосиб. ун-те (математическая логика и основания математики, электронные вычислительные машины).
- ТРОХИМЧУК Юрий Юрьевич** (р. 17.III 1928, Киев), ок. Львов. ун-т (1949), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1961), в 1955—1960 работал в Новосиб. электротехн. ин-те, с 1961 работает в Ин-те мат. АН УССР (теория функций комплексного переменного).
- ТУМАНЬЯН Тигран Гарич** (15.II 1887, г. Елисаветполь, н. Кировабад АзССР — 5. III 1959), ок. Петерб. ун-т (1911), канд. физ.-мат. н. (1946), проф. (1954), с 1930 работал в Краснодар. ин-те пищ. пром. (геометрия, история математики).
- ТУМАРКИН Генрих Целестинович** (р. 13. X 1927, Москва), ок. Моск. ун-т (1949), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1963), в 1949—1950 работал в Великолук. учит. ин-те, 1950—1954 — во Владимир. пед. ин-те, с 1954 работает в Моск. геологоразвед. ин-те (теория функций комплексного переменного).
- ТУМАРКИН Лев Абрамович** (р. 14.I 1904, г. Гадяч, н. Полтав. обл.), ок. Моск. ун-т (1925), асп. там же (1929), проф. (1931), д-р физ.-мат. н. (1936), в 1931—1938 работал в Моск. высш. техн. уч-ще, с 1929 работает в Моск. ун-те (топология).
- ТУМАРКИН Семён Абрамович** (р. 11.XI 1905, г. Гадяч, н. Полтав. обл.), ок. Моск.

- ун-т (1929), д-р техн. н. (1941), проф. (1946), с 1954 (и в 1930—1933) работает в Моск. горн. ин-те (дифференциальные уравнения).
- ТУМАШЕВ Гумер Галеевич** (р. 21.XI 1910, г. Чистополь, н. ТАССР), ок. Казан. авиац. ин-т (1937), асп. там же (1940), канд. физ.-мат. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1946), проф. (1947), засл. д. н. ТССР (1950), в 1941—1944 работал в Казан. авиац. ин-те, с 1944 работает в Казан. ун-те (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, прикладная математика, гидромеханика, теория фильтрации).
- ТУРЕЦКИЙ Авраам Хаимович** (р. 13.IX 1905, г. Петриков, н. Гомель. обл.), ок. Белорус. ун-т (1929), канд. физ.-мат. н. (1939), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1963), с 1944 работает в Белорус. ун-те (теория функций действительного переменного, приближенные и численные методы).
- ТУРКИН Владимир Константинович** (29. X 1906, г. Новониколаевск, н. Новосибирск — 11.IX 1964), ок. Моск. ун-т (1925), проф. (1934), в 1926—1952 работал в вузах Москвы, с 1952 — в Моск. хим.-технол. ин-те (алгебра).
- ТУРЧАНИНОВ Александр Сергеевич** (10. III 1890, г. Тавастхус, Финляндия — март 1957), ок. Одесск. ун-т (1913), магистр мат. (1918), д-р физ.-мат. н. (1943), проф. (1943), с 1919 работал в учеб. завед. Одессы, Горького, Костромы, Волгограда, Грозного, в 1951—1956 — в Грозн. пед. ин-те (теория чисел, вариационное исчисление, математическая статистика).
- ТЯБЛИКОВ Сергей Владимирович** (7.IX 1921, г. Клин, н. Моск. обл.—17.III 1968), ок. Моск. ун-т (1944), асп. там же (1947), канд. физ.-мат. н. (1947), д-р физ.-мат. н. (1955), проф. (1964), с 1947 работал в Мат. ин-те АН СССР (математические методы в теоретической физике, математическая физика).
- УГОДЧИКОВ Андрей Григорьевич** (р. 3.XI 1920, г. Ветлуга, н. Горьк. обл.), ок. Горьк. индустр. ин-т (1943), асп. Горьк. ин-та инж. водн. трансп. (1949), канд. техн. н. (1950), д-р техн. н. (1958), проф. (1960), в 1951—1967 работал в Горьк. инж.-строит. ин-те, с 1967 работает в Горьк. ун-те (приближенные и численные методы, прикладная математика, теория упругости).
- УЗАКОВ Юсуф Каримович** (р. 25.XII 1911, г. Коканд, н. Ферган. обл.), ок. Узбек. ун-т (1935), канд. физ.-мат. н. (1947), проф. (1962), с 1946 работает в Ташкент. текстильн. ин-те (интегро-дифференциальные уравнения).
- УЛЬЯНОВ Петр Лаврентьевич** (р. 3.V 1928, с. Слепцовка, н. Саратов. обл.), ок. Саратов. ун-т (1950), асп. Моск. ун-та (1953), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1960), чл. Амер. мат. о-ва (1966), с 1953 работает в Моск. ун-те (теория функций, математический анализ).
- УНКОВСКИЙ Всеволод Андреевич** (р. 8.II 1884), ок. Арт. акад. (1911), д-р техн. н. (1940), проф. (1940), лауреат Гос. премии (1952) (теория вероятностей).
- УРАЗБАЕВ Базарбай Мамбетович** (р. 21.XI 1912, с. Кара-Унгур, н. Чимкент. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1935), асп. Казан. ун-та (1937), канд. физ.-мат. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), чл.-корр. АН КазССР (1967), с 1937 работает в Казах. пед. ин-те (алгебра).
- УРАЛЬЦЕВА Нина Николаевна** (р. 24.V 1934, Ленинград), ок. Ленингр. ун-т (1956), асп. там же (1959), д-р физ.-мат. н. (1965), лауреат премии им. П. Л. Чебышева (1966), Гос. премии (1969), с 1959 работает в Ленингр. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных).
- УРЫСОН Павел Самуилович** (3. II 1898, Одесса — 17. VIII 1924), ок. Моск. ун-т (1919), асп. там же (1921), работал в Ин-те мат. и мех. Моск. ун-та и Моск. пед. ин-те (топология, функциональный анализ).
- УСПЕНСКИЙ Андрей Константинович** (р. 7.III 1900, г. Воскресенск, н. г. Истра Моск. обл.), ок. Моск. ун-т (1924), Моск. межевой ин-т (1926), д-р техн. н. (1959), проф. (1961), в 1927—1931 работал в Моск. межевом ин-те, 1931—1942 и 1945—1947 — в Моск. ин-те инж. коммунальн. строит., с 1947 работает в Моск. ин-те инж. землеустройства (приближенные и численные методы).
- УСПЕНСКИЙ Владимир Андреевич** (р. 27.XI 1930, Москва), ок. Моск. ун-т (1952), асп. там же (1955), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1964), с 1955 работает в Моск. ун-те, с 1957 — во Всесоюзн. ин-те научн. и техн. информации АН СССР (математическая логика и основания математики, дифференциальные уравнения в частных производных, математические методы в кибернетике).

- УФЛЯНД Яков Соломонович (р. 18.XII 1916, Петроград), ок. Ленингр. ун-т (1939), д-р физ.-мат. н. (1958), проф. (1963), с 1946 работает в Физ.-техн. ин-те АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных, приближенные и численные методы, прикладная математика).
- УШАКОВ Валентин Борисович (р. 11.VIII 1911), ок. Ленингр. электротехн. ин-т (1934), д-р техн. н. (1958) (приближенные и численные методы, электронные вычислительные машины).
- ФАГЕ Михаил Константинович (р. 1.VII 1915, Томск), ок. Моск. ун-т (1938), канд. физ.-мат. н. (1943), д-р физ.-мат. н. (1958), проф. (1959), в 1947—1961 работал в Черновицк. ун-те, с 1962 работает в ВЦ СО АН СССР (функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения в частных производных).
- ФАДДЕЕВ Дмитрий Константинович (р. 30.VI 1907, г. Юхнов, н. Калуж. обл.), ок. Ленингр. ун-т (1928), д-р физ.-мат. н. (1937), проф. (1937), чл.-корр. АН СССР (1964), с 1933 работает в Ленингр. ун-те, с 1940 — также в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР (алгебра, теория вероятностей, приближенные и численные методы).
- ФАДДЕЕВ Людвиг Дмитриевич (р. 23.III 1934, Ленинград), ок. Ленингр. ун-т (1956), асп. там же (1959), канд. физ.-мат. н. (1959), д-р физ.-мат. н. (1964), с 1959 работает в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР (функциональный анализ, математические методы в теоретической физике).
- ФЕДОРОВ Владимир Семенович (р. 28.VII 1893, г. Ярославль), ок. Моск. ун-т (1915), асп. там же (1918), д-р физ.-мат. н. (1935), проф. (1938), в 1918—1930 работал в Иваново-Вознесенск. политехн. ин-те, с 1930 работает в Иванов. энергетич. ин-те (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных).
- ФЕДОРОВ Евграф Степанович (22.XII 1853, Оренбург — 21.V 1919), ок. В.-инж. уч-ще (1874), Петерб. горн. ин-т (1883), проф. (1895), акад. Рос. АН (1919), чл. Баварск. АН (1896), в 1895—1905 работал в Моск. с.-х. ин-те, 1905—1919 — в Петрогр. горн. ин-те, 1919 — также в Рос. АН (геометрия).
- ФЕЩЕНКО Степан Федорович (р. 13.III 1903, г. Чернобыль, н. Киев. обл.), ок. Киев. ИНО (1929), канд. физ.-мат. н. (1942), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1955), с 1930 работает в Киев. пед. ин-те, с 1934 — также в Ин-те мат. АН УССР (дифференциальные уравнения, приближенные и численные методы).
- ФИЛИН Анатолий Петрович (р. 5.XII 1920, Томск), ок. Ленингр. кораблестроит. ин-т (1942), Тбил. ин-т инж. ж.-д. трансп. (1945), асп. там же (1947), д-р техн. н. (1951), проф. (1952), с 1953 работает в Ленингр. ин-те инж. ж.-д. трансп. (дифференциальные уравнения в частных производных, теория функций действительного переменного).
- ФИЛЬЧАКОВ Павел Феодосьевич (р. 24.IX 1916, Петроград), ок. Киев. ун-т (1940), канд. физ.-мат. н. (1949), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1958), чл.-корр. АН УССР (1964), с 1945 работает в Ин-те мат. АН УССР (теория функций комплексного переменного и ее приложение к задачам фильтрации, приближенные и численные методы).
- ФИНИКОВ Сергей Павлович (15. XI 1883, Новгород — 27. II 1964), ок. Моск. ун-т (1906), проф. (1918), д-р физ.-мат. н. (1935), в 1906—1911 и с 1917 работал в Моск. ун-те (геометрия, дифференциальные уравнения в частных производных).
- ФИХТЕНГОЛЬЦ Григорий Михайлович (5.VI 1888, Одесса — 26.VI 1959), ок. Новорос. ун-т (1911), проф. (1926), д-р физ.-мат. н. (1935), засл. д. н. РСФСР (1940), в 1915—1920 работал в Ленингр. электротехн. ин-те, с 1918 — в Ленингр. ун-те (теория функций, математический и функциональный анализ, история и методика математики).
- ФЛЕЙШМАН Бенцион Семенович (р. 21.XI 1923, Москва), ок. Моск. ун-т (1947), канд. физ.-мат. н. (1958), д-р физ.-мат. н. (1965), с 1955 работает в Ин-те радиотехн. и электрон. АН СССР (прикладная математика, статистические и комбинаторные методы дискретной математики).
- ФОК Владимир Александрович (р. 22.XII 1898, Петербург), ок. Петрогр. ун-т (1922), проф. (1932), чл.-корр. АН СССР (1932), акад. АН СССР (1939), лауреат Гос. премии (1946), Ленинск. премии (1960), в 1919—1923 и 1928—1939 работал

- в Оптич. ин-те, с 1939 — в Ленингр. ун-те (интегральные уравнения, математические методы в физике, квантовая механика).
- ФОМИН Сергей Васильевич** (р. 9.XII 1917, Москва), ок. Моск. ун-т (1939), асп. там же (1941), канд. физ.-мат. н. (1942), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1953), с 1945 работает в Моск. ун-те (функциональный анализ и его приложения, математические проблемы в биологии).
- ФРАДЛИН Борис Наумович** (р. 9.VI 1913, г. Калвария, н. ЛитССР), ок. Киев. ун-т (1937), асп. там же (1947), канд. физ.-мат. н. (1947), д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1967), в 1937—1941 работал в Киев. ун-те, 1940, 1941 — также в Киев. политехн. ин-те, с 1946 работает в Киев. политехн. ин-те (прикладная математика, математические методы в механике, теория упругости, история механики).
- ФРАНК Михаил Людвигович** (р. 29.XI 1878, Москва), ок. Мюнхен. политехн. ин-т (1904), Юрьев. ун-т (1913), проф. (1927), канд. физ.-мат. н. (1937), в 1919—1930 работал в Крым. ун-те, 1930—1941 — в Ленингр. политехн. ин-те (номография, геометрия, приближенные и численные методы).
- ФРАНКЛЬ Феликс Исаидорович** (12.III 1905, Вена — 7.IV 1961), ок. Венск. ун-т (1927), д-р техн. н. (1934), д-р физ.-мат. н. (1936), проф. (1945), чл.-корр. Акад. арт. наук (1947), действ. чл. Ин-та мат. и мех. Моск. ун-та (1936), чл. Нац. комитета СССР по теор. и прикл. мех. (1956), в 1929—1931 работал в Ком. акад., 1931—1944 — в ЦАГИ, 1944—1951 — в вузах Москвы, 1951—1957 — в Киргиз. ун-те, с 1958 — в Кабардино-Балкар. ун-те (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения в частных производных, прикладная математика, газовая динамика).
- ФРЕЙМАН Григорий Абелевич** (р. 3.VII 1926, Казань, ок. Моск. ун-т (1949), асп. Казан. ун-та (1956), канд. физ.-мат. н. (1956), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1956 работает в Елабуж. пед. ин-те (теория чисел, теория вероятностей).
- ФРИДМАН Александр Александрович** (29. VI 1888 — 16. IX 1925), ок. Петерб. ун-т (1910), проф. (1918), в 1918—1920 работал в Перм. ун-те, с 1920 — в Ин-те инж. путей сообщ., Петрогр. политехн. ин-те и Главн. геофиз. обсерватории (в 1925 — директор) (алгебра, геометрия, гидромеханика, геофизика).
- ФУКС Борис Абрамович** (р. 7.X 1907, Воронеж), ок. Казан. ун-т (1927), асп. там же (1931), канд. физ.-мат. н. (1936), д-р физ.-мат. н. (1938), проф. (1939), в 1931—1937 работал в Томск. ун-те, 1937—1941 — в Воронеж. ун-те, 1941—1945 — в Ташкент. авиац. ин-те, 1945—1949 — в Моск. энергетич. ин-те, 1953—1962 — во Всесоюзн. заочн. машиностр. ин-те, с 1962 работает в Моск. ин-те электрон. машиностр. (теория функций комплексного переменного).
- ФУФАЕВ Николай Алексеевич** (р. 8. IV 1920, г. Лукоянов, н. Горьк. обл.), ок. Горьк. ун-т (1949), асп. там же (1952), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1967), с 1950 работает в Горьк. ун-те (прикладная математика, теория колебаний, механика).
- ХАВИНСОН Семен Яковлевич** (р. 17. V 1927, Москва), ок. Моск. ун-т (1949), асп. там же (1952), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1963), с 1956 работает в Моск. инж.-строит. ин-те (теория функций).
- ХАЖАЛИЯ Григорий Яковлевич** (р. 17.VIII 1904, г. Самтредиа, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1929), канд. физ.-мат. н. (1938), проф. (1962), с 1933 работает в Ку-таис. пед. ин-те (теория функций комплексного переменного).
- ХАЛИЛОВ Заид Исмаилович** (р. 14.I 1911, Тифлис), ок. Азерб. пед. ин-т (1932), асп. Тбил. мат. ин-та (1940), канд. физ.-мат. н. (1940), д-р физ.-мат. н. (1946), проф. (1946), акад. АН АзССР (1955), засл. д. н. АзССР (1960), в 1932—1937 работал в Тбил. ин-те инж. ж.-д. трансп., с 1942 работает в АН АзССР (с 1957 — вице-президент, с 1962 — президент), с 1944 — также в Азерб. ун-те, с 1947 — также в Ин-те мат. и мех. АН АзССР (с 1950 — директор) (математический анализ, дифференциальные и интегральные уравнения, функциональный анализ, численные и приближенные методы, история математики).
- ХАПЛАНОВ Михаил Григорьевич** (р. 11.X 1902, Ростов-на-Дону), ок. Ростов. ун-т (1925), канд. физ.-мат. н. (1935), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1961), с 1931 работает в Ростов. ун-те (теория функций комплексного переменного).
- ХАРАДЗЕ Арчил Кириллович** (р. 21.IV 1895, ст. Ципа, н. ГрССР), ок. Моск. ун-т (1917), проф. (1932), засл. д. н. ГрССР (1944), с 1918 работает в Тбил. ун-те и Тбил. пед. ин-те (алгебра, математический анализ).

- ХАРАЗОВ Давид Фомич** (р. 1.VII 1915, Тифлис), ок. Тбил. ун-т (1938), канд. физ.-мат. н. (1942), д-р физ.-мат. н. (1954), проф. (1957), в 1939—1959 работал в Тбил. ун-те, 1943—1961 — в Тбил. мат. ин-те АН ГрССР, 1961—1969 — в вузах Ленинграда, с 1969 работает в Ленингр. технол. ин-те (дифференциальные и интегральные уравнения, функциональный анализ и его приложения).
- ХАРАСАХАЛ Вадим Хрисанфович** (18.X 1918, с. Водопой, н. Николаев. обл.— 17. XI 1966), ок. Казах. ун-т (1942), асп. там же (1948), канд. физ.-мат. н. (1948), д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1966), с 1944 работал в Казах. ун-те (дифференциальные уравнения, прикладная математика).
- ХАРЛАМОВ Павел Васильевич** (р. 25.VII 1924, с. Гахово, н. Курск. обл.), ок. Моск. ун-т (1952), канд. физ.-мат. н. (1955), д-р физ.-мат. н. (1965), чл.-корр. АН УССР (1965), в 1952—1959 работал в Донецк. индустр. ин-те, 1959—1965 — в Ин-те гидродинам. СО АН СССР и Новосиб. ун-те, с 1965 работает в Донецк. ун-те и Донецк. ВЦ АН УССР (дифференциальные уравнения, прикладная математика, теоретическая механика).
- ХАРШИЛАДЗЕ Филипп Илларионович** (р. 17.I 1914, с. Дуревы, н. ГрССР), ок. Ленингр. ун-т (1938), асп. там же (1941), канд. физ.-мат. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1965), засл. д. н. ГрССР (1966), работал в Ленингр. ун-те, с 1950 работает в Тбил. ун-те и Тбил. мат. ин-те АН ГрССР (теория функций действительного переменного).
- ХАСКИНД Макс Данилович** (28.II 1913, с. Новый Буг, н. г. Новый Буг Николаев. обл.— май 1963), ок. Одесск. ун-т (1937), д-р физ.-мат. н. (1955), проф. (1956), до 1958 работал в Одесск. технол. ин-те пищ. и холодильн. пром., с 1958 — в Одесск. электротехн. ин-те связи (прикладная математика, гидроаэромеханика).
- ХВЕДЕЛИДЗЕ Борис Владимирович** (р. 7.XI 1915, г. Чиатура, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1938), асп. Тбил. мат. ин-та АН ГрССР (1941), канд. физ.-мат. н. (1942), д-р физ.-мат. н. (1958), проф. (1959), чл.-корр. АН ГрССР (1967), с 1942 работает в Тбил. мат. ин-те АН ГрССР, с 1962 — также в Груз. политехн. ин-те (теория функций комплексного переменного и ее приложения, интегральные уравнения).
- ХИНЧИН Александр Яковлевич** (19. VII 1894, с. Кондрово, н. Калуж. обл.— 19. XI 1959), ок. Моск. ун-т (1916), проф. (1921), д-р физ.-мат. н. (1935), чл.-корр. АН СССР (1939), действ. чл. АПН РСФСР (1944), лауреат Гос. премии (1940), в 1918—1926 работал в Иванов. политехн. ин-те, с 1922 — в Моск. ун-те, с 1939 — также в Мат. ин-те АН СССР (теория вероятностей, математическая логика, теория функций, теория чисел, математический анализ, история математики, теория массового обслуживания и теория информации).
- ХЛОДОВСКИЙ Игорь Николаевич** (1. V 1903, Москва — 21. III 1951), ок. Моск. ун-т (1926), асп. там же (1930), проф. (1932), в 1930—1951 работал в Моск. хим.-технол. ин-те (теория функций действительного переменного).
- ХРЕНОВ Леонид Сергеевич** (р. 10.VI 1907, Воронеж), ок. Воронеж. с.-х. ин-т (1930), канд. техн. н. (1938), д-р географ. н. (1947), проф. (1948), с 1954 работает в Моск. гидромелиор. ин-те и Моск. ин-те инж. ж.-д. трансп. (приближенные и численные методы).
- ХРИСТИАНОВИЧ Сергей Алексеевич** (р. 9.XI 1908, Петербург), ок. Ленингр. ун-т (1930), д-р физ.-мат. н. (1937), чл.-корр. АН СССР (1939), акад. АН СССР (1943), трижды лауреат Гос. премии (1942, 1946, 1952), Герой Соц. Труда (1969), в 1930—1937 работал в Ленингр. гидролог. ин-те, 1937—1953 — в ЦАГИ, с 1956 работает в Ин-те хим. физ. АН СССР и Отд. физ.-техн. проблем энергетики АН СССР (математические методы в механике, прикладная математика, дифференциальные уравнения в частных производных, аэродинамика).
- ХРУСТАЛЕВ Александр Федорович** (р. 14. III 1931, г. Майкоп, н. Краснодар. края), ок. Моск. ун-т (1955), канд. физ.-мат. н. (1959), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), в 1955—1960 работал в Харьк. автодор. ин-те, с 1961 работает в Севастополь. приборостроит. ин-те (дифференциальные уравнения в частных производных).
- ХУМАЛ (ГУДЕБЕРГ) Арнольд Константинович** (р. 10.III 1908, г. Ревель), ок. Тартуск. ун-т (1929), д-р филос. (1934), проф. (1945), д-р физ.-мат. н. (1946), акад. АН ЭССР (1951), в 1928—1941 работал в Тартуск. ун-те, с 1944 работает

- в Таллин. политехн. ин-те, с 1953 — также в АН ЭССР (вице-президент) (номография, геометрия, прикладная математика).
- ХУРГИН Яков Исаевич** (р. 17.V 1919, Саратов), ок. Моск. ун-т (1941), асп. там же (1946), канд. физ.-мат. н. (1946), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1963), с 1957 работает в Ин-те радиотехн. и радиоэлектрон. АН СССР, с 1962 — также в Ин-те нефтехим. и газ. пром. (дифференциальные уравнения в частных производных, функциональный анализ).
- ЦИММЕРМАН Владимир Акимович** (15.IX 1866, Одесса — 17.XII 1939), ок. Новорос. ун-т (1888), магистр чист. мат. (1896), д-р чист. мат. (1899), проф. (1903), в 1894—1920 работал в Новорос. ун-те, 1921—1924 — в Одесск. ИНО (дифференциальные уравнения, вариационное исчисление).
- ЦИТЛАНДЗЕ Элизбар Семенович** (р. 27.VII 1912, г. Боржом, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1933), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1952), с 1934 работает в Тбил. ун-те и Тбил. мат. ин-те АН ГрССР (вариационное исчисление, функциональный анализ, дифференциальные уравнения в частных производных).
- ЦХАКАЯ Доментий Георгиевич** (р. 19.VIII 1899, с. Зугдиди, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1927), д-р физ.-мат. н. (1956), засл. д. н. ГрССР (1961), с 1930 работает в Тбил. ун-те, с 1937 — также в Тбил. мат. ин-те АН ГрССР (история математики).
- ЦЫПКИН Яков Залманович** (р. 19. IX 1919, г. Екатеринослав, н. Днепропетровск), ок. Моск. электротехн. ин-т связи (1941), канд. техн. н. (1946), д-р техн. н. (1948), проф. (1949), лауреат Ленинск. премии (1960), в 1941—1950 работал в научно-исслед. ин-тах, с 1950 работает в Ин-те автом. и телемех. АН СССР (дифференциальные уравнения, теория автоматического управления, теория колебаний, прикладная математика, кибернетика).
- ЧАВЧАНИДЗЕ Владимир Валерианович** (р. 22.IX 1920, г. Сухуми), ок. Тбил. ун-т (1941), асп. Ин-та физ. АН ГрССР (1951), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ. мат. н. (1965), чл.-корр. АН ГрССР (1967), в 1946—1960 работал в Ин-те физ. АН ГрССР, с 1960 работает в Ин-те кибернетики АН ГрССР (директор) (теория информации, прикладная математика, квантовая механика, теоретическая биокибернетика).
- ЧАЙКОВСКИЙ Николай Андреевич** (р. 2.I 1887, г. Бережаны, н. Тернополь. обл.), ок. Праж., Венск., Львов. ун-ты (1905—1910), д-р филос. (1911), проф. (1965), в 1929—1930 работал в Одесск. ИНО, 1930—1933 — в Одесск. физ.-хим.-мат. ин-те, 1956—1960 — во Львов. пед. ин-те, 1960—1965 — во Львов. ун-те (история математики).
- ЧАЛЫЙ Александр Трофимович** (р. 8. III 1898, Харьков), ок. Белгород. пед. ин-т (1920), Харьк. ин-т нар. х-ва (1926), канд. пед. н. (1955), проф. (1966), в 1932—1939 и 1946, 1947 работал в Моск. ин-те связи, 1945—1947 — также в Моск. мех. ин-те, 1948—1956 — в Киев. политехн. ин-те, 1956—1960 — в Киев. пед. ин-те, 1960—1966 — в Киев. ун-те, с 1966 работает в Киев. высш. инж. радиотехн. уч-ще (начертательная геометрия).
- ЧАПЛЫГИН Сергей Алексеевич** (5.IV 1869, г. Раненбург, н. Чаплыгин Липецк. обл. — 8.X 1942), ок. Моск. ун-т (1890), магистр. мат. (1897), д-р прикл. мат. (1902), проф. (1902), чл.-корр. АН СССР (1924), акад. АН СССР (1929), засл. д. н. РСФСР (1929), Герой Соц. Труда (1941), с 1894 работал в Моск. ун-те, в 1895—1901 — также в Моск. межевом ин-те, 1896—1906 — также в Моск. высш. техн. уч-ще, с 1901 — также на Моск. высш. женск. курсах (1905—1918 — директор), с 1918 — также в ЦАГИ (теория функций комплексного переменного и ее приложения в аэродинамике, дифференциальные уравнения).
- ЧАРИН Виктор Сильвестрович** (р. 7.XI 1919, с. Поелдино, н. КомиАССР), ок. Казан. ун-т (1941), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1965), в 1951—1965 работал в Уральск. ун-те, с 1965 работает в Киев. ун-те (алгебра).
- ЧАРНЫЙ Исаак Абрамович** (16.IX 1909, г. Гомель — 1.VIII 1967), ок. Моск. ун-т (1931), канд. техн. н. (1937), д-р техн. н. (1940), проф. (1941), лауреат Гос. премии (1949), с 1930 работал в Моск. нефт. Ин-те, с 1938 — также в Моск. энергетич. ин-те, с 1941 — также в Ин-те проблем мех. АН СССР (дифференциальные уравнения в частных производных).

- ЧАХТАУРИ** Адам Ильич (р. 27.I 1908, с. Шильда, н. ГрССР), ок. Тбил. ун-т (1932), асп. там же (1937), д-р физ.-мат. н. (1946), проф. (1948), с 1932 работает в Тбил. ун-те (дифференциальная геометрия).
- ЧЕБОТАРЕВ** Николай Григорьевич (15.VI 1894, г. Каменец-Подольский, н. Хмельницк. обл. — 2.VII 1947), ок. Киев. ун-т (1916), д-р физ.-мат. н. (1927), проф. (1927), чл.-корр. АН СССР (1929), засл. д. н. РСФСР (1943), в 1923—1927 работал в Одесск. ун-те, с 1928 — в Казан. ун-те (теория чисел, алгебра, вариационное исчисление, геометрия).
- ЧЕЛИДЗЕ** Владимир Георгиевич (р. 15.III 1906, г. Сухуми), ок. Тбил. ун-т (1929), канд. физ.-мат. н. (1937), д-р физ.-мат. н. (1950), проф. (1951), чл.-корр. АН ГрССР (1967), засл. д. н. ГрССР (1961), с 1930 работает в Тбил. ун-те (математический анализ).
- ЧЕРЕНИН** Виктор Павлович (р. 3.II 1924, г. Вышний Волочек, н. Калинин. обл.), ок. Моск. ун-т (1947), асп. там же, д-р физ.-мат. н. (1967), с 1958 работает в ВЦ АН СССР (вычислительная математика, кибернетика).
- ЧЕРЕПАНОВ** Геннадий Петрович (р. 8. I 1937, д. Крутая, н. Владимир. обл.), ок. Моск. физ.-техн. ин-т (1960), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р физ.-мат. н. (1964), с 1962 работает в Ин-те проблем мех. АН СССР (теория функций комплексного переменного, прикладная математика, реология, теория упругости и пластичности).
- ЧЕРНИКОВ** Сергей Николаевич (р. 11.V 1912, г. Сергиев посад, н. г. Загорск Моск. обл.), ок. Саратов. пед. ин-т (1933), асп. Моск. ун-та (1939), д-р физ.-мат. н. (1940), проф. (1941), чл.-корр. АН УССР (1967), в 1933—1946 работал в Уральск. политехн. ин-те, 1945—1951 — в Уральск. ун-те, 1951—1961 — в Перм. ун-те, 1961—1965 — в Свердловск. отд. Мат. ин-та АН СССР, с 1965 работает в Ин-те мат. АН УССР (алгебра).
- ЧЕРНЯЕВ** Михаил Павлович (10.X 1891 — 26.XI 1962), ок. Моск. ун-т (1913), проф. (1933), канд. физ.-мат. н. (1938), в 1922—1962 работал в Ростов. ун-те (геометрия, история математики).
- ЧЕРПАКОВ** Павел Васильевич (р. 10.I 1910, г. Суджа, н. Курск. обл.), ок. Воронеж. ун-т (1931), асп. там же (1934), канд. физ.-мат. н. (1936), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1951), в 1934—1941 работал в Воронеж. ун-те, 1941 — 1954 — в Воронеж. и Куйбышев. авиац. ин-тах, с 1954 работает в Воронеж. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, математическая физика).
- ЧЕРСКИЙ** Юрий Иосифович (р. 8. XII 1929, Казань), ок. Казан. ун-т (1952), канд. физ.-мат. н. (1956), д-р физ.-мат. н. (1965), проф. (1966), в 1956—1964 работал в Ростов. ун-те, с 1964 работает в Одесск. ун-те (теория функций, дифференциальные и интегральные уравнения, математическая физика).
- ЧЕТАЕВ** Николай Гурьевич (6.XII 1902, с. Карадули, н. ТАССР — 17.X 1959), ок. Казан. ун-т (1924), проф. (1930), д-р физ.-мат. н. (1938), чл.-корр. АН СССР (1943), лауреат Ленинск. премии (1960, посмертно), работал в Ин-те мех. АН СССР и Моск. ун-те (дифференциальные уравнения, теория устойчивости, прикладная математика, механика).
- ЧЕТВЕРУХИН** Николай Федорович (р. 18.XI 1891, г. Ярославль), ок. Моск. ун-т (1915), канд. физ.-мат. н. (1929), проф. (1931), д-р физ.-мат. н. (1944), чл.-корр. АПН РСФСР (1945), акад. АПН РСФСР (1955), засл. д. н. РСФСР (1962), в 1919—1931 работал в Моск. ун-те, 1929—1941 — в Моск. пед. ин-те, с 1941 работает в Моск. авиац. ин-те (начертательная и проективная геометрия).
- ЧИБРИКОВА** Любовь Ивановна (р. 6.III 1925, ст. Ново-Шигалеево ТАССР), ок. Казан. ун-т (1947), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), с 1951 работает в Казан. ун-те (теория функций комплексного переменного, интегральные уравнения, математическая физика).
- ЧОГОШВИЛИ** Георгий Северьянович (р. 21.XII 1914, г. Сачхере, н. ГрССР), ок. Моск. ун-т (1936), асп. там же (1939), канд. физ.-мат. н. (1939), д-р физ.-мат. н. (1945), проф. (1946), чл.-корр. АН ГрССР (1955), акад. АН ГрССР (1960), засл. д. н. ГрССР (1966), с 1939 работает в Тбил. мат. ин-те АН ГрССР, с 1943 — также в Тбил. ун-те (топология, алгебра, вариационное исчисление).
- ЧУДАКОВ** Николай Григорьевич (р. 14.XII 1904, с. Лысовка, н. Саратов. обл.), ок. Моск. ун-т (1927), асп. там же (1930), д-р физ.-мат. н. (1937), проф. (1939),

- в 1930—1936 и 1940—1967 работал в Саратов. ун-те, с 1967 работает в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР (теория чисел, теория функций).
- ЧУНИХИН Сергей Антонович** (р. 21. IX 1905, Харьков), ок. Моск. ун-т (1929), асп. там же (1932), проф. (1934), ок. докт. Мат. ин-та АН СССР (1936), д-р физ.-мат. н. (1936), чл.-корр. АН БССР (1956), акад. АН БССР (1966), в 1929—1941 работал в Моск. ун-те и Мат. ин-те АН СССР, 1941—1953 — в Томск. ун-те и ин-те инж. ж.-д. трансп., 1953—1960 — в Белорус. ин-те инж. ж.-д. трансп. и АН БССР, с 1960 работает в АН БССР и Гомель. пед. ин-те (алгебра).
- ШАБАТ Борис Владимирович** (р. 9. VII 1917, Москва), ок. Моск. ун-т (1940), асп. там же (1944), канд. физ.-мат. н. (1944), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1963), в 1944—1957 работал в Моск. энергетич. и-те, с 1952 работает в изд-ве «Мир», с 1957 — также в Моск. ун-те (теория функций комплексного переменного и ее приложения, дифференциальные уравнения в частных производных).
- ШАГИНЯН Арташес Липаритович** (р. 19. XII 1906, г. Александрополь, н. г. Ленинакан АрмССР), ок. Ереван. ун-т (1930), асп. Ленингр. ун-та (1937), д-р физ.-мат. н. (1945), акад. АН АрмССР (1947), с 1949 работает в Ереван. ун-те (теория функций комплексного переменного).
- ШАИН Борис Моисеевич** (р. 22. VI 1938, Москва), ок. Саратов ун-т (1960), канд. физ.-мат. н. (1962), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1960 работает в Саратов. ун-те (алгебра, математическая логика).
- ШАНИН Николай Александрович** (р. 25. V 1919, Псков), ок. Ленингр. ун-т (1939), асп. там же (1941), д-р физ.-мат. н. (1946), проф. (1957), с 1945 работает в Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР и Ленингр. ун-те (математическая логика, топология).
- ШАПИРО Яков Львович** (р. 10. I 1905, г. Медниречье, н. ПНР), ок. Днепропетр. ИНО (1930), д-р физ.-мат. н. (1947), проф. (1947), с 1938 работает в Горьк. ун-те (геометрия).
- ШАРКОВСКИЙ Александр Николаевич** (р. 7. XII 1936, Киев), ок. Киев. ун-т (1958), асп. Ин-та мат. АН УССР (1961), канд. физ.-мат. н. (1961), д-р физ.-мат. н. (1968), с 1961 работает в Ин-те мат. АН УССР, с 1967 — также в Киев. ун-те (дифференциальные уравнения, теория динамических систем, топология, математическая физика).
- ШАТРОВСКИЙ Лев Иванович** (р. 7. VIII 1911, Красноярск), ок. Моск. пед. ин-т (1940), канд. техн. н. (1945), д-р техн. н. (1966) (приближенные и численные методы).
- ШАТУНОВСКИЙ Самуил Осипович** (25. III 1859, с. Великая Знаменка, н. Запорож. обл. — 27. III 1929), магистр чист. мат. (1919), проф. (1920), в 1905—1920 работал в Новорос. ун-те, 1921—1929 — в Одесск. ИНО (алгебра, теория чисел, теория функций комплексного переменного).
- ШАФАРЕВИЧ Игорь Ростиславович** (р. 3. VII 1923, г. Житомир), ок. Моск. ун-т (1940), д-р физ.-мат. н., проф. (1953), чл.-корр. АН СССР (1958), лауреат Ленинск. премии (1959), с 1946 работает в Мат. ин-те АН СССР (теория чисел, алгебра).
- ШВАРЦ Альберт Соломонович** (р. 24. VI 1934, Казань), ок. Иванов. пед. ин-т (1955), асп. Моск. ун-та (1958), канд. физ.-мат. н. (1958), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1964), в 1958—1964 работал в Воронеж. ун-те, с 1964 работает в Моск. инж.-физ. ин-те (топология, алгебра, функциональный анализ, математическая физика, вариационное исчисление, прикладная математика).
- ШВЕЦ Михаил Ефимович** (р. 25. V 1911, г. Житомир), ок. Ленингр. ун-т (1938), канд. физ.-мат. н. (1943), д-р физ.-мат. н. (1953), проф. (1953), с 1938 работает в Главн. геофиз. обсерватории (дифференциальные уравнения в частных производных, прикладная математика, геофизика, гидродинамика).
- ШЕВЛЯКОВ Юрий Андреевич** (р. 7. VIII 1921, с. Ново-Павловка, н. с. Партизаны Запорож. обл.), ок. Харьк. ун-т (1945), асп. Днепропетр. ун-та (1948), канд. физ.-мат. н. (1948), д-р техн. н. (1956), проф. (1957), с 1948 работает в Днепропетр. ун-те (математические методы в механике, теория упругости).
- ШЕВРИН Лев Наумович** (р. 4. I 1935, Свердловск), ок. Уральск. ун-т (1957), асп. там же (1960), канд. физ.-мат. н. (1961), д-р физ.-мат. н. (1967), с 1960 работает в Уральск. ун-те (алгебра).

- ШЕВЧЕНКО** Касьян Никитович (р. 19.II 1904, д. Доброполье, н. Кировоград. обл.), ок. Днепропетр. ИНО (1929), Моск. ун-т (1933), асп. там же (1936), канд. физ.-мат. н. (1936), д-р техн. н. (1947), проф. (1949), в 1940—1963 работал в Ин-те мех. АН СССР, с 1963 работает в Моск. инж.-физ. ин-те (вариационные задачи в теории упругости).
- ШЕПЕЛЕВ** Виталий Матвеевич (р. 10.IX 1897, Саратов), ок. Моск. ун-т (1922), асп. там же (1929), канд. физ.-мат. н. (1935), проф. (1935), в 1921—1930 работал в Моск. мех.-электротехн. ин-те, 1929—1935 — в Моск. вечерн. машиностр. ин-те, 1935—1938 — в Киров. пед. ин-те, 1939—1947 — в Коломен. учит. ин-те, с 1947 работает в Моск. технол. ин-те легкой пром. (теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения).
- ШЕРМАН** Давид Иосифович (р. 22.VIII 1905, Тула), ок. Ленингр. политехн. ин-т (1930), канд. физ.-мат. н. (1936), д-р физ.-мат. н. (1939), проф. (1940), в 1933—1944 работал в Сейсмолог. ин-те АН СССР, с 1944 работает в Ин-те проблем мех. АН СССР (математическая теория упругости, дифференциальные и интегральные уравнения).
- ШИДЛОВСКИЙ** Андрей Борисович (р. 13.VIII 1915, г. Алатырь, н. ЧАССР), ок. Моск. ун-т (1950), асп. там же (1953), канд. физ.-мат. н. (1954), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1961), с 1954 работает в Моск. ун-те (теория чисел).
- ШИЛОВ** Георгий Евгеньевич (р. 3.II 1917, Иваново-Вознесенск, н. Иваново), ок. Моск. ун-т (1938), асп. там же (1941), канд. физ.-мат. н. (1941), д-р физ.-мат. н. (1951), проф. (1952), в 1946—1950 работал в Моск. ун-те, 1951—1954 — в Киев. ун-те, с 1954 работает в Моск. ун-те (теория функций, функциональный анализ, дифференциальные уравнения, алгебра, теория множеств).
- ШИМАНОВ** Сергей Никанорович (р. 16.VIII 1922, г. Екатеринбург, н. Свердловск), ок. Уральск. ун-т (1945), асп. там же (1949), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1963), проф. (1965), с 1949 работает в Уральск. ун-те (дифференциальные уравнения).
- ШИРКОВ** Дмитрий Васильевич (р. 3.III 1928, Москва), ок. Моск. ун-т (1949), д-р физ.-мат. н. (1958), проф. (1962), чл.-корр. АН СССР (1960), работает в Ин-те мат. СО АН СССР и Новосиб. ун-те (функциональный анализ, математические методы в теоретической физике).
- ШИРОКОВ** Александр Петрович (р. 21.XII 1926, Казань), ок. Казан. ун-т (1949), асп. там же (1952), канд. физ.-мат. н. (1952), д-р физ.-мат. н. (1968), с 1952 работает в Казан. ун-те (дифференциальная геометрия, тензорный анализ).
- ШИРОКОВ** Петр Алексеевич (9.II 1895 — 26.II 1944), ок. Казан. ун-т (1918), проф. (1930), д-р физ.-мат. н. (1936), с 1923 работал в Казан. ун-те (алгебра, дифференциальная геометрия).
- ШИРОКОВ** Юрий Михайлович (р. 21.VI 1925, Москва), ок. Моск. ун-т (1948), асп. там же (1951), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1965), в 1951—1966 работал в Моск. ун-те, с 1966 работает в Мат. ин-те АН СССР (математические методы в теоретической физике).
- ШИРШОВ** Анатолий Илларионович (р. 8.VIII 1921, с. Колывань, н. Новосиб. обл.), ок. Луганск. пед. ин-т (1949), асп. Моск. ун-та (1953), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1958), чл.-корр. АН СССР (1964), в 1953—1960 работал в Моск. ун-те, с 1960 работает в Ин-те мат. СО АН СССР (алгебра).
- ШИРЯЕВ** Альберт Николаевич (р. 12.X 1934, г. Щелково Моск. обл.), ок. Моск. ун-т (1957), канд. физ.-мат. н. (1961), д-р физ.-мат. н. (1968), с 1957 работает в Мат. ин-те АН СССР (теория вероятностей и математическая статистика).
- ШМЕЛЬКИН** Альфред Львович (р. 12.VI 1938, Москва), ок. Моск. ун-т (1961), асп. там же (1963), канд. физ.-мат. н. (1964), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1964 работает в Моск. ун-те (алгебра).
- ШМИДТ** Отто Юльевич (30.IX 1891, г. Могилев — 7.IX 1956), ок. Киев. ун-т (1913), проф. (1920), чл.-корр. АН СССР (1933), акад. АН УССР (1934), акад. АН СССР (1935), Герой Советского Союза (1937), в 1913—1920 работал в Киев. ун-те, 1920—1923 — в Моск. лесотехн. ин-те, 1923—1926 — во 2-м Моск. ун-те, 1926—1956 — в Моск. ун-те, с 1938 — в Ин-те теор. геофиз. АН СССР (директор), в 1939—1942 — вице-президент АН СССР (алгебра, космогония).
- ШНЕЙДМЮЛЛЕР** Владимир Иванович (12.X 1911, г. Кириллов, н. Вологод. обл. —

- 25.IV 1962), ок. Саратов. пед. ин-т (1931), канд. физ.-мат. н. (1941), проф. (1962), с 1946 работал в Магнитогорск. горнометаллург. ин-те (алгебра).
- ШНИРЕЛЬМАН** Лев Генрихович (2 I 1905, г. Гомель — 24.IX 1938), ок. Моск. ун-т (1925), асп. там же, д-р физ.-мат. н., проф. (1929), чл.-корр. АН СССР (1933), в 1929—1934 работал в Донск. политехн. ин-те, с 1934 — в Мат. ин-те АН СССР (теория чисел, топологические методы в вариационном исчислении, геометрия, теория функций).
- ШТАЕРМАН** Илья Яковлевич (19.IV 1891, г. Могилев-Подольский, в. Винницк. обл. — 24.XII 1962), ок. Киев. ун-т (1915), Киев. политехн. ин-т (1918), проф. (1924), д-р физ.-мат. н. (1930), чл.-корр. АН УССР (1939), в 1918—1941 работал в Киев. политехн. ин-те, 1930—1941 — также в Киев. ун-те, 1920—1944 — в АН УССР, с 1943 — в Моск. инж.-строит. ин-те (прикладная математика, механика, теория функций, дифференциальные и интегральные уравнения, математическая физика).
- ШТОКАЛО** Иосиф Захарьевич (р. 16.XI 1897, с. Скоморохи, в. Львов. обл.), ок. Днепропетр. ун-т (1931), асп. Харьк. ун-та (1934), канд. физ.-мат. н. (1934), д-р физ.-мат. н. (1944), проф. (1946), чл.-корр. АН УССР (1948), акад. АН УССР (1951), чл.-корр. Междунар. акад. ист. наук (1965), засл. д. н. УССР (1968), в 1931—1932 работал в Харьк. инж.-эконом. ин-те, 1932—1934 — в Харьк. авиац. ин-те, 1934—1941 — в Харьк. ун-те, с 1941 работает в Ин-те мат. АН УССР, в 1944—1949 работал в Киев. технол. ин-те пищ. пром., 1949—1956 — во Львов. фил. АН УССР (председатель Президиума), с 1944 работает в Киев. ун-те, с 1963 — зав. Сектором ист. естествозн. и техн. Ин-та ист. АН УССР (дифференциальные уравнения, операционное исчисление, теория функций комплексного переменного и ее приложения в аэродинамике, история математики).
- ШТРАУС** Авраам Вильгельмович (р. 15.VI 1920, Ташкент), ок. Куйбышев. пед. ин-т (1944), асп. там же (1948), канд. физ.-мат. н. (1948), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1961), с 1948 работает в Ульяновск. пед. ин-те (функциональный анализ).
- ШУБНИКОВ** Алексей Васильевич (р. 29.III 1887, Москва), ок. Моск. ун-т (1912), проф. (1925), чл.-корр. АН СССР (1933), д-р геол.-минералог. н. (1934), акад. АН СССР (1953), Герой Соц. Труда (1967), дважды лауреат Гос. премии (1947, 1950), в 1920—1925 работал в Уральск. горн. ин-те, с 1925 работает в АН СССР, с 1937 — в Ин-те кристаллограф. АН СССР, а также в Моск. ун-те (математическая кристаллография).
- ШУЛИКОВСКИЙ** Валентин Иванович (р. 29.VI 1922, г. Новониколаевск, в. Новосибирск), ок. Казан. ун-т (1948), асп. там же (1951), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1967), с 1951 работает в Казан. ун-те, в 1965—1967 работал в Пловдив. пед. ин-те (Болгария) (дифференциальная геометрия).
- ШУЛЬГИН** Михаил Федорович (р. 10.VIII 1901, с. Боровское, в. Кустанайск. обл.), ок. Средаз. ун-т (1930), канд. физ.-мат. н. (1939), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1961), с 1933 работает в Ташкент. ун-те (дифференциальные уравнения, математические методы в механике, аналитическая механика).
- ШУРА-БУРА** Михаил Романович (р. 21.X 1918, с. Парафиевка, в. Чернигов. обл.), ок. Моск. ун-т (1940), асп. там же (1947), докт. АН СССР (1952), д-р физ.-мат. н. (1954), проф. (1954), лауреат Гос. премии (1955), в 1947—1955 работал в Моск. физ.-техн. ин-те, с 1955 работает в Ин-те прикл. мат. АН СССР и Моск. ун-те (топология, приближенные и численные методы, электронные вычислительные машины, программирование).
- ЩЕРБАКОВ** Роман Николаевич (р. 3.X 1918, г. Троицкосавск, в. г. Кяхта БАССР), ок. Томск. ун-т (1940), канд. физ.-мат. н. (1951), д-р физ.-мат. н. (1964), проф. (1965), в 1945—1957 работал в Бурят. пед. ин-те, с 1957 работает в Томск. ун-те (геометрия).
- ЩЕРБИНА** Константин Моисеевич (13.VII 1864, г. Прилуки, в. Чернигов. обл. — 30.VIII 1946), ок. Киев. ун-т (1888), проф. (1921), в 1921—1930 работал в Одесск. ИНО (методика преподавания математики).
- ЩИГОЛЕВ** Борис Михайлович (р. 4.VIII 1891, Варшава), ок. Варшав. ун-т (1917), канд. физ.-мат. н. (1938), проф. (1938), д-р физ.-мат. н. (1949), с 1931 работает в Моск. ун-те (математические методы в астрономии, небесная механика).
- ЩИПАНОВ** Петр Константинович (р. 20.VIII 1902), ок. Моск. ун-т (1929), канд.

- техн. н. (1947), проф. (1962), с 1930 работает в Калинин. политехн. ин-те (алгебра).
- ЭЙДЕЛЬМАН** Самуил Давидович (р. 3.I 1921, г. Проскуров, н. Хмельницкий), ок. Черновицк. ун-т (1948), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1960), проф. (1961), в 1948—1963 работал в Черновицк. ун-те, с 1963 работает в Воронеж. политехн. ин-те (дифференциальные уравнения в частных производных).
- ЭЙДУС** Даниил Менделевич (р. 6.XI 1922, Петроград), ок. Казах. ун-т (1945), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1966), с 1945 работает в Ленингр. ин-те авиац. приборостр. (дифференциальные уравнения в частных производных, функциональный анализ, приближенные и численные методы).
- ЭЛЬСГОЛЬЦ** Лев Эрнестович (5.VII 1909, Петербург — 24.X 1967), ок. Моск. ун-т (1931), канд. физ.-мат. н. (1939), д-р физ.-мат. н. (1961), проф. (1961), в 1933—1960 работал в Моск. ун-те, с 1961 — в Ун-те дружбы народов им. П. Лумумбы (дифференциальные уравнения, вариационное исчисление).
- ЭФРОС** Александр Михайлович (1908—1941 ?), д-р физ.-мат. н., проф., работал в Харьк. политехн. ин-те и Харьк. ун-те (операционное исчисление, математическая физика).
- ЮДИН** Давид Борисович (р. 21.V 1919, г. Екатеринослав, н. Днепропетровск), ок. Днепропетр. ун-т (1941), д-р техн. н. (1957), проф. (1962), с 1963 работает в Моск. ун-те (вариационное исчисление, программирование).
- ЮЦИС** Адольфас Прано (р. 12.IX 1904, д. Клавсгалву-Медседжий, н. ЛитССР), ок. Каунас. ун-т (1931), д-р физ.-мат. н. (1952), проф. (1953), акад. АН ЛитССР (1953), засл. д. н. ЛитССР (1961), с 1940 работает в Вильнюс. ун-те, в 1952—1963 работал также в АН ЛитССР (тензорный анализ, прикладная математика, математические методы в механике).
- ЮШКЕВИЧ** Адольф Павлович (р. 15.VII 1906, Одесса), ок. Моск. ун-т (1929), канд. физ.-мат. н. (1935), д-р физ.-мат. н. (1940), проф. (1940), чл.-корр. Междунар. акад. ист. наук (1957), акад. Междунар. акад. ист. наук (1960) (1965—1968 — президент академии), чл. Леопольдина (ГДР) (1958), засл. д. н. РСФСР (1966), в 1930—1952 работал в Моск. высш. техн. уч-ще, с 1945 работает в Ин-те ист. естествозн. и техн. АН СССР и Моск. ун-те (история математики).
- ЮШКЕВИЧ** Александр Адольфович (р. 19.XI 1930, Москва), ок. Моск. ун-т (1953), канд. физ.-мат. н. (1958), д-р техн. н. (1970), в 1954—1959 работал во Всесоюзн. заочн. ин-те сов. торговли (теория вероятностей).
- ЮШКОВ** Петр Петрович (р. 4.IX 1906, Смоленск), ок. Ленингр. ун-т (1929), канд. физ.-мат. н. (1944), проф. (1961), с 1946 (и в 1931—1941) работает в Ленингр. технол. ин-те холодильн. пром. (приближенные и численные методы, математическая физика).
- ЮЩЕНКО** (РВАЧЕВА) Екатерина Логвиновна (р. 8.XII 1919, г. Чигирин, н. Черкасск. обл.), ок. Средаз. ун-т (1942), канд. физ.-мат. н. (1950), д-р физ.-мат. н. (1966), в 1946—1951 работала во Львов. отд. Ин-та мат. АН УССР, 1951—1958 — в Ин-те мат. АН УССР, с 1958 работает в Ин-те кибернетики АН УССР (теория вероятностей, электронные вычислительные машины, программирование).
- ЯАКСОН** Херман Янович (25.I 1891, Вильяндиск. р-н, н. ЭССР — 28.VIII 1964), ок. Тартуск. ун-т (1913), д-р филос. (1925), проф. (1926), д-р физ.-мат. н. (1946), в 1919—1961 работал в Тартуск. ун-те (топология, математический анализ).
- ЯБЛОКОВ** Василий Андреевич (р. 12.VIII 1892, Казань), ок. Казан. ун-т (1916), проф. (1931), засл. д. н. ТАССР (1954), с 1926 работает в Казан. ун-те (дифференциальные уравнения в частных производных, дифференциальная геометрия).
- ЯБЛОНСКИЙ** Сергей Всеволодович (р. 6.XII 1924, Москва), ок. Моск. ун-т (1950), асп. там же (1953), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1962), проф. (1964), чл.-корр. АН СССР (1968), лауреат Ленинск. премии (1966), с 1953 работает в Ин-те прикл. мат. АН СССР (математическая логика, электронные вычислительные машины).
- ЯГЛОМ** Акива Моисеевич (р. 6.III 1921, Харьков), ок. Свердловск. ун-т (1942), Моск. ун-т (1944), асп. Мат. ин-та АН СССР (1946), д-р физ.-мат. н. (1957), проф. (1964), с 1946 работает в Ин-те физ. атмосферы АН СССР, с 1963 (и в 1948, 1949,

- 1959, 1960) — также в Моск. ун-те (функциональный анализ, теория вероятностей, теория информации, прикладная математика, гидродинамика).
- ЯГЛОМ** Исаак Моисеевич (р. 6.III 1921, Харьков), ок. Свердловск. ун-т (1942), асп. Моск. ун-та (1945), канд. физ.-мат. н. (1945), д-р физ.-мат. н. (1966), проф. (1967), в 1943—1949 работал в Моск. ун-те, с 1957 работает в Моск. пед. ин-те (алгебра, геометрия).
- ЯКОВЛЕВ** Константин Павлович (р. 30.VII 1885, Москва), ок. Моск. ун-т (1908), д-р физ.-мат. н. (1935), проф. (1935), с 1910 работает в Моск. ун-те (прикладная математика, физика).
- ЯКУБОВИЧ** Владимир Андреевич (р. 21.X 1926, Новосибирск), ок. Моск. ун-т (1949), канд. физ.-мат. н. (1953), д-р физ.-мат. н. (1959), проф. (1964), в 1949—1952 работал в НИИ мат. и мех. Ленингр. ун-та, 1952—1956 — в Ленингр. горн. ин-те, с 1956 работает в Ленингр. ун-те (дифференциальные уравнения, теория автоматического регулирования, кибернетика).
- ЯНЕНКО** Николай Николаевич (р. 22.V 1921, г. Каинск, н. г. Куйбышев Новосиб. обл.), ок. Томск. ун-т (1942), асп. Моск. ун-та (1949), канд. физ.-мат. н. (1949), д-р физ.-мат. н. (1954), проф. (1960), чл.-корр. АН СССР (1966), в 1953—1955 работал в Мат. ин-те АН СССР, с 1963 работает в ВЦ СО АН СССР, с 1964 — также в Новосиб. ун-те (геометрия, дифференциальные уравнения в частных производных, математическая физика, газовая динамика).
- ЯНОВСКАЯ** Софья Александровна (31.I 1896, г. Пружаны, н. Брест. обл. — 24.X 1966), ок. Ин-т красной профессуры (1929), проф. (1931), д-р физ.-мат. н. (1935), с 1921 работала в Моск. ун-те (основания математики, математическая логика, философия и история математики).
- ЯНЧЕВСКИЙ** Сергей Аркадьевич (22.IX 1900, Петербург — 28.XII 1941), ок. Петрогр. ун-т (1923), асп. там же, канд. физ.-мат. н. (1936), проф., в 1926—1931 работал в Ленингр. пед. ин-те, с 1931 — в Ленингр. ин-те ж.-д. трансп. (теория функций комплексного переменного).
- ЯСТРЕМСКИЙ** Борис Сергеевич (9.V 1877, Харьков — 28.XI 1962), уч. в Харьк. и Женев. ун-тах, проф. (1924), д-р экон. н. (1936), в 1921—1930 работал в Моск. ун-те, с 1918 — в Центр. стат. управ., с 1932 — также в Моск. экон.-стат. ин-те (математическая статистика).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ПОВРЕМЕННЫЕ ИЗДАНИЯ

Настоящий справочник является первой попыткой выделить из общего потока советской периодики и повременных изданий издания математического или преимущественно математического содержания. Основой для составления справочника послужили государственные регистрационные издания «Периодическая печать СССР», каталоги крупнейших библиотек, а также проспекты и издательские планы.

Для удобства читателей справочник разделен на две части: в первой дается список специальных математических изданий, во вторую включены издания общеметодологического и смешанного характера. Справочник ни в коей мере не претендует на полноту. Например, из большого количества вузовских изданий, таких, как «Труды ...», «Ученые записки...», «Вестник...» и им подобные, приводятся только те, которые имеют математические серии (и описываются они с года возникновения серии). Исключения сделаны для некоторых изданий, особенно важных для историка математики; они приводятся во второй части справочника. Названия изданий расположены в алфавитном порядке. Кроме основного названия указываются издающая организация, место, годы, периодичность (непериодичность специально не оговаривается), язык издания и наиболее существенные изменения в его названии. Основное название дается полностью, подзаголовочные и надзаголовочные данные, названия серий и другие сведения — сокращенно. Для экономии места кроме общепринятых введены дополнительные сокращения:

авиа. — авиационный
ассоц. — ассоциация
бюл. — бюллетень
вычисл. техн. — вычислительная техника
вестн. — вестник
вопр. — вопросы
восп. — воспитание
всесоюзн. — всесоюзный
ВУАН — Всеукраинская академия наук
ВЦ — вычислительный центр
вышш. — высший
вых. — выходит
геом. — геометрия
естеств. — естественный
естествозн. — естествознание
зап. — записки
иностран. — иностранный
интерн. — интернациональный
каф. — кафедра
Ком. акад. — Коммунистическая академия

лаб. — лаборатория
мед. — медицина
межвед. — межведомственный
мес. — месяц
мех. — механика, механический
м-во — министерство
наз. — называется
назв. — название
НИИ — Научно-исследовательский институт
нов. — новый
ном. — номер
осн. — основан
орг. — организация, организованный
пед. — педагогика, педагогический
попул. — популярный
природ. — природничий (на укр. яз.)
природозн. — природознание
просв. — просвещение
сообщ. — сообщения
ср. — средний

ст.— статьи
техн.— техника
точ.— точный
Тр.— труды
труд.— трудовая
уч.— учебный

фак.— факультет
физ.— физика
фил.— филиал
шк.— школа, школьный
электрон.— электроника
электротехн.— электротехнический

I

- Алгебра и логика. Семинар (АН СССР. Сиб. отд. Ин-т мат.). Новосибирск. Изд. с 1962. 1 том в год. 6 вып. в томе.
- Бюллетень Московского государственного университета. Математика. М. 1937—1941. Т. 1, 2. Т. 1—10 вып. Т. 2—6 вып. Две сер.: рус. и интерн. Интерн. сер. содержит ст. на фр., англ. и нем. яз.
- Бюллетень Первого Всесоюзного съезда математиков в Харькове. Харьков. 930. № 1, 2.
- Вестник Ленинградского университета. Серия математики, механики и астрономии. Л. Изд. с 1954. Ежекварт. В 1954—1956 наз. Сер. мат., физ. и хим.
- Вестник механики и прикладной математики. Изд. Ленингр. мех. о-ва. Л. 1929—1931. Т. 1, 2.
- Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. Научн. ж. М. Изд. с 1950. Двухмес. В 1950—1956 наз. Сер. физ.-мат. и естеств. наук. 1955 — 8 вып. В 1956—1959 наз. Сер. мат., мех., astron., физ., хим.
- Вісник Київського університету. Серія математики і механіки. К. Изд. с 1958. На укр. и рус. яз. 1 ном. в год. 2 вып. в ном. До № 2, вып. 2 наз. Сер. astron., мат. та мех.
- Вопросы вычислительной математики и техники. Сб. тр. ВЦ (АН УССР). К. 1954—1958. Вып. 1—3. В 1954, 1955 наз. Вопр. техн. быстродейств. счетн. машин.
- Вопросы вычислительной математики и техники (АН УзССР. Ин-т мех. и ВЦ). Ташкент. 1964—1966.
- Вопросы кибернетики и вычислительной математики (АН УзССР. Ин-т кибернетики и ВЦ). Ташкент. Изд. с 1966.
- Вопросы начертательной геометрии и ее приложения. Сб. научн. ст. (Харьк. автор. ин-т). Харьков. 1958—1961. Вып. 1, 2.
- Вопросы теории математических машин. М. 1958—1962. Сб. 1, 2.
- Вопросы элементарной и высшей математики (Львовск. гос. ун-т). Харьков. 1952. Вып. 1.
- Вычислительная и прикладная математика. Междвед. сб. К. Изд. с 1966. 2 вып. в год.
- Вычислительная математика (АН СССР. ВЦ). М. 1957—1961. Сб. 1—7.
- Геометричний збірник Тр. Сектора геом. Наук.-дослідн. ін-ту мат. і мех. і каф. геом. ХДУ. Харьков. 1938—1940. На укр. и рус. яз. См. Праці Сектора геометрії.
- Дискретный анализ. Сб. тр. (АН СССР. Сиб. отд. Ин-т мат.). Новосибирск. Изд. с 1963.
- Дифференциальные уравнения. Всесоюзн. ежемес. ж. Минск. Изд. с 1965.
- Доклады Академии наук СССР. Серия А. [Докл. физ.-мат. и естеств.-ист. характера]. М.—Л. 1922—1933. Новая серия [Отд. мат. и естеств. наук]. Изд. с 1933. С т. 69—6 ном. в томе. 1935—1947. Т. 3—56. На рус. и иностр. яз. С 1965 сер. наз. Математика. Физика.
- Доклады и сообщения. Серия физико-математических наук (Ужгородск. гос. ун-т). Ужгород. Изд. с 1957. В 1957, 1958 наз. Сер. физ.-мат. и хим. В 1962 № 5 наз. Сер. физ.-мат. и ист. наук. На укр. и рус. яз.
- Доповіді Академії наук УРСР. Серія А. Фізико-технічні і математичні науки. К. Изд. с 1967. Ежемес.
- Доповіді та повідомлення. Секція математики і фізики (Львівськ. держ. пед. ін-т). Львов. 1956, 1957. Вып. 1, 2.
- Журнал вычислительной математики и математической физики (АН СССР. ВЦ). М. Изд. с 1961. Двухмес.

- Журнал Института математики (ВУАН). К. 1931—1938. До 1934 наз. Ж. мат. циклу (ВУАН. Природн.-техн. відділ). 1931 — № 1—4. 1932 — № 1, 2. 1933 — Т. 1. Вып. 1—3. 1934 — Т. 1. Вып. 4. № 1, 2. 1935 — № 3/4, 1, 2. 1936 — № 3/4, 1—4. 1937 — № 1—4. 1938 — № 1.
- Журнал Ленинградского физико-математического общества. Осн. акад. В. А. Стекловым. Л. 1926—1929. Т. 1, 2. На рус., англ., нем. и фр. яз. 2 вып. в томе.
- Журнал математического цикла.— См. Журнал Института математики (ВУАН).
- Журнал физико-математического общества при Донецком горном институте. Сталино. 1929. Т. 1. Вып. 1.
- Журнал физико-математического общества при Пермском государственном университете. Пермь. 1929, 1930. Т. 3—5.
- Журнал чистого и прикладного знания. Отдел физико-математических и технических наук. Орган научн. мысли в обл. мат., техн., природовед., мед. и с. х. Одесса. 1922. Т. 1. Вып. 2.
- Записки кафедры математической физики (Ин-т строит. мех. АН УССР). К. 1937—1939. Т. 1—4.
- Записки математического кабинета Крымского университета. Симферополь. 1919—1921. Вып. 1—3.
- Записки Научно-исследовательского института математики и механики и Харьковского математического общества. Сер. 3, 4. Сер. 3. 1924—1928 — см. Наукові записки науково-дослідних математичних кафедр України. Сер. 4. Харьков. 1927—1940. Т. 1—27. На укр., рус., нем. и фр. яз. В 1927—1928 т. 1, 2 наз. Сообщ. Харьк. мат. о-ва. В 1929—1932 т. 3—5 наз. Зап. Харк. мат. т-ва та Укр. ін-ту мат. наук. В 1933 т. 6, 7 наз. Зап. Харк. мат. т-ва та Укр. наук.-дослід. ін-ту мат. і мех. В 1934—1936 т. 8—13 наз. Зап. Харк. мат. т-ва та Укр. ін-ту мат. й мех. при Харк. держ. ун-ті. 1940. Т. 16—18 на рус. яз. Ст. 19 — см. Ученые записки Харьковского университета.
- Записки фізично-математичного відділу (ВУАН). К. 1923—1931. Т. 1—5.
- Збірник праць з обчислювальної математики і техніки (АН УССР. ВЦ). К. 1961. Т. 1—3. На укр. яз. Резюме на рус. яз.
- Збірник праць Інституту математики (АН УРСР). К. 1938—1949. № 1—12. № 12 на рус. яз., наз. Сб. тр. Ін-та мат.
- Зборник прац Фізика-математичнага інстытута. Минск. 1934—1937. Вып. 1—3. На белорус. и рус. яз. В 1937 вып. 3 наз. Тр. Физ.-техн. ин-та.
- Известия Академии наук АзССР. Серия физико-математических и технических наук. Баку. Изд. с 1958. Двухмес. На азерб. и рус. яз. В 1959 № 1, 2 наз. Сер. физ.-техн. и хим. наук. В 1945 № 6 наз. Изв. Азерб. фил. АН СССР.
- Известия Академии наук АрмССР. Математика. Ереван. Изд. с 1943. Двухмес. На арм. и рус. яз. В 1943—1956 наз. Физ.-мат., естеств. и техн. науки. В 1957—1965 наз. Сер. физ.-мат. наук.
- Известия Академии наук БССР. Отделение естественных наук. Серия физико-математических наук. Минск. Изд. с 1956. Ежекварт. На рус. и белорус. яз.
- Известия Академии наук КазССР. Серия физико-математических наук. Алма-Ата. Изд. с 1947. 3 ном. в год. Резюме на англ. яз. В 1947—1962 наз. Сер. мат. и мех. 1 вып. в год.
- Известия Академии наук ЛатвССР. Серия физико-технических наук. Рига. Изд. с 1964. Двухмес.
- Известия Академии наук СССР. Отделение физико-математических наук. М.— Л. 1928—1930. 10 ном. в год. Отделение математических и естественных наук. 1931—1935. 10 ном. в год. Серия математическая. Изд. с 1937. 1937 — Т. 1. № 1—4. С 1938 — двухмес.
- Известия Академии наук УзССР. Серия физико-математических наук. Ташкент. Изд. с 1957. Двухмес. Резюме на узб. яз.
- Известия Академии наук ЭССР. Физика. Математика. Таллин. Изд. с 1956. Ежекварт. На эст. и рус. яз. В 1956—1966 наз. Сер. физ.-мат. и техн. наук.
- Известия Ассоциации научно-исследовательских институтов при физико-математическом факультете МГУ. М. 1928—1930. Т. 1—3. 1928—1929. Т. 1. Вып. 1—4. Т. 2. Вып. 1, 2. Сер. Б. Отд. физ.-мат. наук. Изд. с 1930. Т. 3. Вып. 1/2.
- Известия высших учебных заведений. Математика (МВССО СССР). Казань. Изд. с

1957. Ежекварт. С 1959 в Изв. вкл. сер. Физ.-мат. науки ж. Научн. докл. выпш. шк.
- Известия Казанского физико-математического общества при Казанском государственном университете им. В. И. Ульянова-Ленина.** Казань. 1923—1949. Вторая сер. 1923—1925 (вых. с 1891). Т. 23—25. Третья сер. 1926—1949. Т. 1—14 (т. 14 является одновременно кн. 4 т. 109 Уч. зап. Казанск. ун-та). В 1926—1933 т. 1—6 наз. Изв. Физ.-мат. о-ва при Казанск. ун-те. В 1936—1938 т. 8—11 наз. Изв. Физ.-мат. о-ва и НИИ мат. и мех. при Казанск. ун-те им. В. И. Ульянова-Ленина.
- Известия Казанского филиала Академии наук СССР. Серия физико-математических и технических наук.** Казань. 1948—1961.
- Известия Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина.** Отдел техники, естествознания и математики. М.—Л. 1918—1931 (вых. с 1904). Т. 27—33. В 1918, 1919 наз. Изв. Первого Петрогр. политехн. ин-та.
- Известия научно-исследовательского института математики и механики при Томском государственном университете им. В. В. Куйбышева.** Томск. 1935—1946. 1935—1937 — Т. 1. Вып. 1—3. 1938 — Т. 2. Вып. 1, 2. На рус., англ., нем. и фр. яз.
- Известия Физико-математического института им. В. А. Стеклова.** Л. 1924—1930. Т. 1—3. В 1924 т. 1, вып. 2 наз. Изв. Физ.-мат. ин-та Рос. акад. наук.
- Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии (АН КиргССР. Ин-т физ. и мат.).** Фрунзе. Изд. с 1961. Резюме на кирг. яз.
- Историко-математические исследования.** М.—Л. Изд. с 1948. До 1963 1 вып. в год.
- Историко-математичний збірник (АН УРСР. Ін-т мат.).** К. 1959—1963. Сб. 1—4. На укр. яз.
- История и методология естественных наук. Математика.** [МГУ]. М. 1966. Вып. 5.
- Литовский математический сборник (АН ЛитССР. Высш. учеб. заведения ЛитССР).** Вильнюс. Изд. с 1961. Ежекварт. 1 том в год. Резюме на лит. и англ. яз.
- Математика.** Сер. Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит. М. Изд. с 1957. Ежекварт. С 1958 двухмес.
- Математика.** Сб. метод. ст. (Гос. комитет выпш. и ср. спец. образ. Совета Мин. ЭССР. Научн.-метод. кабинет). Таллин. Изд. с 1963. На эст. яз.
- Математика в школе.** Изд. Отд. по реформе шк. при Комиссариате нар. просв. М. 1918. Т. 1. № 1—4.
- Математика в школе.** Сб., посв. вопр. препод. мат. в труд. шк. 2-й ступени (Научн. метод. Совет Ленингр. ГОНО. Мат. комиссия). М.—Л. 1924—1926. Сб. 1—6.
- Математика в школе.** Метод. ж. (М-во просв. РСФСР). М. Изд. с 1934. 1934 — № 1—4. 1935—1940 — 6 ном. в год. В 1934, 1935 наз. Мат. и физ. в ср. шк. В 1936 — Мат. и физ. в шк. 1941 — № 1—4. В 1942—1945 не выходил. С 1946 — 6 ном. в год.
- Математика в школе.** Сб. научн.-метод. ст. (Наркомпрос УзССР). Ташкент. 1940. № 1. На узб. яз.
- Математика в школе.** Сб. Изд. НИИ пед. ГрССР. Тбилиси. 1948—1951. Сб. 1—4. На груз. яз.
- Математика и современность.** Вспомогательные материалы для преподающих и изучающих математику (Тартуск. гос. ун-т). Тарту. Изд. с 1963. На эст. яз.
- Математическая физика.** Республ. межвед. сб. К. Изд. с 1964. Вып. 1, 2 наз. Вопросы математической физики и теории функций.
- Математические заметки.** Ж. Отд. мат. АН СССР. М. Изд. с 1967. 2 тома в год. 6 ном. в томе.
- Математические исследования.** Сб. ст. (АН МССР. Ин-т мат. и ВЦ). Кишинев. Изд. с 1966. 1 том. в год. 4 вып. в томе. Т. 1. Вып. 1, 2.
- Математические науки пролетарским кадрам.** Сб. по вопр. элемент. и выпш. мат. (Секция мат. Ком. акад.). М.—Л. 1931. Т. 1.
- Математический сборник.** Нов. сер. М. Изд. с 1922 (вых. с 1866) [АН СССР, Моск., Ленингр. и Казанск. мат. общества]. До 1955 двухмес. С 1955 ежемес. Указат. ст. за 1936—1938 гг. М. 1939.
- Математическое моделирование и теория электрических цепей.** Тр. Сем. по методам мат. моделирования и теории электр. цепей (АН УССР. Ин-т кибернетики). К.

- Изд. с 1963. 1 вып. в год. Вып. 1, 2, 4 наз. Математическое моделирование и электрические цепи.
- Математическое образование. Ж. Моск. научн.-пед. мат. кружка. М. 1928—1930. 8 ном. в год.
- Математическое просвещение. Мат., ее препод., приложения и ист. М. Изд. с 1957. 1 вып. в год.
- Математическое просвещение. Сб. ст. по элемент. и началам высш. мат. Л.—М. 1934—1938. Вып. 1—13.
- Наукові записки. Збірник робіт механік.-математичного факультету (Дніпропетр. держ. ун-т). Дніпропетровск. Изд. с 1938. На укр. и рус. яз. В 1938—1941 наз. Зб. робіт фіз.-мат. фак. Дніпропетр. держ. ун-ту.
- Наукові записки. Фізико-математична серія (Запорізьк. держ. пед. ін-т). Запоріжжє. Изд. с 1956.
- Наукові записки. Фізико-математична серія (Київськ. держ. пед. ін-т). К. Изд. с 1941. На укр. и рус. яз.
- Наукові записки. Математичний збірник (Київськ. держ. ун-т). К. 1936—1959. На укр. и рус. яз. В 1937 № 3, 1939 № 4 наз. Фіз.-мат. зб. В 1941 т. 5 наз. Мех.-мат. фак. В 1950—1956 наз. Зб. мех.-мат. фак.
- Наукові записки. Фізико-математична серія (Луцьк. держ. пед. ін-т). Луцьк. Изд. с 1953.
- Наукові записки. Серія фізико-математична (Львівськ. держ. ун-т). Львов. 1947—1953. На укр. и рус. яз. 1947 — Т. 5. Вып. 1, 2. 1949 — Т. 12, 15. Вып. 3, 4. 1953 — Т. 22. Вып. 5. Серія механіко-математична. 1954—1962. 1954 — Т. 26. Вып. 1 (6). 1956 — Т. 28. Вып. 7. 1958 — Т. 44. Вып. 8. В 1962 вып. 9 наз. Питання мех. і мат.
- Наукові записки. Серія фізико-математична (Львівськ. політехн. ін-т). Львов. Изд. с 1955. На укр. и рус. яз.
- Наукові записки. Фізико-математична серія (Наук.-дослідн. ін-т пед.). К. Изд. с 1958.
- Наукові записки кафедри математики, фізики і природознавства (Одеськ. держ. пед. ін-т). Одеса. Изд. с 1939. На укр. и рус. яз. До 1961 без назв.
- Наукові записки. Фізико-математична серія (Станіславськ. держ. пед. ін-т). Станіслав. 1955—1959. Вып. 1, 2.
- Наукові записки. Серія фізико-математична (Сумськ. держ. пед. ін-т). Суми. 1956. Вып. 1.
- Наукові записки. Серія фізико-математичних наук (Черкаськ. держ. пед. ін-т). Черкаси. Изд. с 1954.
- Наукові записки науково-дослідних математичних кафедр України. Серія 3 (Упр. научн. учреждениями Украины). Харьков. 1924—1928. Т. 1—3. На рус. и укр. яз. В 1924 вып. 1 наз. Уч. зап. (Научн. комитет Наркомпроса УССР). Отд. мат.
- Научные доклады высшей школы. Физико-математические науки (МВССО СССР). М. 1958, 1959. Двухмес. После 1959 № 3 см. Известия высших учебных заведений. Математика.
- Научные известия (Смоленск. гос. ун-т и Зап. обл. научн.-исслед. ин-т). Смоленск. 1923—1930. Т. 1—7. 1923. Т. 1. Вып. 1, 2. 1926—1929. Т. 3—5. 3 вып. в томе. 1928, 1930. Т. 6. Вып. 1, 2. В 1929, 1930 вып. 1, 2. наз. Физ. и мат.
- Научные труды (Ереванск. гос. ун-т). — См. Сборник научных трудов (Ереванск. гос. ун-т).
- Научные труды. Серія фізико-математическая (Индустр.-пед. ин-т им. К. Либкнехта). М. 1928—1930. Вып. 1—9.
- Научные труды. Новая серія. Математические науки (Ташкентск. гос. ун-т). Ташкент. Изд. с 1945. В 1945 кн. 1 наз. Физ.-мат. науки. 1 кн. в год.
- Номографический сборник (АН СССР. ВЦ). М. Изд. с 1962.
- Общие вопросы программирования (АН СССР. ВЦ). М. Изд. с 1964.
- Праці Одеського державного університету ім. І. І. Мечникова. Серія математична. Одеса. Изд. с 1935. На рус. и укр. яз. В 1950 т. 4 наз. Сб. мат. отд. фіз.-мат. фак.
- Праці Сектора геометрії Науково-дослідного Інституту математики й механіки і кафедри геометрії ХДУ. Харьков. 1938—1940. На укр. и рус. яз. В 1940 [вып.] 2 наз. Тр. Сектора. — См. Геометричний збірник.

- Приближенные методы решения дифференциальных уравнений (АН УССР. Ин-т мат.). К. 1963, 1964. Вып. 1, 2.
- Прикладная математика и механика (АН СССР. Отд. техн. наук. Ин-т мех.). М. Изд. с 1933. Двухмес. 1933—1936. Т. 1—3. 2 вып. в томе. Новая серия. 1937—1949. 1937—1939 — Т. 1—3. 4 вып. в томе. 1940 — Т. 4. Вып. 1—6. 1941 — Т. 5. Вып. 1—3. С 1942, т. 6—6 вып. в томе. Т. 4, 5 наз. Ж. прикл. мат. и мех.
- Применение математики в экономике (Ленингр. гос. ун-т. Каф. и лаб. экон.-мат. методов). Л. Изд. с 1963.
- Природа и математика. Тр. Секции точ. наук (О-во естествоисп. при АН ЭССР). Тарту. Изд. с 1959. На эст. яз.
- Реферативный журнал. Математика. М. Изд. с 1953. Ежемес.
- Сборник научных трудов. Физико-математическая серия (Ереванск. гос. ун-т). Ереван. Изд. с 1934. На арм. и рус. яз.
- Сборник работ Вычислительного центра МГУ. М. Изд. с 1962.
- Сборник работ Математического раздела (Ком. акад. Секция естеств. и точ. наук). М. 1927. Т. 1. [Вышел в 1929].
- Сборник статей кафедры математики и физики (Адыгейск. гос. пед. ин-т). Майкоп. 1962. Вып. 1.
- Сибирский математический журнал. М. Изд. с 1960. Двухмес.
- Сообщения Института математики и механики. [АН Арм ССР]. Ереван. Изд. с 1947.
- Сообщения по вычислительной математике (АН СССР. ВЦ). М. Изд. с 1962.
- Теоретична і прикладна математика (Львівськ. ун-т, політехн. ін-т). Львов. Изд. с 1958.
- Теоретическая и математическая физика (АН СССР). Ж. осн. в 1969. М. 12 ном. в год. 1 том в год.
- Теория вероятностей и ее применения. [АН СССР]. М. Изд. с 1956. Ежекварт.
- Труды (Отд. физ. и мат. АН ТаджССР). Душанбе. 1963. Вып. 1. Резюме на тадж. яз.
- Труды Азербайджанского государственного университета им. С. М. Кирова. Серия физико-математическая. Баку. Изд. с 1939. На азерб. и рус. яз.
- Труды Академии наук Узбекской ССР. Серия 4. Математика. Ташкент. 1941—1943 В 1941—1943 вып. 1—4 наз. Тр. Узбекск. фил. АН СССР.
- Труды Академии наук Литовской ССР. Серия Б. (Физ.-мат., хим., геолог. и техн. науки). Вильнюс. Изд. с 1955. На лит. и рус. яз. 1955—1957 — 3 ном. в год.
- Труды Вычислительного центра (АН АзССР). Баку. Изд. с 1962.
- Труды Вычислительного центра Академии наук Армянской ССР и Ереванского государственного университета. Ереван. Изд. с 1963. Резюме на арм. яз.
- Труды Вычислительного центра (АН ГрССР). Тбилиси. Изд. с 1960. На груз. и рус. яз.
- Труды Вычислительного центра (Тартуск. гос. ун-т). Тарту. Изд. с 1961. Вып. 1 наз. Бюл. ВЦ. В 1961—1965 — 1 вып. в год.
- Труды Геометрического кружка (Научн.-исслед. ин-т мат. и мех. при Первом Моск. гос. ун-те). М. 1930. Вып. 1.
- Труды Государственного университета Армянской ССР. Физико-математические науки. Ереван. 1934—1936. На арм. и рус. яз. В 1934 т. 1 наз. Тр. Гос. ун-та.
- Труды Дальневосточного государственного университета. Серия 7. [Мат., физ., хим.]. Владивосток. 1926—1929. № 1—13. Серия 15. [Мат.]. 1927—1930. № 1—6 (№ 6 (1930) — К у з ь м и ч Ф. И. Рационализация...; № 6 (1930) — Сб., посвящ. памяти проф. Н. А. Агрономова; № 6 (1930) — Т у р а н с к и й В. И. и А н д р о н о в П. П. Покрытия звезд...).
- Труды Донецкого ордена Трудового Красного Знамени политехнического института. Серия физико-математическая. Донецк. 1962. Вып. 1.
- Труды Института математики и механики (АН АзССР). Баку. Изд. с 1961. На азерб. и рус. яз. Резюме на рус. яз. — См. Труды Института физики и математики.
- Труды Института математики им. В. Н. Романовского. Ташкент. Изд. с 1946. В 1957 вып. 21 наз. Тр. Ин-та мат. и мех.
- Труды Института физики и математики [АН АзССР]. Баку. 1940—1960. В 1940—1943 т. 1, 2 на рус. яз. наз. Тр. Сектора физ. Сер. мат. 1948 — Т. 3. 1952 — Т. 4/5. — См. Труды Института математики и механики (АН АзССР).
- Труды Института физики и математики (АН БССР). Минск. 1956—1959. Вып. 1—3.
- Труды Института физики и математики (АН ЛатвССР). Рига. 1950. Вып. 1, 2.

- Труды Иркутского государственного университета им. А. А. Жданова. Серия физико-математическая. Иркутск. Изд. с 1953.
- Труды Комиссии по математическому образованию (Всеукр. ассоц. инж. Днепрпетр. отд.). Сб. докл. Днепрпетровск. 1926. Вып. 1.
- Труды Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина. Раздел физико-математических наук. М.—Л. 1936—1939. 1936— Вып. 1—3. № 6, 9, 10. 1937 — Вып. 1—4. № 4, 6, 7. 1938 — Вып. 1. № 5. 1939 — Вып. 1. № 3. В 1936—1939 наз. Тр. Ленингр. индустр. ин-та.
- Труды Математического института им. В. А. Стеклова. М.—Л. Изд. с 1931. 1931—1932. Т. 1, 6—8 на фр. яз. Т. 2. Вып. 1—текст на англ. яз., назв. на рус. и фр. яз. Т. 2. Вып. 3. Т. 3—текст. на нем. яз., назв. на рус. и фр. яз. В 1931—1936 т. 1—8 наз. Тр. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова.
- Труды Математического семинария при Пермском государственном университете. Пермь. 1927, 1928. Вып. 1, 2.
- Труды механико-математического факультета (Казахск. гос. ун-т). Алма-Ата. 1960. Т. 1, 2.
- Труды Московского математического общества. М.—Л. Изд. с 1952. 1 том в год.
- Труды Московского научно-методического семинара по начертательной геометрии и инженерной графике (МВССО СССР. Уч.-метод. упр. по вузам). М. Изд. с 1958.
- Труды Научно-исследовательского института математики и механики при Томском государственном университете. 1940. Т. 1.
- Труды Научно-исследовательского института математики и физики. Баку. 1949. Т. 1.
- Труды Научно-исследовательского института механики и математики. Тбилиси. 1934. Кн. 1. На груз. яз.
- Труды Научно-исследовательского физико-математического института (Ростов. гос. ун-т). Ростов н/Д. Изд. с 1937. В 1937—1940 т. 1, 3, 4 наз. Уч. зап. НИИ мат. и физ., 1938 т. 2 — Сб. уч. зап. НИИ мат. и физ. Ненум. вып. 1947 является одновременно т. 9 Уч. зап. Ростов. ун-та. Сер. физ.-мат. Вып. 5.
- Труды Научного объединения физико-математических факультетов вузов Дальнего Востока (Хабар. гос. пед. ин-т). Хабаровск. Изд. с 1962. В 1962 т. 1, 2 наз. Тр. научн. объединения преп. физ.-мат. фак. пед. ин-тов Дальнего Востока.
- Труды Северо-Кавказской ассоциации научно-исследовательских институтов (Научн.-исслед. ин-т мат. и естествозн. при Сев.-Кавказск. гос. ун-те). Ростов н/Д. 1926—1930. Вып. 1—18. 1 ненум. вып. Вып. 2 (1926) — М о р д у х а й - Б о л т о в с к о й Д. О задаче Шварца, относящейся к абелевым интегралам. Вып. 2 (1926) — Л е б е д е в П. И. Петрографический очерк... Вып. 7 — 1928 и 1929.
- Труды Сектора математики (АН АзССР). Баку. 1946. Т. 1, 2.
- Труды Сектора математики (Комитет науки УзССР). Ташкент. 1939. Вып. 1.
- Труды Сектора математики и механики (АН КазССР). Алма-Ата. Изд. с 1958.
- Труды Семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике (Моск. гос. ун-т). М.—Л. Изд. с 1933.
- Труды Семинара по математической физике и нелинейным колебаниям (Ин-т мат. АН УССР). К. Изд. с 1963.
- Труды Семинара по обратным краевым задачам (Казанск. гос. ун-т). Казань. Изд. с 1964. 1 вып. в год.
- Труды Семинара по прикладной математике (Ин-т мат. АН УССР). К. Изд. с 1963.
- Труды Семинара по теории вероятностей и математической статистике (НИИ мат. и мех. при Первом Моск. гос. ун-те). М. 1930. Вып. 1.
- Труды Семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (Ун-т дружбы народов им. Патриса Лумумбы). М. Изд. с 1962.
- Труды Семинара по функциональному анализу (Воронежск. гос. ун-т). Воронеж. Изд. с 1956.
- Труды Средне-Азиатского государственного университета. Серия 5 а. Математика. Ташкент. 1929—1941. Вып. 1—33. Серия физико-математические науки. Изд. с 1945.
- Труды Ставропольского сельскохозяйственного института. Математические науки. Ставрополь. 1921. Т. 6. № 1.

- Труды Ташкентского государственного университета им. В. И. Ленина. Новая серия. Физико-математические науки. Ташкент. Изд. с 1945. На узб. и рус. яз. Кн. 7, 8, 10, 14 наз. Мат. науки.
- Труды Тбилисского государственного университета. Серия математических наук. Тбилиси. Изд. с 1959. На груз. и рус. яз.
- Труды Тбилисского математического института им. А. И. Размадзе. Тбилиси. Изд. с 1937. 1 том в год. На груз. и рус. яз. Указ. к т. 1—10 в т. 10 (1941).
- Труды Узбекского государственного университета им. Алишера Навои. Новая серия. Физика и математика. Самарканд. 1940, 1941. Вып. 1, 2. На узб. и рус. яз.
- Труды Университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы. Математика. М. Изд. с 1965.
- Труды Университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы. Начертательная геометрия. М. Изд. с 1963.
- Труды фізико-математичного відділу (ВУАН). К. 1923—1930. Т. 1—15. 1923 — Т. 1. Вып. 1, 2. 1924 — Т. 1. Вып. 3. 1925 — Т. 1. Вып. 4—8. 1926 — Т. 2. Вып. 2—5. Т. 3. Вып. 1—6. Т. 4. Вып. 1—3. 1927 — Т. 3. Вып. 7. Т. 4. Вып. 4, 5. Т. 5. Вып. 3. Т. 6. Вып. 1. 1928 — Т. 6. Вып. 2, 3. Т. 7. Вып. 2—4. Т. 9. Вып. 1, 2. Т. 10. Вып. 1—3. Т. 11. Вып. 1. 1929 — Т. 9. Вып. 3, 4. Т. 11. Вып. 2, 3. Т. 12. Вып. 1, 3. Т. 13. Вып. 1. Т. 14. Вып. 1. Т. 15. Вып. 1. 1930 — Т. 13. Вып. 2. Т. 14. Вып. 2, 3.
- Украинский математический журнал [Ин-т мат. АН УССР]. К. Изд. с 1949. Т. 1—16 — ежекварт. С т. 17—двухмес. 1 том в год.
- Успехи математических наук (АН СССР и Моск. мат. о-во). М. Изд. с 1936. Новая серия. Изд. с 1946. Двухмес. 1 том в год.
- Ученые записки. Серия физико-математических наук (Азерб. гос. ун-т им. С. М. Кирова). Баку. Изд. с 1958. Двухмес. На азерб. и рус. яз. До 1959 наз. Физ.-мат. и хим. сер.
- Ученые записки. Серия физико-математическая (Белорус. гос. ун-т им. В. И. Ленина). Минск. Изд. с 1939. В 1939 вып. 1 наз. Уч. зап. Белорус. гос. ун-та.
- Ученые записки. Математика. Физика (Вильнюсс. гос. пед. ин-т). Вильнюс. 1955—1960. Вып. 1—9. На лит. и рус. яз. До 1958 вып. 7 наз. Сер. мат., физ. и хим. наук.
- Ученые записки. Серия математических, физических и химических наук (Вильнюсс. гос. ун-т им. В. Капсукаса). Вильнюс. Изд. с 1949. Вып. 1, 2. наз. Сер. естеств.-мат. наук. В 1955—1958 вып. 3—8 наз. Мат., физ.
- Ученые записки. Серия физико-математическая (Гурьевск. гос. пед. ин-т). Гурьев. Изд. с 1958.
- Ученые записки. Серия физико-математическая (Дальневост. гос. ун-т). Владивосток. 1937. Т. 1.
- Ученые записки. Серия математическая (Душанбинск. гос. пед. ин-т им. Т. Г. Шевченко). Душанбе. Изд. с 1951. На тадж. и рус. яз. Вып. 1, 2 наз. Физ.-мат. фак. Вып. 3 — Сер. физ.-мат.
- Ученые записки. Серия физико-математическая (Ереванск. арм. гос. пед. ин-т им. Х. Абовяна). Ереван. Изд. с 1960. На арм. и рус. яз.
- Ученые записки. Математика (Казанск. гос. ун-т). Казань. Изд. с 1931. 1940 — Вып. 4. 1946 — Вып. 4.
- Ученые записки. Математика и физика (Казах. гос. ун-т). Алма-Ата. Изд. с 1938. На казах. и рус. яз. В 1957 вып. 5 наз. Мат., мех. и физ.
- Ученые записки. Серия физико-математическая (Коломенск. пед. ин-т). Коломна. Изд. с 1958.
- Ученые записки. Математика (Латв. гос. ун-т им. П. Стучки). Рига. Изд. с 1952. На рус. яз. Резюме на латв. яз. В 1949 вып. 4 наз. Физ.-мат. науки. В 1963 вып. 1 — Тр. ВЦ Латв. гос. ун-та.
- Ученые записки. Серия математических наук (Ленингр. гос. ун-т). Л. Изд. с 1936. Вып. 1, 3—5, 11, 18, 20 1936—1949 являются одновременно т. 6, 3, ненум. вып. т. 12—14 Тр. Астрон. обсерватории ЛГУ. 1943 — № 87. 1944 — № 87.
- Ученые записки Ленинградского государственного педагогического института. Физико-математический факультет. Л. 1955—1958. Вып. 1, 2.

- Ученые записки. Физико-математический факультет (Моск. гор. пед. ин-т им. В. П. Потемкина). М. 1940—1948. Вып. 1, 2. В 1940 вып. 1 наз. Тр. каф. мат. В 1940 т. 1 — Уч. зап. физ.-мат. фак. [Сер.]. Кафедра высшей алгебры, теории чисел и элементарной математики. 1958—1960. [Сер.]. Кафедра геометрии. 1940—1960.
- Ученые записки. Физико-математический факультет (Моск. гос. пед. ин-т им. В. И. Ленина). М. Изд. с 1936. 1936 — 1 нenum. вып. В 1938 вып. 1 наз. Тр. каф. физ. Вып. 2 — Тр. каф. мат. 1947 — 1 нenum. вып. 1936 — 2 нenum. вып. В 1938 вып. 1, 2 наз. Уч. зап. физ.-мат. фак. [Сер.]. Кафедра методики математики. Изд. с 1948. [Сер.]. Кафедра общей физики и геометрии. 1957. Вып. 3. [Сер.]. Математические кафедры. 1953—1957. Вып. 1, 2.
- Ученые записки Московского государственного педагогического института им. К. Либкнехта. Серия физико-математическая. М. 1937—1940. Вып. 1—3.
- Ученые записки. Математика (Моск. гос. ун-т). М. Изд. с 1940 (вых. с 1880).
- Ученые записки. Труды кафедр физико-математического факультета (Моск. обл. пед. ин-т им. Н. К. Крупской). М. 1950—1957. Вып. 3—5 наз. Тр. каф. мат. Вып. 7 — Мат. Новая серия. Труды кафедры методики преподавания математики. Изд. с 1958. В 1963 вып. 3 наз. Высш. алг., элемент. мат., метод. мат.
- Ученые записки. Серия математики (Мурманск. гос. пед. ин-т). Мурманск. Изд. с 1958.
- Ученые записки. Физико-математический факультет (Новгор. гос. пед. ин-т). Новгород. Изд. с 1960.
- Ученые записки. Факультет физико-математический (Орехово-Зуевск. пед. ин-т). М. Изд. с 1955. Вып. 1 наз. Фак. физ.-мат. и естествозн.
- Ученые записки. Математика и механика (Пензенск. политехн. ин-т). Пенза. Изд. с 1963.
- Ученые записки. Физико-математический факультет (Ростов. гос. пед. и учит. ин-т). Ростов н/Д. Изд. с 1949. Вып. 1, 2 наз. Каф. мат. анализа и алг. и каф. геом. Вып. 3, 4 — Каф. мат. анализа и каф. геом.
- Ученые записки. Серия физико-математическая (Ростов. гос. ун-т). Ростов н/Д. Изд. с 1934. Вып. 5 1947 (Уч. зап. Т. 9) одновременно является нenum. вып. Тр. Научн.-исслед. физ.-мат. ин-та. [Сер.]. Труды физико-математического факультета. Изд. с 1951.
- Ученые записки. Серия Физико-математического института (Саратовск. гос. ун-т им. Н. Г. Чернышевского). Саратов. 1938. Вып. 1, 2.
- Ученые записки. Труды физико-математического факультета (Тадж. гос. ун-т им. В. И. Ленина). Душанбе. Изд. с 1955.
- Ученые записки Тартуского государственного университета. Труды по математике и механике. Тарту. Изд. с 1946. На эст. и рус. яз. В 1946—1948 № 1—5 наз. Мат. науки.
- Ученые записки. Кафедра математики (Тюменск. гос. пед. ин-т). Тюмень. Изд. с 1939. Вып. 1 наз. Материалы каф. мат.
- Ученые записки. Математический выпуск (Уральск. гос. ун-т. Уральск. мат. о-во). Свердловск. Изд. с 1956. В 1961 т. 3 наз. Мат. зап.
- Ученые записки физико-математического факультета (Киргиз. гос. ун-т). Фрунзе. Изд. с 1951. В 1953—1955 наз. Тр. физ.-мат. фак.
- Ученые записки. Физико-математическая серия (Хабаровск. гос. пед. ин-т). Хабаровск. Изд. с 1959.
- Ученые записки. Математическая серия (Харьк. гос. пед. ин-т физ. воспитания). Харьков. Изд. с 1956. На укр. и рус. яз.
- Ученые записки. Записки механико-математического факультета и Харьковского математического общества (Харьк. гос. ун-т им. А. М. Горького). Харьков. Изд. с 1935. До т. 22. вкл. наз. Зап. НИИ мат. и мех. и Харьк. мат. о-ва.
- Ученые записки. Физико-математический факультет (Челяб. гос. пед. ин-т). Челябинск. Изд. с 1958. В 1960 вып. 3 наз. Сб. ст. по мат. и метод. препод. мат. в ср. шк. В 1948 вып. 1 — Каф. общ. и теор. физ.
- Ученые записки. Серия физико-математических наук (Черновицк. гос. ун-т). Черновцы. Изд. с 1952. На укр. и рус. яз.
- Ученые записки. Серия физико-математическая (Чечено-Ингушск. гос. пед. ин-т). Грозный. Изд. с 1950. В 1962 вып. 6 наз. Физ.-мат. сер.

Ученые записки. Серия физико-математических и биологических наук (Чувашск. гос. пед. ин-т им. И. Я. Яковлева). Чебоксары. Изд. с 1964. Ненум. вып.

Ученые труды Вильнюсского государственного университета. Серия естествознания и математических наук.— См. Ученые записки (Вильнюсск. гос. ун-т).

Физико-математические науки в странах Востока (АН СССР. Ин-т ист. естествозн. и техн.). М. Изд. с 1960. До 1963 1 вып. в год. В 1960—1963 вып. 1—3 наз. Из ист. науки и техн. в странах Востока.

Физико-математический сборник. М. 1924. № 1.

Функциональный анализ и теория функций (Казанск. гос. ун-т). Казань. Изд. с 1963. Вых. в сер. Уч. зап.

Экономика и математические методы (АН СССР. Центр. эконом.-мат. ин-т). М. Изд. с 1965. Двухмес.

II

- Автоматика (АН УССР. Ин-т кибернетики, до 1965 — Ин-т электротехн.). К. Изд. с 1956. С 1961 двухмес.
- Автоматика и вычислительная техника (АН ЛатвССР. Ин-т электрон. и вычисл. техн.). Рига. Изд. с 1961.
- Бюллетень Средне-Азиатского государственного университета. Ташкент. 1923—1949. Вып. 1—30. В 1923, 1924 вып. 1—6 наз. Бюл. 1-го Ср.-Аз. гос. ун-та.
- В мастерской природы. Ж. естествозн. и техн. (Отд. единой шк. Наркомпроса). Л. 1919—1929. 1919—1921. № 1—9/10. 1922, 1923. № 1—7. 1924—1927 — 6 ном. в год. 1928, 1929 — 12 ном. в год.
- ВАРНИТСО — См. Фронт науки и техники.
- Вісник природознавства (Природн. секція Харк. наук. т-ва.). Харьков. 1927—1931. На укр. и рус. яз. 1927, 1928 — 6 ном. в год. 1929. № 1/2. 1931. № 1/2.
- Вісник природознавства Українського наукового товариства. К. 1921. Вып. 1.
- Высшая школа. Ежемес. ж. Всесоюзн. комитета по делам высш. шк. при СНК СССР. М. 1934—1938. В 1934—1936 № 5 наз. Высш. техн. шк.
- Вычислительная техника. Сб. ст. (Моск. инж.-физ. ин-т). М. Изд. с 1960.
- Вычислительная техника и вопросы кибернетики (Ленингр. гос. ун-т. Каф. вычисл. мат. и ВЦ). Л. Изд. с 1962. 1 вып. в год. Вып. 1 наз. Вычисл. техн. и вопросы программирования. В 1966, 1967 не вых.
- Вычислительные системы. Сб. тр. (АН СССР. Сб. отд. Ин-т мат.). Новосибирск. Изд. с 1962. В 1962—1965, 1967 — 5 вып. в год. В 1966, 1968 — 4 вып. в год.
- Естествознание в советской школе (Уч.-метод. сектор Наркомпроса). М.— Л. 1927—1932. 1927. Сб. 1, 2. 1928. № 1—5. 1929—1931 — 8 ном. в год. 1932. № 1—10. В 1927—1930 наз. Естествозн. в труд. шк. (в изд. участв. Глав. упр. соц. восп. и Ин-т методов шк. работы).
- Естествознание в школе. Ж. по вопр. естеств.-ист. образования. Л. 1918—1929. 1918—1920 — 8 ном. в год. 1921. № 1—5. 1922, 1923 — 8 ном. в год. 1924—1929 — 4 ном. в год. Указ. ст. 1918—1928 сост. Г. В. Артоболевский.
- Естествознание в школе. Научн.-попул. и метод. ж. (М-во просв. РСФСР). М. Изд. с 1946. Двухмес. 1946. № 1—5.
- Естествознание и марксизм. М. 1929, 1930.— См. За марксистско-ленинское естествозн.
- Журнал научно-исследовательских кафедр в Одессе. [Одес. губпрофобр.]. Одесса. 1923—1927. 1923 — Т. 1. № 1, 2. 1924 — Т. 1. № 3—10/11. 1925 — Т. 2. № 1. 1926 — Т. 2. № 2, 4. 1927 — Т. 3. № 1. С т. 2, № 2 наз. на укр. яз. Текст на рус. и укр. яз.
- За марксистско-ленинское естествознание. М. 1929—1932 (Секц. естеств. и точ. наук Ком. акад. и О-ва материалистов). 1929 — № 1—4. 1930 — № 1—3. 1931 — № 1—4. 1932 — № 1—6. В 1929, 1930 наз. Естествозн. и марксизм. Указ. лит. (1931, 1932) — 1932. № 5/6.
- За марксистсько-ленінське природознавство (Асоц. природозн. Ін-ту філос. та природозн. та марксо-ленінських природн. тов-в ВУАМЛІН). Харьков. 1932, 1933. 1932 — № 1 — 5/6. 1933 — № 1/2.

- Записки Київського інституту народної освіти. К. 1926—1930. Кн. 1—4.
- Записки Киевского общества естествоиспытателей. К. 1926—1929 (вых. с 1870). Т. 27. Вып. 1—4. 1927, 1928. Т. 27. Вып. 2, 3 назв. и текст на рус. и укр. яз.
- Записки Одеського наукового товариства природознавців. Одесса. 1927—1929 (вых. с 1872). Т. 43—45. На рус. и укр. яз. До 1927 наз. Зап. Новорос. о-ва естествоисп. при Одес. ун-те.
- Записки Природничо-технічного відділу (ВУАН). К. 1931. № 1—3.
- Записки Уральского общества любителей естествознания. Свердловск. 1917—1927 (вых. с 1873). Т. 37—40. 1917 — т. 37. Вып. 1/6. 1926, 1927 — Т. 40. Вып. 1, 2. Указ. к т. 1—40 (1871—1928). Свердловск. 1930. Сост. П. П. Макаров.
- Известия. Естественные науки (АН АрмССР). Ереван. 1943—1947. 1943 — № 1. 1944, 1945 — 6 ном. в год. 1946, 1947 — 10 ном. в год. На арм. и рус. яз.
- Известия АзГНИИ. Естественно-научное отделение (Азерб. гос. научн.-исслед. ин-т). Баку. 1930. Т. 1. Вып. 1, 2.
- Известия Азербайджанского гос. ун-та им. В. И. Ленина. Естествознание и медицина. Баку. 1921—1930. № 1—9. В 1921, 1922 наз. Изв. Бакинск. ун-та.
- Известия Иваново-Вознесенского политехнического института. Иваново-Вознесенск. 1919—1931. Т. 1—17. Указ. ст. к т. 1—10 — т. 10 (1927).
- Известия Крымского педагогического института. Симферополь. 1927—1936.
- Известия Нижегородского государственного университета. Н.-Новгород. 1926—1930. Вып. 1—4.
- Известия Общества естествоиспытателей при Тартуском государственном университете. Тарту. 1941. Т. 47. Вып. 1, 2. На эст. яз.
- Известия Северо-Кавказского государственного университета. Ростов н/Д. 1917—1931. (вых. с 1870). В 1917 1 нenum. вып. наз. Варшавск. универс. изв. В 1918, 1919 т. 1, 2. наз. Изв. Донск. ун-та. 1921. Кн. 1. В 1924, 1925 т. 4—7 наз. Изв. Донск. гос. ун-та.
- Известия Тифлисского университета. Тбилиси. 1919—1930. Т. 1—10. На груз. яз.
- Кибернетика (АН УССР. Отд. мат., мех. и кибернетики). К. Изд. с 1965. Двухмес.
- Нариси з історії природознавства і техніки. Республ. міжвід. зб. (АН УРСР. Сектор іст. природозн. і техн. Ін-ту іст. АН УРСР. До 1963 вып. 4 — Укр. відд. Рад. нац. об'єдн. іст. природозн. і техн.). К. Изд. с 1962. В 1964 нenum. вып. наз. З іст. вітчизн. природозн.
- Наука и ее работники (Комиссия по улучшению быта ученых в Петрограде). Птгр. 1920—1922. 1920, 1921. № 3, 5—6.
- Наука и просвещение. Ежемес. ж. Нар. ком. просв. Туркестан. республ. Ташкент. 1922. № 1, 2.
- Наука на Украине. Бюл. Укрнауки. Харьков. 1926, 1927. 1926 — 1 нenum. вып. 1927. № 1, 2/4.
- Наукові записки (Київськ. Наук.-дослідн. каф. ВУАН). К. 1923—1927. Т. 1—3. В 1927 т. 3 наз. Зб. праць каф. мех. технол.
- Научное слово. Ежемес. ж., посв. актуальным вопр. совр. науки. М.—Л. 1928—1931. С 1931 вх. в ж. Соц. реконстр. и наука.
- Научный работник. Ежемес. ж. (Центр. совет секции научн. работн. Союза работн. просв. СССР). М. 1925—1930. С 1930 вх. в ж. ВАРНИТСО.
- Под знаменем марксизма. Филос. обществ.-эконом. журн. М. 1922—1944. 1922—1932 — 12 ном. в год. 1933—1935 — 6 ном. в год. 1936—1940 — 12 ном. в год. 1941. № 1—10. 1942, 1943 — 12 ном. в год. 1944. № 1—5.
- Природа. Попул. естеств.-ист. ж. [АН СССР]. Л. Изд. с 1917 (вых. с 1912). 1917. № 1—12. 1918. № 1—6. 1919. № 4/6—10/12. 1921—1940 — 12 ном. в год. 1941, 1942 — 8 ном. в год. 1943—1945 — 6 ном. в год. С 1943 — 12 ном. в год.
- Ростовский на Дону научный вестник. Научн. и научн.-попул. ж. (Ростов студ. естеств.-мат. кружок при ДГУ). Ростов н/Д. 1923. № 2.
- Советская наука (АН СССР. Всесоюзн. Комитет по делам высш. шк. при СНК СССР. ЦК Союза работников высш. шк. и научн. учреждений и ВАРНИТСО). М. 1938—1941. Ежемес. До 1938 — см. Высшая школа и Фронт науки и техники.
- Социалистическая реконструкция и наука (Сектор научн.-исслед. работ и изобретательства НКТП СССР). М. 1931—1936. В 1931—1936 наз. СОРЕНА.
- Труды Института (Моск. физ.-техн.). М. Изд. с 1958.

- Труды Института истории естествознания. М.—Л. 1947—1952. Т. 1—3.— См.
Труды Института истории естествознания и техники.
- Труды Института истории естествознания и техники. М. 1954—1963. Т. 1—45.
- Труды Научно-исследовательского института при Воронежском государственном университете (Вопр. естествозн.). Воронеж. 1917—1930. № 1—4.
- Труды Природничо-технічного відділу (ВУАН). К. 1930—1933. 1930. № 2, 7. 1931. № 5, 9—14. 1932. № 8.
- Труды Туркестанского государственного университета. Ташкент. 1922, 1923. Вып. 1—6/8.
- Труды Туркестанского научного общества при Средне-Азиатском государственном университете. Ташкент. 1923—1925. Т. 1, 2. В 1923 т. 1 наз. Тр. Туркестан. научн. о-ва.
- Ученые записки. Отделение естествознания (Пермск. гос. ун-т им. А. М. Горького). Пермь. Изд. с 1929. В 1929—1931 наз. Уч. зап. Пермск. гос. ун-та.
- Физика, химия, математика, техника в советской школе. Метод. ж. Уч.-метод. сектора Наркомпроса. М. 1927—1932. 1927 — 1 сб. 1928. № 1—5. 1929. № 1—8. 1930. № 1—6. 1931. № 1—8. 1932. № 1—4. В 1927, 1928, 1930 № 3 наз. Физ., хим., мат., техн. в труд. шк. В 1928 № 1, 2 — Физ. и мат. в труд. шк. (Глав. упр. соц. восп. и Ин-т методов шк. работы РСФСР).
- Фронт науки и техники (ЦК Союза работн. высш. шк. и научн. учрежд. и ВАРНИТСО). М. 1928—1938. В 1928 наз. Бюл. ВАРНИТСО. В 1929—1931 № 3 — ВАРНИТСО.

- Абас-заде Абаскули Агабала оглы 553
 Абдулаев Т. Г. 129
 Абель 496, 508
 Абрамян А. Г. 473, 474
 Абрамов А. А. 65, 91, 92, 124, 125, 353, 504, 530
 Абрамов Б. М. 321
 Абрамов В. М. 260
 Абрамян Б. Л. 118, 259
 Абрашин В. Н. 110, 111, 114
 Абрикосов А. А. 163, 170, 518
 Абу-л-Вафа 477
 Авазашвили Д. З. 553
 Авдеев Н. Я. 553
 Авдеева Л. И. 529
 Аверьянов С. Ф. 309
 Агаев Г. Н. 545
 Аганбегян А. Г. 389
 Агеев М. И. 528
 Агеева З. Г. 137, 504
 Агню 19
 Агранович М. С. 553
 Агрономов Н. А. 553
 Адамар Ж. 113, 134
 Адамов А. А. 553
 Адамс 123, 126—129, 505, 514
 Адисон Дж. 406
 Адо И. Д. 553
 Адян С. И. 413, 414, 427, 431, 450, 532, 539, 553
 Азбелев Н. В. 553
 Азлецкий С. П. 553
 Айзенберг Н. Н. 532
 Айзерман М. А. 250, 382, 528, 553
 Аквис М. А. 554
 Аккерман 437, 438, 533, 535, 537
 Аксень М. Б. 142, 504
 Александров А. Д. 464, 498, 543, 554
 Александров А. Я. 259, 554
 Александров В. М. 260
 Александров И. А. 554
 Александров П. С. 335, 395, 399, 463, 464, 467, 468, 486, 532, 543, 554
 Александрова Н. В. 483, 496
 Александрян Р. А. 554
 Алексеев А. С. 554
 Алексеев В. Г. 44, 554
 Алексеева В. П. 548
 Алексидзе М. А. 87, 88, 504, 554
 Аленицын Ю. Е. 554
 Алексявичине А. К. 26
 Алиев А. Г. 474
 Алиев Р. М. 142
 Алимов Н. Г. 490
 Алихашкин Я. И. 109, 114
 Алмагамбетов Ж. А. 443, 532
 Алумяз Н. А. 253
 Альмухамедов М. И. 554
 Альпер С. Я. 554
 Альперт Я. Л. 157
 Амбарцумян Р. В. 56
 Амензаде Ю. А. 555
 Амербаев В. М. 149, 504
 Аминов М. Ш. 240
 Амстиславский В. И. 421, 446, 532
 Андерсон 203
 Андреев Б. А. 136
 Андреев В. Б. 80, 87—89, 91, 93, 103, 504, 513
 Андреев К. А. 469, 545, 555
 Андронов А. А. 59, 247—250, 267, 286, 333, 496, 515, 518—520, 543, 555
 Андронов И. К. 460, 461, 465, 468, 487, 555
 Андронов П. П. 633
 Андропова-Леонтович Е. А. (см. Леонтович Е. А.)
 Андрунакиевич В. А. 543, 555
 Анилович В. Я. 520
 Аносов Д. В. 555
 Антоновский М. Я. 555
 Антосевич Г. А. 275
 Антохин Ю. Т. 141, 504
 Антропова В. И. 466, 483, 495, 543
 Анучина Н. Н. 102, 504
 Аппель П. 321
 Аппельрот Г. Г. 241, 555
 Арешкин Г. Я. 555

Аржафых И. С. 237, 521, 543, 555
 Арифханова М. 555
 Аркин В. И. 51, 390, 528
 Арлюк Т. К. 142, 509
 Арнольд В. И. 152, 244, 289, 515, 516, 521, 555
 Арнольд И. В. 555
 Артоболовский Г. В. 637
 Артоболовский И. И. 213, 312—315, 318, 319, 321, 322, 463, 484, 521, 555
 Арсенин В. Я. 140, 397, 407, 532
 Артмеладзе Н. К. 67
 Арутюнян Н. Х. 114, 115, 213, 259, 261, 555
 Архангельский А. В. 556
 Архангельский Ю. А. 556
 Архимед 210, 215, 463, 467, 468, 489, 491, 544, 548
 Арцимович Л. А. 155, 520
 Ассур Л. В. 310—313, 521
 Афанасьева-Эренфест Т. А. 377
 Афендик Л. Г. 127
 Ахизер А. И. 154, 157, 163, 178, 516, 520
 Ахизер Н. И. 64, 463, 471, 484, 486, 543, 556
 Ахмедов К. Т. 556
 Ахмедов С. А. 474, 477
 Ахмес 462
 Ахунд-Заде М. Ю. 556

Баба Х. 171
 Бабенко К. И. 74, 91, 303, 556
 Бабенко Л. П. 358, 361, 528
 Бабич В. М. 556
 Баблюян А. А. 260
 Бабуков А. Г. 556
 Бавли Г. М. 19
 Баврин И. И. 556
 Багриновский К. А. 101, 504
 Багров Н. Б. 308
 Бадагадзе В. В. 86, 88, 504
 Бадалян Г. В. 556
 Базилевич И. Е. 556
 Бакельман И. Я. 556
 Баккал А. И. 464
 Баклан В. В. 42, 45
 Баклановская В. Ф. 99, 504
 Бакушинский А. Б. 140, 141, 504
 Балабух Л. И. 556
 Балдин А. М. 178
 Банах С. С. 530, 556
 Бану Муса 492
 Баранов Г. Г. 312, 313
 Баранов Н. Д. 62
 Барановская Л. С. 493
 Барбан М. Б. 543, 557
 Барбашин Е. А. 138, 521, 557
 Бардин Дж. 200—203
 Баренблатт Г. И. 308, 521, 557

Барздин Я. М. 386, 415, 417, 419, 423, 532
 Бари Н. К. 463, 467, 543, 545, 557
 Барлоу 58
 Бартельс М. 472, 486, 487
 Барьяхтар В. Г. 163, 516
 Баславский И. А. 115
 Басс Г. И. 111
 Баталова З. С. 333
 Батлер 200
 Бать М. И. 321
 Баумгарт К. К. 495
 Баутин Н. Н. 250, 557
 Бахвалов Н. С. 68, 88, 89, 92, 94, 95, 125, 128, 131, 144, 504, 505, 557
 Бахвалов С. В. 557
 Бахмутская Э. Я. 460, 469, 471, 472, 493, 495, 543
 Бахтин И. А. 336, 557
 Бахтиян Ф. А. 254, 557
 Башарин Г. П. 56
 Башмакова И. Г. 2, 464—467, 480—484, 489—492, 495, 497, 543, 544, 557
 Баяковский Ю. М. 362
 Бебиашвили Ш. Л. 557
 Бебутов М. В. 26
 Бегунков Г. С. 362
 Бездетный Б. П. 522
 Безикович Я. С. 127, 557
 Безносков П. А. 557
 Белаш И. М. 379
 Белецкий С. З. 171, 516
 Белецкий В. В. 244
 Белецкий М. И. 452
 Белинский П. П. 557
 Беллюстин В. 458
 Белозеров С. Е. 460, 468, 481, 486, 544
 Белоносов П. Д. 558
 Белоносов С. М. 256, 257, 558
 Белоусов В. Д. 558
 Белоцерковский О. М. 114, 505
 Белухина И. Г. 99
 Бельтюков Б. А. 134, 505
 Бельтрами 457
 Белый Б. Н. 469, 471, 487
 Белый Ю. А. 469, 471, 479, 544
 Беляев С. Т. 161, 163, 199, 201, 202
 Беляев Ю. К. 55, 56, 58, 500
 Белякин Н. В. 415, 419, 441, 532
 Бенетт 311
 Берг А. И. 269, 521
 Березанский Ю. М. 558
 Березин И. С. 558
 Березин Ф. А. 558
 Березкина Э. И. 465, 467, 492, 493
 Березовский А. А. 274
 Беренс 49, 50
 Берестецкий В. Б. 170, 178, 516
 Берлянд М. Е. 558
 Берман Д. Л. 558

- Берман С. Д. 558
 Бермант А. Ф. 558
 Бернайс 435, 436, 534
 Бернулли Д. 464, 480, 501
 Бернулли И. 495
 Бернулли Н. 480
 Бернулли Я. 7, 17, 21, 28, 46, 472, 485
 Бернштейн С. Н. 10, 11, 14, 16, 17, 20, 25—28, 30, 34, 35, 41, 46, 63, 64, 143, 463, 484, 485, 499, 505, 506, 543, 544, 558
 Бертран 377
 Бесов О. В. 558
 Беспалова А. В. 333
 Беспамятных Н. Д. 473, 486, 544
 Бессель 8, 263, 297
 Бессонов А. П. 321, 322, 521
 Бете 180
 Бетина Н. П. 469
 Биргер И. А. 248, 559
 Биркган А. Ю. 528
 Биркгоф 33
 Бирман М. Ш. 65, 119, 559
 Бирман С. Е. 559
 Бируни 474, 478
 Бирюков Б. В. 438, 465, 559
 Бицадзе А. В. 113, 301, 302, 559
 Благовещенский Ю. В. 146, 470, 505
 Благовещенский Ю. Н. 42
 Бланк Я. П. 239, 544, 559
 Блатт 200
 Блехман И. И. 247, 333
 Блох А. Ш. 383
 Блох В. И. 258
 Блох З. Ш. 314, 315, 327, 484, 521
 Блох Э. Л. 559
 Блох Ф. 160
 Блохинцев Д. И. 160, 161
 Блэквелл Д. 50
 Блюм 423
 Бобков В. В. 108, 110, 114, 132, 133, 505, 509
 Бобров А. А. 16
 Бобынин В. В. 456, 457, 460, 479, 544, 546
 Богарян О. К. 122
 Богданов Ю. С. 559
 Боголюбов А. Н. 2, 469—471, 476, 482, 521, 544, 559
 Боголюбов Н. Н. 2, 12, 26, 30, 34, 41, 42, 52, 59, 66, 96, 116, 152, 155, 161—164, 168—170, 173, 176, 178, 179, 181—190, 193—199, 201—208, 214, 220, 247, 265, 266, 268—276, 280, 281, 285, 286, 289, 290, 328, 329, 331, 332, 334, 335, 340, 341, 470, 501, 516—521, 524, 544, 559
 Боголюбов П. Н. 176
 Богомоллов С. А. 456, 458, 559
 Богоявленский А. А. 240
 Боднарчук В. Г. 382, 452
 Боднер Б. А. 241
 Боев Г. П. 469, 488, 544, 559
 Бозе 162, 167, 197—199, 207
 Бойаи Я. (Больяи) 463, 496
 Бокуть Л. А. 443
 Бокштейн М. Ф. 559
 Болгарский Б. В. 560
 Болотин В. В. 257, 262, 263
 Болтянский В. Г. 67, 526, 531, 560
 Болховитинов Е. 455
 Боль П. Г. 463, 472, 487, 548, 560
 Больцано Б. 496
 Больцман Л. 12, 163, 164, 195, 196
 Большев Л. Н. 12, 49, 51, 499, 560
 Бондаренко В. Н. 528
 Бондаренко П. С. 94, 128, 131, 505
 Бондарь Н. Г. 560
 Бонч-Бруевич В. Л. 163, 204, 517
 Бор Н. 151, 159
 Борович З. И. 560
 Борель Э. 14, 17, 394, 453
 Борисов Ю. П. 521
 Борисов Ю. Ф. 560
 Борисович Ю. Г. 342, 560
 Борквель А. А. 560
 Борковский Б. А. 381
 Боровков А. А. 23, 24, 41, 44, 56, 499, 560
 Бородачев Н. А. 318
 Бородачев Н. М. 260, 560
 Бородин В. А. 122
 Бородинский Ю. М. 385
 Борн 195
 Бочвар Д. А. 437, 440, 441, 533, 542, 560
 Бочевеф Ф. М. 309
 Бочек Л. В. 127
 Бояринцев Ю. Е. 80, 105, 515
 Боярский А. Я. 560
 Боярчук А. К. 90
 Бравин Е. Л. 560
 Брагин С. М. 379
 Брадвардин 493
 Брадис В. М. 560
 Брайцев И. Р. 561
 Брайчевский М. Ю. 476
 Бракнер 199
 Браун С. 397
 Брауэр 429, 433, 454, 542
 Бредихин Б. М. 561
 Брехов А. М. 391, 528
 Бржечка В. Ф. 496, 561
 Бринелль 233, 234
 Броди С. М. 56, 58
 Бродский М. Л. 128
 Бродский М. С. 561
 Бройль де 159
 Брудно А. Л. 400, 561

- Бруевич Н. Г. 312, 313, 318, 379, 521, 528, 544, 561
 Брук И. С. 318, 380, 528, 561
 Брусиа В. А. 333
 Брюно А. Д. 561
 Бублик Б. Н. 561
 Бубнов И. Г. 120—122, 251, 261, 335
 Бубнов Н. М. 456
 Бугаев Н. В. 485
 Бугров Я. С. 561
 Будах Б. М. 99, 106, 111—113, 128, 505
 Будкер А. Н. 155
 Букреев Б. Я. 471, 561
 Булавский В. А. 355, 388, 528
 Булах Б. М. 561
 Булгаков Б. В. 240, 521, 561
 Буледза А. В. 109
 Булеев Н. И. 92, 505, 561
 Булинская Е. В. 57
 Булыгин В. Я. 561
 Бунг А. 487
 Буницкий Е. Л. 431, 562
 Буняковский В. Я. 7, 10, 455, 467, 483, 499
 Бурбаки Н. 452, 498
 Бурд В. Ш. 342
 Буриев Т. Б. 106, 505
 Бурков В. Н. 390
 Бурместер 311, 524
 Бурсиан В. Р. 562
 Бурстин Ц. Л. 562
 Бусленко Н. П. 57, 391, 528, 562
 Буссинеск 308
 Бутенин Н. В. 562
 Бухарев Р. Г. 387
 Бухман В. Е. 379, 528
 Бухман Е. Н. 562
 Бухтияров А. М. 357, 528
 Бухштаб А. А. 562
 Бушко-Жук М. М. 358
 Быков Я. В. 562
 Былов Б. Ф. 562
 Быстров Н. А. 115
 Бычков В. П. 472, 487, 543
 Быховский М. Л. 380, 528, 562
 Бьеррум 194
 Бэр 35, 394, 395, 399, 400, 402, 403, 533
 Бюхи 419
 Бюшгенс С. С. 239, 326, 327, 521, 562

 Вавилов С. И. 462, 463, 475
 Вагнер В. В. 237, 238, 521, 562
 Вайндлиер А. И. 115
 Вайман А. А. 488
 Вайнберг Д. В. 264
 Вайнберг М. М. 562
 Вайникко Г. М. 121—123, 506
 Вайнштейн И. А. 408
 Вайтман 190
 Вайцзеке 517
 Валеев К. Г. 562
 Валландер С. В. 562
 Валлис 475, 495
 Валов Г. М. 260
 Вальд 46, 51
 Вальтер П. А. 297, 298
 Вальфш А. З. 563
 Ван-дер-Варден 491
 Ван-дер-Поль 267—269, 288, 329, 523
 Ван Фо-Фы Г. А. 257
 Ван-Хов 208
 Варвак П. М. 264, 563
 Варинг 495
 Варнаховский Ф. Л. 435, 533
 Варшамов Р. Р. 544, 563
 Василенко М. В. 276, 521
 Васильев А. В. 456, 458, 459, 544, 563
 Васильев А. М. 544, 563
 Васильев В. В. 381, 563
 Васильев В. Г. 141, 510
 Васильев В. Ф. 106
 Васильев Н. А. 431
 Васильев Н. Н. 563
 Васильев Р. П. 111
 Васильев Ю. Л. 384
 Васильева А. Б. 287, 563
 Ващенко-Захарченко М. Е. 455, 456, 471
 Вевиоровская М. А. 521
 Ведерников В. В. 304
 Вейерштрасс К. 11, 242
 Вейль Г. 339, 467
 Векилов Ш. И. 113
 Векслер В. И. 154, 155, 186, 517
 Векуа И. Н. 253, 257—259, 563
 Векуа Н. П. 563
 Велиев М. А. 121, 122
 Великая С. М. 469, 472
 Великоиваненко И. М. 307
 Вельмин В. П. 563
 Венгерова А. А. 381
 Веников В. А. 379, 528, 563
 Венков Б. А. 470, 496, 564
 Вентцель А. Д. 39, 40, 51, 499
 Вентцель М. К. 564
 Вентцель Т. Д. 108
 Вербицкая И. Н. 25
 Вержбинская Ю. С. 118
 Веригин Н. Н. 308, 309
 Верлань А. Ф. 381
 Вертгейм Б. А. 147, 506
 Верховский А. В. 311
 Веселовский И. Н. 463, 465, 467, 488, 493, 544, 564
 Ветчинкин В. П. 127, 131, 245, 564
 Вивальнюк Л. Н. 469, 472
 Виденский В. С. 564
 Вик 203
 Вилейтнер Г. 460

- Виленкин Н. Я. 145, 564
 Вилларс 183
 Вильямс 517
 Виноград Р. Э. 564
 Виноградов А. И. 564
 Виноградов И. М. 463, 484, 496, 544, 564
 Винокуров В. Г. 36, 37, 564
 Винокуров Л. П. 109
 Винокуров С. Г. 122
 Винтер Э. 468, 480
 Висков О. А. 56
 Витенберг И. М. 381, 564
 Витензон И. Г. 544
 Витт А. А. 59, 267, 286, 333, 515, 519, 564
 Витушкин А. Г. 506, 564
 Вишик М. И. 109, 119, 121, 122, 506, 544, 565
 Вишневский Л. А. 565
 Владзиевский А. П. 323
 Владимиров В. С. 91, 108, 124, 188—190, 516, 517, 565
 Владимирова Н. 106
 Владимирский В. В. 154
 Власенко О. Н. 58
 Власов А. А. 164, 196
 Власов А. К. 565
 Власов В. З. 252, 253, 565
 Власова З. А. 115, 118, 506
 Вовкодав И. Ф. 263
 Воеводин В. В. 65, 506
 Вожель Т. 265
 Войшвилло Е. К. 445
 Волков Д. В. 178
 Волков Д. М. 565
 Волков Д. П. 544
 Волков Е. А. 86—88, 506, 565
 Волков М. С. 431
 Волкова В. А. 469
 Волкова О. Ф. 493
 Волковыский Л. И. 565
 Волконский В. А. 26, 39, 55, 388, 499, 528
 Воллернер Н. Ф. 565
 Волович В. М. 506
 Володарский А. И. 465, 467, 493
 Володин Н. Н. 48
 Волосов В. М. 276, 284, 287, 340, 565
 Волохов А. Н. 127
 Волошин Ю. М. 359, 529
 Волынский Б. А. 379, 528
 Вольперт А. И. 565
 Волькенштейн М. В. 161
 Вольмир А. С. 254
 Вольтерра 134, 227, 297, 509
 Ворель З. 275
 Воробьев Л. М. 565
 Воробьев Н. Н. 24, 391, 436, 499, 533, 565
 Ворович И. И. 118, 122, 254, 259, 260, 263, 338, 339, 565
 Воронец П. В. 237, 242, 471
 Вороновская Е. В. 506, 566
 Вороной Г. Ф. 463, 466, 470, 550
 Воскресенский Г. П. 528
 Вулих Б. З. 566
 Выгодский М. Я. 459—463, 466, 467, 475, 480—482, 486, 487, 489, 490, 492, 494, 496, 545, 566
 Вышнеградский 520
 Гавели С. П. 257
 Гавриленко В. А. 320, 522
 Гавриленко Е. Т. 356
 Гаврилов А. Ф. 108, 566
 Гаврилов Г. П. 542
 Гаврилов М. А. 383, 444, 530, 566
 Гаврилов Н. И. 566
 Гавурин М. К. 65, 66, 388, 506, 566
 Гагаев Б. М. 486, 545, 566
 Гагуа М. Б. 122
 Газали 479
 Гайдук Ю. М. 497
 Гайсарян С. С. 126, 129, 132
 Галанин А. Д. 517
 Галанин Д. Д. 456
 Галеркин Б. Г. 63, 66, 115, 120—122, 251, 258, 259, 261, 335, 338, 339, 506, 509, 522
 Галилей 151, 210, 211
 Галимов К. З. 118, 253, 262, 566
 Галин Л. А. 259, 298, 307, 308, 566
 Галицкий В. М. 163
 Галуа 460, 461, 498
 Галченкова Р. И. 486
 Гальперн С. А. 566
 Гамильтон 240, 289, 290, 497, 518, 523
 Гамкрелидзе Р. В. 67, 526, 531, 566
 Гамрекели С. И. 316
 Ганин М. П. 566
 Гантмахер Ф. Р. 65, 245, 246, 251, 322, 340, 517, 522, 567
 Гаркави А. Л. 567
 Гартштейн Б. Н. 46
 Гастев Ю. А. 2, 438, 440, 533
 Гасымов М. Г. 567
 Гато 136
 Гаусс 17, 20, 25, 26, 29, 63, 91, 141, 263, 463, 472, 480, 481, 496
 Гахов Ф. Д. 2, 567
 Гачок В. П. 190, 520
 Гвоздев А. А. 253
 Гегелиа Т. Г. 567
 Гегель 459
 Гедель 406, 410, 424, 435, 437, 439—441, 446, 540
 Гейгер 56
 Гейдельман Р. М. 567
 Гейзенберг В. 159, 163, 168, 187
 Гейтинг 434

- Гейтлер 171
 Гельдер 94
 Гелл-Манн 173, 176, 177
 Гельман И. В. 118
 Гельмгольц 109, 264
 Гельфанд И. М. 37, 45, 61, 74, 91, 99, 107, 124, 155, 161, 169, 303, 335, 389, 506, 517, 528, 567
 Гельфер С. А. 567
 Гельфонд А. О. 2, 459, 463, 468, 480, 506, 545, 567
 Генкин 441
 Генцен 435
 Георгиевская В. В. 527
 Герард Брюссельский 493
 Герасимов А. Н. 261
 Герасимович Б. П. 567
 Герберт 456
 Гернет М. М. 567
 Гернет Н. Н. 567
 Герман Я. 480
 Гермейер Ю. Б. 391
 Геронимус В. Б. 379
 Геронимус Я. Л. 143, 314, 315, 318, 319, 323, 472, 522, 567
 Герсеванов Н. М. 305, 522, 568
 Герценштейн М. Е. 568
 Герцбах И. Б. 58
 Гершгорин С. А. 65, 66, 85, 87, 88, 146, 326, 327, 378, 379, 506, 522, 528, 568
 Гехт Б. И. 148, 506
 Гиббс Дж. 161, 164, 203, 205
 Гильберт Д. 151, 251, 304, 305, 406, 433, 452, 463, 496, 497, 546, 549
 Гинзбург В. Л. 157, 163, 517
 Гинзбург И. П. 568
 Гинзбург С. А. 380, 568
 Гирсанов И. В. 41, 44, 51, 52, 61
 Гиршвальд Л. Я. 545
 Гиршик 50
 Гихман И. И. 16, 41—43, 47, 48, 59, 274, 276, 340, 486, 499, 500, 545, 568
 Глаголев А. А. 568
 Глаголев В. В. 384
 Глаголев Н. А. 495, 568
 Гладкий А. В. 386, 395, 415, 423, 429, 452, 533, 568
 Глазман И. М. 389, 568
 Глазунов Е. А. 568
 Гласко В. Б. 140, 514
 Глебский Ю. В. 387
 Глейзер Г. И. 472
 Гливенко В. И. 15, 46, 62, 398, 400, 434, 437, 461, 538, 542, 568
 Глушкин Л. М. 568
 Глушков В. М. 2, 345, 346, 357, 358, 362, 363, 367, 368, 382, 383, 385, 386, 391, 412, 452, 528, 529, 533, 568
 Глущенко А. А. 306, 307, 522
 Гнеденко Б. В. 2, 12, 16, 19—21, 28, 40, 46—48, 55—58, 354, 358, 461, 463, 464, 466, 483, 485, 486, 496, 499, 500, 529, 545, 569
 Гогоберидзе Д. Б. 569
 Гоголадзе В. Г. 254, 260, 261
 Годунов С. К. 66, 74, 83, 84, 91, 101, 105, 108, 504, 507, 569
 Годэн 205
 Гокиели Л. П. 473, 569
 Голенко Д. И. 391, 529, 569
 Головин О. Н. 569
 Головкин К. К. 339
 Голоскоков Е. Г. 329
 Голубев В. В. 295, 296, 484, 485, 545, 569
 Голубенцев А. Н. 323, 522
 Голубков П. В. 569
 Голузин Г. М. 135, 148, 569
 Голушкевич С. С. 569
 Гольдбах Хр. 480
 Гольдберг А. А. 569
 Гольдберггер 173
 Гольденблат И. И. 262
 Гольденвейзер А. Л. 253, 569
 Гольдин В. Я. 84, 106
 Гольцов Н. А. 129
 Гольштейн Е. Г. 388, 532
 Гомори 390
 Гончар А. А. 569
 Гончаров В. Л. 463, 484, 496, 508, 569
 Гончаров Д. С. 469
 Гопп Ю. А. 570
 Горбатенко С. А. 570
 Горбунов А. Д. 113, 127—129, 131, 132, 505, 514
 Горdevский Д. З. 544, 545
 Гордезиани Д. Г. 105, 507
 Горделадзе Ш. Г. 570
 Гордон В. О. 570
 Горелик А. Л. 570
 Горелик Г. С. 249, 519
 Горин Н. П. 239, 570
 Горлов А. М. 118
 Горохов В. А. 333
 Горошко О. А. 257
 Горшков В. Г. 517
 Горшков Д. С. 570
 Горьков Л. П. 163
 Горячкин В. П. 310, 322
 Гофман Ш. М. 570
 Гохберг И. И. 570
 Гохман Х. И. 309, 319
 Граве Д. А. 294, 456, 458, 462, 471, 472, 485, 545, 546, 570
 Граве П. П. 570
 Граев М. И. 570
 Граффи Д. 265
 Грацианская Л. Н. 469, 471, 476, 486, 545
 Грдина Я. И. 237, 570
 Гребеников Е. А. 570

- Гребенча М. К. 571
 Гребенюк Д. Г. 145, 571
 Грегори 505
 Грездов Г. И. 381
 Грибов В. Н. 175, 517
 Григелионис Б. И. 51, 54, 61
 Григорий Магистр 478
 Григорьева Е. А. 113
 Григорьян А. Т. 2, 465, 466, 545, 549, 571
 Григорьян С. С. 571
 Грилицкий Д. В. 260
 Грин 74, 87, 91, 94, 163, 169, 170, 184, 185, 195, 204, 207, 255, 296, 301, 336, 511, 517, 520
 Гринберг Г. А. 119, 157, 571
 Гринблум М. М. 571
 Гриндлингер М. Д. 533, 571
 Гриневичюс К. И. 571
 Гринченко В. Т. 260
 Гринченко Т. А. 532
 Гробов В. А. 280, 329, 332, 522
 Громмер Я. П. 571
 Грузинцев Г. А. 571
 Губенко В. С. 260
 Гугенгольд 199, 207
 Гудстейн Р. Л. 435
 Гузь А. Н. 256, 257
 Гук 252
 Гулько Ф. Б. 380
 Гурарий В. И. 571
 Гурвиц 224, 225, 272, 273
 Гуревич Б. Л. 111
 Гуревич Г. Б. 571
 Гуревич Л. Э. 517
 Гуревич М. И. 571
 Гуревич С. Г. 122
 Гуревич Ю. Ш. 415, 428, 437, 443, 451, 533
 Гуров К. П. 164, 196, 197, 516
 Гурса 108, 112, 114, 505, 509
 Гурьев С. Е. 455
 Гурьянов В. М. 131
 Гусак А. А. 484
 Гусак Д. В. 44
 Гусаров А. А. 522
 Гусев А. Н. 464
 Гусев Л. А. 528
 Гусейнов А. И. 486, 545, 571
 Гусейнов Г. П. 522
 Гуссов В. В. 466, 485, 497
 Гутенмахер Л. И. 318, 379, 529, 571
 Гухман А. А. 378, 529
 Гюйгенс 467, 495
 Гюнтер Н. М. 291, 292, 458, 463, 485, 522, 545, 572
 Даббах Дж. 492
 Давиденко Д. Ф. 86, 118, 507
 Давидов А. Ю. 487
 Давидов Я. С. 319
 Давыдов А. С. 160, 161, 163, 517
 Давыдов Г. В. 438, 541
 Давыдов Н. А. 572
 Даев В. Д. 461
 Дайсон Ф. 166, 180, 181, 183, 190
 Даламбер 214
 Далецкий Ю. Л. 42, 572
 Данжуа 289
 Данилевский А. М. 65
 Данилов В. Л. 307, 572
 Даниловская В. И. 261
 Данилюк И. И. 572
 Дарбу 324
 Даревский В. М. 253, 572
 Дарлинг 48
 Дармостук П. М. 572
 Дарси 527
 Даугавет И. К. 118, 122
 Дахия С. А. 472
 Дебай 194
 Девингталь Ю. В. 302
 Девис Т. 337
 Девисон Б. Б. 307, 527
 Дедекинд Р. 445, 457, 497
 Дезин А. А. 572
 Дейкстра Э. 359
 Декарт 460, 465, 466, 494, 498
 Деккер 422
 Делоне Б. Н. 2, 463, 464, 468, 470, 482, 484, 496, 544—546, 572
 Демидов С. С. 465, 497, 546
 Демидович Б. П. 274, 340, 572
 Демокрит 479, 489
 Демьянов В. Ф. 389, 390
 Демьянович Ю. К. 89, 90, 115, 507
 Демьяшкина Э. Я. 112
 Денисов А. П. 480, 482, 546
 Депман И. Я. 468, 472, 480, 486, 496, 546, 572
 Дернов Н. А. 572
 Детловс В. К. 447, 533
 Джабуа Г. А. 316
 Джавадов М. А. 550, 573
 Джавадов М. Г. 572
 Джанелидзе Г. И. 247, 249, 573
 Джапаридзе И. С. 573
 Джаухари 492
 Джваршейшвили А. Г. 573
 Джрбашян М. М. 573
 Джураев А. 573
 Дзиобек 242, 243
 Дзядык В. К. 507, 573
 Дзялошинский И. Е. 163
 Дилиберто С. 265
 Диментберг Ф. М. 316, 317, 329, 334, 522, 573
 Динзе О. В. 548
 Динник А. Н. 262, 263, 331, 522, 573

Диофант 467, 491, 495
 Дирак П. 159, 162, 165, 167, 168, 170, 183, 482
 Дирихле (Лежен-Дирихле) 79, 84, 85, 87, 89, 92—95, 115, 116, 119, 138, 453, 457, 460, 485, 497, 505—507, 510, 512, 513
 Диткин В. А. 67, 68, 145, 573
 Дитякин Ю. Ф. 122
 Дишкант Г. П. 438
 Дмитриев Н. А. 37
 Добровольский В. А. 469, 471, 486, 546
 Добровольский В. В. 312—314, 318, 321, 484, 521, 522
 Добронравов В. В. 237, 522, 573
 Добрушин Р. Л. 24, 27, 38, 55, 59, 61, 500, 503, 574
 Довбыш Л. Н. 118
 Довгополая Л. И. 528
 Довнорович В. И. 574
 Долгополова Т. Ф. 138
 Долгушин П. А. 487
 Долженко Е. П. 574
 Долидзе Д. Е. 301, 523, 574
 Дольберг М. Д. 574
 Домбровская И. Н. 138, 140, 507
 Доморяд А. П. 127
 Донскер 42, 43
 Донченко В. В. 438, 533
 Дороговцев А. Я. 42
 Дородницын А. А. 66, 113, 288, 302, 507, 523, 574
 Доронин Г. Я. 142
 Дорофеева А. В. 465, 481, 496, 497, 546
 Дорфман Я. Г. 163
 Доступов Б. Г. 380, 528, 574
 Драгалин А. Г. 441, 533
 Дринфельд Г. И. 574
 Дружинин Н. И. 305, 378, 523
 Дружинин Н. К. 574
 Дуб Дж. Л. 15, 47, 500
 Дубинин Н. П. 62
 Дубнов Я. С. 574
 Дубовицкий А. Я. 390, 529
 Дубошин Г. Н. 244, 245, 523, 574
 Дубровский В. В. 322
 Дубровский В. М. 574
 Дубяго А. Д. 574
 Дуглас 92, 100
 Дунин-Барковский И. В. 12, 575
 Душский В. А. 448
 Дымарский Я. С. 529
 Дынкин Е. Б. 12, 23, 24, 38—40, 50, 51, 500, 503, 575
 Дьяконов Е. Г. 80, 93, 102, 103, 507, 508
 Дьяченко В. Е. 379, 575
 Дьяченко В. Ф. 76
 Дюбюк А. Ф. 575

Евграфов М. А. 508, 575
 Евдокс 476, 489, 498
 Евклид 13, 455, 456, 463, 466, 468, 474, 476, 477, 489, 490
 Еганян А. М. 473, 474
 Егоров В. А. 247
 Егоров Д. Ф. 431, 456, 575
 Егоров И. П. 575
 Ежов И. И. 575
 Езинашвили В. О. 322
 Елизарьев Иван 455, 471
 Ельяшевич М. А. 161
 Енальский В. А. 93
 Епифанов А. Д. 323
 Еремин И. И. 389
 Еремин С. А. 508
 Ержанов Ж. С. 261
 Ермаков В. П. 10, 471, 487, 575
 Ермаков С. М. 145
 Ермолаева Н. М. 446, 533
 Ермольев Ю. М. 389—391, 529, 531
 Еругин А. Н. 575
 Еругин Н. П. 2, 473, 523, 546, 575
 Ершов А. П. 352, 357, 359, 360, 367—369, 417, 508, 528, 529, 532, 533, 575
 Ершов Ю. Л. 415, 428, 443, 446, 451, 533, 534, 575
 Есенин-Вольпин А. С. 439, 440, 534
 Ефименко В. А. 96
 Ефимов А. В. 575
 Ефимов Н. В. 544, 576
 Ефремович В. А. 576

Жаутыков О. А. 475, 486, 523, 546, 576
 Жданов Г. М. 529
 Жегалкин И. И. 393, 432, 437, 576
 Жегалова Т. С. 320
 Железцов Н. А. 286
 Жемайтис З. Ю. 473, 482, 576
 Жидков Н. П. 508
 Жижиашвили Л. В. 576
 Жиков В. В. 342
 Житомирский Я. И. 576
 Жоголев Е. А. 126, 355, 357, 364, 529
 Жордан 93, 94
 Жуков А. И. 74, 83, 108, 508
 Жуковский Н. Е. 153, 214, 215, 244, 292, 294—296, 303, 305, 310, 326, 378, 471, 529, 576
 Журавлев Ю. И. 384, 391, 445, 446, 534, 576
 Журавский А. М. 576

Забрейко П. П. 337, 340, 341, 576
 Забродин А. В. 101, 105, 507
 Загребин Д. В. 576
 Задирака К. В. 286, 523, 576
 Заездный А. М. 577

- Закревский А. Д. 362, 383
 Залгаллер В. А. 577
 Залтс К. Я. 577
 Занчевский И. М. 309
 Запольская Л. Н. 577
 Зарицкий М. О. 459, 577
 Заславский И. Д. 413, 414, 430, 453, 454, 534
 Засухин В. Н. 36
 Захаров Д. А. 419, 442, 534
 Зверкина Т. С. 129
 Зволинский Н. В. 577
 Зейлигер Д. Н. 309, 311, 313, 523, 577
 Зельдович Я. Б. 156, 170, 171, 214, 518
 Зенон Элейский 465, 479
 Зенф К. Э. 472, 487
 Зерагия П. К. 577
 Зикевская Л. М. 528
 Зингер А. А. 28, 49
 Зикер 328
 Зиновьев А. А. 438
 Зиновьев В. А. 313, 315, 316, 321, 322, 523
 Злотопольский М. Д. 316, 317, 319, 523
 Зморович В. А. 577
 Золотарев В. М. 29, 38, 41, 500, 577
 Золотарев Е. И. 460, 466, 468, 484, 549
 Зотина Р. С. 482
 Зубарев Д. Н. 155, 199, 200, 202, 204, 275, 517, 518, 577
 Зубов В. И. 523, 577
 Зубов В. П. 465, 466, 479, 493, 494, 498, 546, 577
 Зундман 243
 Зуховицкий С. И. 389, 529, 577
 Зыкин Г. П. 419
 Зыков А. А. 437, 438, 534, 578
 Зылев В. П. 65, 578
- Ибн ал-Хайсам 492
 Ибн Сина 474, 478
 Ибн Синан 492
 Ибрагимов И. А. 19, 20, 22, 23, 27, 29, 500, 501, 578
 Ибрагимов И. И. 142, 578
 Ибрагимов С. Г. 497
 Ибрагимов Ш. И. 113
 Иваненко Д. Д. 155, 518, 578
 Иванилов Ю. П. 523
 Иванищев В. Ф. 140
 Иванов А. А. 578
 Иванов В. В. 120, 140, 508, 578
 Иванов В. К. 65, 67, 135, 137, 138, 140, 141, 149, 504, 507, 508, 578
 Иванов В. Т. 109, 110
 Иванов И. И. 578
 Иванова Л. К. 469
 Ивацова Н. В. 404
 Ивахненко А. Г. 348, 578
- Ивлев Д. Д. 578
 Ивон 195
 Ивченко Г. И. 24
 Игнатовский В. С. 578
 Игнатъев Н. К. 578
 Игнациус Г. И. 464, 467, 495, 546
 Идельсон А. В. 534
 Идельсон Н. И. 461—463, 482, 489, 579
 Извольский Н. А. 579
 Изинг 207
 Илзния И. Г. 529
 Ильин А. М. 108, 508
 Ильин В. А. 579
 Ильин В. П. 117, 579
 Ильюшин А. А. 254, 261, 262, 299, 579
 Ильяшенко А. А. 27
 Иманалиев М. 579
 Ингерман П. 359
 Инербаев М. С. 508
 Ионов В. Н. 239
 Иорданский С. В. 208, 518
 Иоффе Б. Л. 178, 517
 Иохвидов И. С. 579
 Исаенко Т. Г. 355
 Искандеров Р. И. 546
 Искендеров А. Д. 99
 Ито 41
 Ишлинский А. Ю. 2, 209, 210, 213, 214, 240, 241, 243, 245—247, 260, 261, 335, 523, 527, 579
- Кабаков Ф. А. 435, 534
 Кабулов В. К. 579
 Кавальери 460, 494
 Каган А. М. 49
 Каган В. Ф. 456, 463, 464, 482, 483, 496, 546, 579
 Каганов М. И. 519
 Кадец М. И. 579
 Казак С. А. 328
 Казакова Л. Э. 138
 Каландия А. И. 579
 Калашников А. С. 108
 Календерьян Л. И. 118
 Калинин Н. К. 307
 Калинин С. В. 580
 Калининченко Л. А. 391, 529
 Калинович В. Н. 241
 Калиский 239
 Калиткин Н. Н. 84, 106
 Калужнин Л. А. 357, 358, 367, 385, 417, 534, 580
 Кальмар Л. 410, 422, 437
 Каляев А. В. 381
 Камалов М. К. 580
 Каменков Г. В. 580
 Камерон 44

- Каминский В. П. 312
 Камынин Л. И. 98, 111
 Камынин С. С. 357, 366, 369, 529
 Канарева Н. П. 118
 Кангро Г. Ф. 580
 Кантор Г. 452
 Кантор М. 457, 477
 Канторович Л. В. 64—68, 86, 115, 116, 121, 123, 133, 134, 142, 146—149, 247, 335, 355, 357, 388, 389, 401, 402, 404, 506, 508, 529, 542, 580
 Канунов Н. Ф. 469
 Капитонова Ю. В. 382, 385
 Капица П. Л. 162, 518
 Каплан 72
 Каплан С. А. 157
 Капхенгст Х. 385
 Карагодин В. М. 247
 Караджи 477
 Карацуба А. А. 385, 444, 580
 Каргапулов М. И. 451, 580
 Каргин Д. И. 496, 546
 Каримов Д. Х. 580
 Карлеман 136
 Карлсон 171
 Карман 524
 Карнап 440, 441, 540
 Карно Л. 459, 460, 496
 Карпелевич Ф. И. 580
 Карпиловская Э. Б. 123
 Карпова Л. М. 467
 Карри 437
 Картан Э. 239
 Картрайт М. 265
 Карчевский М. М. 110
 Кары-Ниязов Т. Н. 462, 474, 476, 546, 580
 Каспицкая М. Ф. 123
 Кастильяно 262
 Касумханов Ф. А. 474
 Катилус П. И. 580
 Кац Г. И. 580
 Кац И. С. 94, 508
 Кацкова О. Н. 108
 Качанов Л. М. 118, 123, 261, 262, 508
 Каши Гиясатдин Джемшид 474, 477
 Каштанов В. А. 58
 Квальвассер В. И. 580
 Квеселава Д. А. 581
 Квит И. Д. 47
 Кеда Н. П. 141
 Кеджори Ф. 456
 Келдыш Л. В. 399, 408, 411, 534, 581
 Келдыш М. В. 64, 76, 91, 121, 122, 124, 213, 259, 294, 296—298, 302, 303, 306, 335, 509, 523, 581
 Келлер Л. В. 59, 60
 Кельзон А. С. 581
 Кендалл 53
 Кемхадзе Ш. С. 581
 Кеплер 212, 460, 494
 Керес Х. П. 581
 Керопян К. К. 529, 581
 Кетов Х. Ф. 319
 Кибель И. А. 298, 581
 Кильчевский Н. А. 239, 257, 523, 581
 Ким Е. И. 581
 Ким Г. 509
 Кингмэн 56
 Кипнис М. М. 435, 534
 Киппер А. Я. 546
 Киприянов И. А. 581
 Кирик Новгородец 455, 479, 546
 Кириллов А. А. 582
 Кириллова Ф. М. 582
 Кирквуд 194, 495
 Кирко И. М. 379
 Киро С. Н. 469, 472, 486, 547
 Кирпичев В. Л. 209, 210, 377
 Кирпичев М. В. 378, 379, 529
 Кирхгоф 252
 Киселев А. А. 122, 339, 468, 480, 486
 Кислицын С. Г. 313, 314, 316, 317, 321, 523, 582
 Китов А. И. 354, 529, 530
 Клаго Т. Н. 480
 Кларксон 140
 Клейн Ф. 458, 460, 494
 Клемент Ф. Д. 547
 Климов Г. П. 57
 Клини 382, 410—413, 418—421, 426, 434, 446, 452
 Клиот-Дашинский М. И. 119
 Клиффорд В. 310
 Клосс Б. М. 24, 501
 Ключев В. В. 509
 Кляйн 205
 Кобзарев И. Я. 178
 Кобзарев Ю. Б. 269, 521
 Кобринский А. Е. 321, 323, 334, 523
 Кобринский Н. Е. 318, 380, 382, 383, 530, 582
 Ковалевская С. В. 339, 458, 463, 471, 549
 Коваленко А. Д. 260, 263, 264, 582
 Коваленко И. Н. 24, 48, 54—58, 500, 582
 Коваль П. И. 98
 Ковальчук Р. Н. 507
 Кованцов Н. И. 239, 582
 Кованько А. С. 582
 Ковнер С. С. 582
 Ковтун Д. Г. 582
 Когаловский С. Р. 442, 534, 535
 Коган Б. Я. 380, 530, 531
 Кодачитов И. А. 113
 Кожевников С. Н. 318—321, 323, 523
 Кожухин Г. И. 359, 368, 529
 Козлов В. Я. 582
 Козлов Э. С. 381
 Козлова З. И. 396—399, 401—405, 408, 431, 535

- Коковкин-Щербак Н. И. 509
 Колесов Ю. С. 341, 342
 Колесова Е. В. 400
 Колкунов В. А. 517
 Колмогоров А. Н. 10—12, 14—17, 19—
 21, 26—37, 40—43, 45—47, 50—52,
 58—62, 64, 152, 153, 164, 244, 289, 299,
 303, 335, 340, 352, 386, 400—402,
 412—414, 417, 418, 422, 424, 425,
 429, 431, 433—436, 446, 447, 463,
 482, 495, 497, 500, 501, 503, 509,
 518, 523, 535, 542, 547, 582
 Колмогоров Н. А. 583
 Коломиец В. Г. 274, 276
 Коломенский А. А. 154
 Колосов Г. В. 255, 259, 472, 487, 583
 Колчин Н. И. 319
 Кольман Э. Я. 460, 465, 467, 490, 496,
 498, 547, 583
 Комладзе Г. М. 112
 Комолов П. Н. 530
 Компанец А. С. 161, 520
 Комптон 170, 517
 Конаков П. К. 379
 Кондо М. 398, 401
 Кондратьев А. С. 583
 Кондратьев В. А. 583
 Кондратюк Ю. В. 245
 Кондрашов В. И. 583
 Кондударь В. Т. 583
 Коновалов А. Н. 80, 94, 103, 106, 509
 Коновальцев И. В. 75, 509
 Кононенко В. О. 280, 321, 331, 524,
 583
 Константинов О. В. 163
 Конторович П. Г. 482, 583
 Кон-Фоссен С. Э. 583
 Копелевич Ю. Х. 477, 480
 Кордонский Х. Б. 583
 Кордуба Б. М. 109
 Коренблюм Б. И. 583
 Коренев Б. Г. 263, 583
 Кориолис 213
 Коркин А. Н. 468, 484, 549
 Коркин Л. Ф. 141
 Корнейчук Н. П. 584
 Корниенко Г. М. 528
 Корнфельд М. И. 584
 Коробейник Ю. Ф. 584
 Коробков В. К. 445
 Коробов Н. М. 67, 68, 133, 144, 145,
 509, 584
 Коровкин П. П. 584
 Королев Л. Н. 357, 584
 Королев М. А. 362, 391, 530
 Королев С. П. 245
 Королюк В. С. 43, 44, 47, 48, 58, 352,
 354, 357, 358, 499, 501, 529, 584
 Коршунов А. Д. 384
 Космодамианский А. С. 256
 Космодемьянский А. А. 245—247, 322,
 524
 Косовский Н. К. 452
 Костицын В. Т. 322
 Кострикин А. И. 584
 Костырко В. Ф. 428, 437, 535
 Костюк В. Н. 438
 Костюкович Е. Х. 109, 110
 Костюченко А. Г. 584
 Котек В. В. 469, 471, 546
 Котельников А. П. 309, 310, 463, 467,
 471, 482, 524, 549, 584
 Котов И. И. 584
 Коуэлл 126, 127
 Кочин Н. Е. 296, 334, 518, 524, 584
 Кочина П. Я. 296, 297, 305, 307, 308,
 463, 526, 549, 584
 Кошелев А. И. 338, 585
 Коши О. 18, 74, 91, 103, 107, 108, 111—
 113, 121, 123—132, 136—138, 187,
 236, 251, 294, 300, 308, 339, 481,
 483, 503—505, 507—512, 514
 Кошляков В. Н. 241, 585
 Кошляков Н. С. 460, 547, 585
 Коэн 407
 Коялович Б. М. 585
 Кравец Т. П. 463
 Кравченко И. П. 521
 Кравчук М. Ф. 462, 547, 585
 Крамар Ф. Д. 475, 483, 495, 497, 547
 Крамер Г. 20, 22, 23, 28, 29, 55, 482, 501
 Крамерс 173
 Кранк 98
 Красильников В. А. 60
 Красильщикова Е. А. 298, 299, 585
 Краснова С. А. 467, 477
 Красносельский М. А. 65, 68, 122, 247,
 274, 275, 335—342, 524, 585
 Краснушкин П. Е. 585
 Красовский Н. Н. 341, 524, 585
 Красовский Ю. П. 337
 Кратко М. И. 385, 415, 419, 429, 535
 Крейн М. Г. 36, 152, 161, 335, 389, 472,
 517, 518, 524, 530, 585
 Крейн С. Г. 65, 68, 113, 274, 275, 339,
 340, 524, 585
 Крейнс М. А. 320, 524, 586
 Крейнин Я. Л. 401, 406, 535
 Крейсел Г. 538
 Кренер 239
 Кривошеин Л. Е. 243
 Криницкий Н. А. 354, 357, 368, 530
 Кристоффель 147, 238, 304, 510, 512,
 515
 Кричевский Р. Е. 384, 443, 444
 Кришнан К. 171
 Крониг 173
 Кронрод А. С. 91, 586
 Кропотов А. И. 468, 547
 Кротов В. Ф. 247, 586

- Круковский Б. В. 586
 Круликовский Н. Н. 469, 486
 Крутков Ю. А. 240, 258, 586
 Кругляк П. Д. 586
 Кручкович Г. И. 586
 Крыжановский Д. А. 458, 462, 586
 Крылов А. Л. 84
 Крылов А. Н. 63, 65, 126, 215, 240, 334, 377—379, 456, 461—463, 471, 509, 532, 547, 550, 586
 Крылов Б. Л. 586
 Крылов В. И. 2, 64, 65, 67, 86, 91, 111, 112, 114—116, 124, 127, 133—135, 141—143, 145, 146, 148, 149, 508—510, 586
 Крылов В. С. 518
 Крылов И. А. 390
 Крылов Н. В. 40
 Крылов Н. М. 11, 26, 30, 34, 41, 52, 59, 63, 66, 67, 195, 96, 116, 120, 122, 143, 152, 220, 247, 268—271, 289, 328, 329, 331, 332, 334, 335, 340, 458, 463, 470, 501, 518, 524, 586
 Крымский С. Б. 438
 Кубесов А. К. 464, 475, 492
 Кубилюс Й. П. 2, 586
 Кублановская В. Н. 65, 149, 510
 Кудринский В. Ю. 120, 140, 508
 Кудрявцев В. А. 587
 Кудрявцев В. Б. 385, 542
 Кудрявцев В. Н. 320
 Кудрявцев Л. Д. 546, 587
 Кузнецов А. В. 403, 413, 414, 418—421, 427, 429—431, 436, 437, 441, 444—446, 448, 451, 535
 Кузнецов Б. Г. 106
 Кузнецов Б. Г. 465, 535
 Кузнецов Е. С. 587
 Кузнецов П. И. 587
 Кузьмин В. А. 425, 535
 Кузьмин К. С. 362, 530
 Кузьмин П. А. 587
 Кузьмин Р. О. 468, 484, 587
 Кузьмич Ф. И. 633
 Куклес И. С. 543, 587
 Кулаков А. А. 587
 Кулебакин В. С. 251
 Кулибин И. П. 377
 Кулиев Г. З. 474
 Куликов Л. Я. 587
 Кулон 194
 Кулябко Е. С. 468, 480, 550
 Кунугуи 397, 400
 Купер Л. 200—203
 Купрадзе В. Д. 258, 473, 587
 Курант 78
 Куратовский К. 405—407
 Курганов Н. Г. 482
 Куренков А. Н. 76
 Куренский М. К. 587
 Курмит А. А. 131, 510
 Курочкин В. М. 357
 Куропш А. Г. 587
 Курпель Н. С. 243
 Курцевейль Я. 275
 Кутт 123, 130—133, 510, 514
 Куфарев П. П. 147, 308, 510, 524, 587
 Кухтенко А. И. 251, 322, 323, 391, 524, 530, 588
 Кушнер Б. А. 454, 535
 Кушнир Е. А. 469, 472, 547
 Куэрт 340
 Кюри П. 207
 Лаврентьев М. А. 64, 76, 113, 145, 213, 214, 247, 292—294, 296, 299, 300, 301, 305, 306, 337, 397, 399, 400, 402, 408, 463, 468, 510, 524, 542, 547, 588
 Лаврентьев М. М. 65, 67, 135—137, 141, 510, 588
 Лаврик В. И. 306
 Лавров И. А. 415, 419, 443, 449, 451, 534, 535
 Лавров С. С. 362, 369, 530, 588
 Лагранж Ж. 210, 216, 237, 239, 246, 262, 265, 267, 291, 461, 462, 495, 531, 550
 Ладыженская О. А. 78, 83, 85, 96, 97, 108, 113, 301, 339, 510, 524, 588
 Лазарев В. Г. 383
 Ламберт 492
 Ламбин Н. В. 588
 Ламин Е. И. 381
 Ламэ 255, 497
 Лангенбах А. 109, 118
 Ландау Л. Д. 156, 157, 160—164, 168, 170, 171, 174, 186, 192, 196, 197, 208, 510, 516, 518, 520
 Ландис Е. М. 137, 510, 544, 588
 Ландкоф Н. С. 588
 Ландсберг Г. С. 171
 Ланков А. В. 487, 547
 Лапин А. С. 245
 Лапко А. Ф. 464, 486, 547
 Лаплас 7, 8, 11, 20, 21, 35, 44, 69, 79, 84, 85, 88, 91, 92, 94, 96, 109, 110, 134, 136, 138, 149, 159, 234, 235, 256, 261, 265, 295—297, 299, 300, 378, 380, 504—507, 509—511, 513, 522, 528
 Лаппо Данилевский И. А. 588
 Лаптев Б. Л. 464, 467, 482, 486, 547, 549, 588
 Лаптев Г. Ф. 588
 Ларкин А. Н. 163
 Латышева К. Я. 588
 Латышева Т. С. 530
 Лахлан 424
 Лахтин Л. К. 589

- Лахути Д. Г. 438
 Лебег А. 289, 394, 398, 439, 453, 549
 Лебедев А. Н. 380, 530
 Лебедев В. И. 79, 84, 87—91, 103, 108—111, 510, 511
 Лебедев Н. А. 513, 547, 589
 Лебедев Н. Н. 119, 259, 260, 589
 Лебедев П. А. 316, 318, 524
 Лебедев П. И. 634
 Лебедев С. А. 353, 530, 589
 Левенгейм 437
 Левенштейн В. И. 387
 Леви Г. 78
 Леви П. 18, 19, 21
 Левин Б. В. 543, 589
 Левин Б. Р. 589
 Левин Б. Я. 589
 Левин В. И. 497, 589
 Левин Е. М. 176
 Левин Л. А. 436
 Левин Л. М. 245, 246, 322
 Левинсон Н. 287—
 Левинсон Э. Д. 511
 Левитан Б. М. 161, 589
 Левитский Н. И. 314, 315, 318, 319, 484, 521, 524
 Левицкий В. О. 459, 589
 Левицкий Г. В. 457
 Левич В. Г. 518
 Левнер 147
 Леднев Н. А. 589
 Ледовская И. Б. 340, 341
 Лежандр 263, 462
 Лейбензон Л. С. 215, 261, 262, 295, 298, 304, 307, 524, 589
 Лейбман Э. Б. 472, 486
 Лейбниц 463, 495, 496
 Лейникс Э. Ю. 590
 Леман 46, 50
 Ленин В. И. 151
 Ленов Н. Н. 380, 530
 Ленский В. С. 590
 Леонов В. П. 27
 Леонтович Е. А. 250, 496
 Леонтович М. А. 59, 163, 518
 Леонтьев А. Ф. 590
 Лепик Ю. Р. 590
 Лерэ Ж. 338, 339
 Летицевский А. А. 362, 365, 368, 382, 383, 385—387, 438, 530
 Летов А. М. 524, 590
 Лехницкий С. Г. 256
 Ли 199, 208
 Ли С. 430
 Либ 205
 Либер А. Е. 590
 Ливенсон Е. М. 401, 402, 404, 542
 Лившиц М. С. 590
 Лившиц П. З. 260
 Лившиц Э. М. 385
 Лидский В. Б. 125, 590
 Лиз 103
 Линник Ю. В. 2, 12, 23, 27—29, 46, 49, 50, 463, 471, 484, 501, 548, 590
 Лионс Ж. 340
 Липин Н. В. 590
 Липцер Р. Ш. 51
 Лишшиц 41, 81, 128, 132, 147, 274
 Лисковец О. А. 109—113, 138, 140, 509, 511
 Лисович И. М. 241
 Листинг 460
 Литвин Ф. Л. 316, 317, 319, 524, 525
 Лиувилль 95, 96, 164, 195, 512, 514
 Лифшиц В. А. 438, 535
 Лифшиц Е. А. 341, 342
 Лифшиц Е. М. 156, 157, 161, 518, 519
 Лифшиц И. М. 163, 164, 519
 Лихин В. В. 472, 485, 497
 Лихолетов И. И. 465, 486, 496
 Лобачевский Н. И. 7, 13, 63, 239, 456, 459, 463—466, 472, 482, 483, 486, 498, 543, 546, 547
 Логинов Л. И. 99
 Логунов А. А. 169, 173, 190, 191, 519
 Лозинский Н. Н. 529
 Лозинский С. М. 111, 129, 131, 142, 511, 547, 590
 Лойцянский Л. Г. 60, 297, 325, 519
 Локуциевский О. В. 91, 99, 124, 125, 590
 Ломадзе Г. А. 590
 Ломджария Н. Ф. 473, 476
 Ломницкий А. М. 14, 590
 Ломоносов М. В. 479
 Лопатинский Я. Б. 591
 Лопиталь 460
 Лопшиц А. М. 591
 Лоренц Г. 153—156, 167, 181, 456, 517, 519
 Лось 442
 Лохин И. Ф. 591
 Лозв М. 15, 501
 Лузин Н. Н. 251, 295, 392, 395—400, 402—405, 407, 411, 431, 439, 461, 463, 467, 471, 485, 495, 536, 542, 543, 545, 548, 591
 Лукасевич 438
 Лукина Т. А. 480
 Лукомская А. М. 546
 Лукьянов В. С. 379, 522, 530
 Лумисте Ю. Г. 472, 473, 487
 Лунц А. Г. 383, 444
 Лунц Г. Л. 463, 482, 484, 591
 Лунц Я. Л. 241
 Лупанов О. Б. 384, 419, 443—445, 536, 591
 Лурье А. И. 240, 241, 244, 248, 250, 253, 257, 259, 260, 262, 284, 291, 292, 325, 332, 341, 525, 591

Лурье С. Я. 460, 461, 468, 482, 489, 494, 495, 548, 591
 Лусис А. Я. 462, 472—474, 548, 591
 Лучка А. Ю. 243
 Лыкова О. Б. 274, 276, 286, 340, 470, 525
 Лысенко В. И. 466, 480, 548
 Лэмб 166
 Лэнджер 205
 Лю И-чень 191, 519
 Любарский Г. Я. 154, 157, 591
 Любимский Э. З. 355, 357, 359, 366, 369, 529
 Любич Ю. И. 385, 389, 591
 Людмирская И. Б. 319
 Люилье 496
 Люкшин В. С. 591
 Люстерник Л. А. 65—67, 85, 91, 92, 96, 98, 145, 318, 335, 338, 341, 353, 463, 464, 467, 485, 486, 511, 530, 543, 547, 548, 592
 Ляв 252
 Лянце В. Э. 592
 Ляпин Е. С. 29, 592
 Ляпунов А. А. 352, 356, 357, 396, 397, 399, 401—407, 431, 437, 530, 532, 536, 543, 592
 Ляпунов А. М. 7—9, 17, 20, 216, 242, 248, 250, 266, 267, 269, 294, 334, 340, 341, 456, 460, 463, 466, 471, 472, 484, 485, 523, 525, 526, 544—546, 550
 Ляшенко В. Ф. 356, 530
 Ляшко А. Д. 110
 Ляшко И. И. 306, 307, 525, 526, 592
 Магавира 493
 Магнарадзе Л. Г. 256, 473, 548
 Магницкий Л. Ф. 456, 466, 480, 482, 546
 Магомедов Г. А. 592
 Маергойз М. Д. 389
 Мазья В. Г. 592
 Майер 194
 Майер А. Г. 250, 333, 496, 520, 592
 Майзель В. М. 262, 295, 525, 592
 Майкельсон А. 151
 Маймин З. Г. 436
 Майоров Ф. В. 381, 530, 592
 Майстров Л. Е. 464—466, 476, 479, 486, 490, 497, 548, 549
 Майстровский Г. Д. 91
 Майсюк Л. Б. 319
 Маканин Г. С. 450, 451, 536
 Макаров В. Л. 389, 529
 Макаров И. П. 592
 Макаров П. П. 638
 Маклорен 142
 Максвелл Дж. К. 151, 154, 156, 157, 165, 168
 Максимов И. М. 403
 Максимова Л. Л. 438, 536
 Макушкин А. Т. 529
 Малаховский В. С. 592
 Малеев В. А. 592
 Малиев А. С. 592
 Малинин А. А. 250
 Малиновский Б. Н. 345, 386, 532
 Малиновский В. И. 368
 Малкин И. Г. 135, 525, 593
 Маловичко А. К. 136
 Малышев А. В. 593
 Мальцев А. И. 352, 412, 415, 419, 424, 427, 428, 430, 433, 441—443, 451, 530, 536, 542, 593
 Малютков М. Б. 39
 Маматов М. 22
 Мамедбейли Г. Д. 474, 476, 548
 Мамедов Р. Г. 593
 Мамедов Я. Д. 336, 593
 Мандельстам 190, 191
 Мандельштам Л. И. 161, 171, 247, 249, 267, 268, 340, 519, 525
 Мандзюк А. И. 593
 Манджavidзе Г. Ф. 473
 Маневич В. А. 593
 Манин Ю. И. 593
 Мания Г. М. 47, 593
 Маргулис А. Е. 56, 57
 Марджанишвили К. К. 593
 Марков А. А. 7—11, 16, 24—28, 33, 34, 39, 40, 42, 43, 53, 62, 63, 164, 242, 456, 463, 472, 484, 500—503, 548, 593
 Марков А. А. мл. 352, 387, 412—414, 416, 419, 425, 426, 430—433, 436, 444—447, 449, 450, 452—454, 484, 530, 533, 536, 537, 541, 593
 Марков М. А. 168, 520
 Маркович Э. С. 593
 Маркс К. 460, 461, 465, 496, 551
 Маркушевич А. И. 2, 464, 468, 481, 482, 485, 490, 496, 497, 548, 594
 Марон И. А. 466, 483, 547
 Мартин 39
 Мартынович Т. Л. 109
 Мартынюк В. В. 355, 359, 368
 Марчевский М. Н. 458, 459, 471, 486, 548, 594
 Марченко В. А. 160, 594
 Марчук Г. И. 66, 83, 84, 105, 106, 108, 511, 594
 Марьянович Т. П. 54, 57, 391
 Маслов А. Ф. 594
 Маслов В. П. 594
 Маслов П. Г. 594
 Маслов С. Ю. 415, 419, 438, 439, 450, 537, 541
 Массо 107
 Матвеев В. А. 176

- Матвеев Р. Ф. 36
 Матвиевская Г. П. 468, 474, 477, 478, 481, 548, 594
 Матиясевич Ю. В. 450, 452, 537
 Матросов В. М. 525
 Маттис 205
 Матулис В. А. 439, 537
 Матъе 333
 Мацкина Р. Ю. 409
 Машурян А. С. 438, 537
 Маянц Л. С. 594
 Медведев Б. В. 178, 187, 190, 517, 594
 Медведев Ф. А. 464, 465, 467, 491, 497, 548
 Медведев Ю. И. 24
 Медведев Ю. Т. 382, 413, 414, 421, 422, 429, 435, 448, 452, 537
 Медер А. Р. 594
 Медовой М. И. 467, 477
 Мейалер Д. Г. 22, 46, 502
 Мейман Н. Н. 72, 98, 510, 511, 594
 Мейсснер 203
 Мекке И. 57
 Мелентьев П. В. 64, 127, 146
 Меллин 149, 234
 Мельник И. М. 389, 529
 Мельников В. А. 530
 Мельников И. Г. 468, 480
 Менделеев Д. И. 177
 Меньшов Д. Е. 543, 595
 Мергелян С. Н. 2, 64, 137, 511, 595
 Меркулова Н. М. 465
 Мерцалов Н. И. 310
 Метельский Н. В. 487
 Мешалкин Л. Д. 20, 21, 27, 502
 Мещерский И. В. 245, 322, 525
 Мигдал А. Б. 161, 163, 164, 519
 Мигиренко Г. С. 595
 Мизес 326, 333, 431
 Микеладзе М. Ш. 595
 Микеладзе Ш. Е. 67, 86, 88, 98, 127, 143, 145, 511, 595
 Мили 382
 Милин И. М. 595
 Миллионщиков В. М. 595
 Миллионщиков М. Д. 60, 303, 519, 525
 Мильман Д. И. 482
 Милютин А. А. 390, 529
 Миндинг Ф. 472, 487
 Минковский 155, 181
 Минлос Р. А. 45, 59, 169, 502, 517, 595
 Минский 419, 532
 Минц Г. Е. 415, 438, 439, 537, 538, 541
 Миркин Б. Г. 382
 Миронов В. Т. 595
 Миронов Г. А. 530
 Митропольский А. К. 595
 Митропольский Ю. А. 2, 152, 155, 265, 274—276, 278, 281, 285, 286, 289, 290, 328, 332, 340, 463, 470, 497, 517, 521, 525, 595
 Митюк И. П. 595
 Митягин Б. С. 596
 Михайлов А. В. 379
 Михайлов В. П. 596
 Михайлов Г. К. 468, 480, 525
 Михайлов Л. Г. 596
 Михайлов Н. Н. 381
 Михайлова К. А. 415, 450, 538
 Михалевич В. С. 47, 48, 51, 52, 390, 531, 596
 Михеев М. А. 379, 529
 Михельсон Н. С. 596
 Михлин С. Г. 66, 67, 116—122, 247, 255, 258, 262, 511, 512, 527, 596
 Мищенко Е. Ф. 67, 288, 525, 526, 531, 596
 Млодзеевский Б. К. 456, 467, 596
 Мовчан А. А. 596
 Модзалевский Л. Б. 483
 Мозер 290
 Моисеев Н. Д. 242, 596
 Моисеев Н. Н. 284, 286, 390, 523, 525, 531, 596
 Моисеенко Б. Д. 106
 Молин Ф. Э. 469, 472, 487, 596
 Молодший В. Н. 439, 465, 467, 490, 497, 538, 548, 596
 Молчанов А. М. 596
 Молчанов И. Н. 94, 512
 Молчанов С. А. 503
 Молюков И. Д. 483, 547, 597
 Монастырный П. И. 91, 124, 125, 509, 512
 Монахов В. Н. 597
 Монах Г. 460, 463, 496, 546
 Монин А. С. 60, 525, 597
 Монтюкла Ж. Э. 455
 Мордухай-Болтовской Д. Д. 458, 459—461, 463, 468, 490, 495, 548, 597, 634
 Морозов В. А. 111, 140, 512
 Морозов В. В. 545, 597
 Морозов Н. Ф. 118
 Морозова Н. Н. 548
 Морокишко О. П. 469
 Морошкин Ю. Ф. 316, 317, 525
 Мосеевков Б. И. 276, 284, 328, 329, 332, 525
 Москвитин В. В. 597
 Мосолов Б. Г. 243
 Моссаковский В. И. 259, 260
 Мостеллер 50
 Мостовский 408, 410, 411, 420, 421, 426, 430, 439, 446, 534
 Моцкус И. Б. 390, 531
 Муавр 7, 21
 Мур 367, 382, 385, 386
 Муратов М. И. 147

- Мурский В. Л. 538
 Мусхелишвили Н. И. 2, 213, 251, 255, 256, 259, 293, 294, 473, 525, 597
 Мухамадиев Х. М. 474
 Мучник А. А. 413, 414, 420, 422, 429, 447, 448, 538
 Муштаря Х. М. 253, 597
 Мчедlishvili Е. А. 597
 Мысовских И. П. 67, 133, 134, 145, 512, 597
 Мышкис А. Д. 109, 276, 463, 472, 487, 506, 548, 597
 Мюллер 56
 Мюльшлегель 205
- Навье 291, 301, 339, 340
 Нагаев С. В. 23, 27, 502, 597
 Нагорный Н. М. 413, 416, 435, 447, 538
 Надарая Э. 47
 Назаров А. Г. 598
 Назаров Б. И. 241
 Назаров Н. Н. 335, 336, 598
 Наймарк М. А. 155, 519, 598
 Намбу 191
 Нарышкина Е. А. 598
 Насави 477
 Насираддин ат-Туси 474—478, 491, 492, 548
 Насирова Т. И. 54, 56
 Наср Ю. 57
 Натанзон В. Я. 328
 Натансон Г. И. 548
 Натансон И. П. 538, 598
 Наумов А. Л. 598
 Наумов И. А. 471, 485, 526, 549
 Наумова И. Н. 108
 Нафгалевиц А. Г. 598
 Нгуен Ван Хъеу 173
 Нгуен Конг Туй 108, 512
 Нееман 177
 Нейгауз М. Г. 125
 Нейгебауер О. 460, 487, 488, 491
 Нейман 46, 72, 74, 75, 79, 87, 91, 298, 417, 504, 510
 Неймарк Ю. И. 250, 526, 598
 Нейшулер Л. Я. 598
 Некрасов А. И. 292, 293, 295, 334, 336, 526, 598
 Нелепин Р. А. 598
 Нельсон-Скорняков Ф. Б. 526
 Неменов Л. М. 549
 Неморарий Иордан 493
 Немчинов В. С. 109, 387, 388
 Немыцкий В. В. 335, 467, 598
 Непомнящий В. А. 538
 Неронов Н. П. 293
 Неслуховский К. С. 381
 Нестеренко Е. М. 469, 470
 Несторович Н. М. 599
- Нечипорук Э. И. 384
 Никитин А. И. 532
 Никифорова Т. Р. 549
 Николадзе Г. Н. 462, 473, 476, 599
 Николаев Н. С. 381
 Николаев П. В. 599
 Николаева Г. А. 146, 512
 Николаенко М. А. 239
 Николаи Е. Л. 218, 240, 526
 Николенко Л. Д. 279
 Никольский С. М. 64, 67, 142, 143, 512, 599
 Никольсон 98
 Ницецкий В. В. 378
 Новиков И. Д. 156, 518
 Новиков П. С. 135, 396—402, 406, 409, 411—415, 420, 427, 432—437, 439—441, 444, 446, 449, 450, 512, 538, 539, 542, 599
 Новиков С. П. 599
 Новодворский Е. Л. 315
 Новожилов В. В. 253, 262
 Новожилов И. В. 241
 Новоселов В. С. 246, 322, 526, 599
 Новосельцев Я. В. 380
 Ногина Е. Ю. 539
 Норвайша Ф. 473, 482
 Норден А. П. 463, 464, 482, 496, 545, 599
 Нудельман Я. Л. 248, 334
 Нужин М. Т. 305, 599
 Нумеров С. Н. 305, 308, 309, 599
 Нуут Ю. Ю. 599
 Ньютон И. 63, 68, 123, 147, 151, 154, 158, 210—212, 456, 460, 461, 463, 464, 495, 496, 543, 547, 548
 Ньюэлл 438
- Обморшев А. Н. 526, 599
 О'Брайен 72
 Обухов А. М. 37, 52, 60, 153, 303, 599
 Овсянников Л. В. 600
 Оганесян Л. А. 90
 Огибалов П. М. 261, 600
 Огиевецкий И. Е. 311, 312, 600
 Огиевецкий В. И. 178
 Оглоблин Н. В. 324, 325, 526, 600
 Огородников К. Ф. 600
 Ожигова Е. П. 468, 484, 486, 549
 Озол О. Г. 316, 526
 Окубо 177
 Окунь Л. Б. 176, 517
 Олевский А. М. 600
 Олевский М. Н. 600
 Олейник О. А. 108, 109, 301, 506, 526, 600
 Оливье Т. 309
 Олоничев П. М. 472
 Омар А. 57
 Омаров Е. О. 109

- Ондар Х. 484
 Опейко Ф. А. 600
 Оппенгеймер Р. 171
 Орбели И. А. 462
 Орбелиани Саба-Султан 473
 Оревков В. П. 415, 438, 454, 537—539, 541
 Орем Н. 493
 Орлов М. Х. 294, 600
 Орловский Э. С. 539
 Осиповский Т. Ф. 543
 Ососков Г. А. 54
 Остапенко В. Н. 600
 Островский Г. М. 600
 Островский И. В. 601
 Остроградский М. В. 7, 237, 264, 463, 466, 470, 471, 475, 483, 545, 547, 549
 Офман Ю. О. 386, 444
 Охочимский Д. Е. 244 —247, 523, 526, 601
 Очан Ю. С. 400, 401, 403, 404, 407, 539

 Павлова Е. А. 447, 539
 Павловский Н. Н. 304, 378, 526, 531
 Павловский Ю. Н. 114
 Павлюк И. А. 601
 Пайерлс Р. 168, 520
 Пайнс Д. 199, 207
 Пайс 177
 Паламодов В. П. 601
 Пальма 55
 Паничкин И. А. 298
 Панов Д. Ю. 66, 98, 107, 253, 512, 601
 Пановко Я. Г. 248
 Панферов В. М. 118
 Панчишин В. И. 378, 531
 Панькин Н. А. 601
 Папалекси Н. Д. 247, 249, 267, 268, 340, 519, 526, 601
 Папкович П. Ф. 65, 258
 Паплаускас А. Б. 2, 464, 465, 467, 497, 549
 Папп 491
 Парасюк О. С. 2, 22, 169, 184, 470, 502, 519, 520, 601
 Паргаманик Л. Э. 154
 Парфентьев Н. Н. 431, 458, 601
 Паскаль Б. 495
 Пасынков Б. А. 601
 Паули 167, 183
 Пахарева Н. А. 306, 526
 Пеано 497
 Педанов И. Е. 362
 Пекар С. И. 163
 Пекарский П. П. 455
 Пелетминский С. В. 163, 516

 Пельпор Д. С. 241
 Пененко В. В. 106
 Пенлеве 242
 Пентковский М. В. 143, 601
 Первозванская Т. Н. 355
 Первозванский А. А. 601
 Перель В. И. 163
 Перельман Я. И. 115
 Перепелкин Д. И. 602
 Персидский К. П. 526, 602
 Петер 412
 Петерсон К. М. 464, 472, 486, 546
 Петрашень Г. И. 258, 259, 602
 Петренко А. И. 602
 Петрина Д. Я. 192, 519
 Петров А. А. 48
 Петров А. З. 155, 519, 602
 Петров А. П. 141
 Петров Б. Н. 251, 391, 531, 602
 Петров В. В. 22, 23, 502, 602
 Петров Г. И. 121, 335, 602
 Петров Г. М. 381
 Петрова Л. Т. 355
 Петрова С. С. 465, 497
 Петровский И. Г. 30, 31, 42, 66, 74, 78, 85, 98, 602
 Петросян Г. Б. 460, 462, 473, 474, 478, 549, 602
 Петунин Ю. И. 602
 Пийль Е. И. 383
 Пикар 113
 Пилатовский В. П. 149, 512
 Пильчак Б. Ю. 436
 Пименов Р. И. 539
 Пинскер А. Г. 602
 Пинскер И. Ш. 315
 Пинскер М. С. (М. Ш.) 36, 37, 44, 61, 502, 602
 Пирсон Э. 46
 Писаренко Г. С. 276, 280, 330, 332, 521, 526, 603
 Пискунов Н. С. 603
 Писмен 92, 100
 Пит Т. 488
 Питаевский Л. П. 157
 Питтель Б. Г. 390
 Планк М. 30, 34, 35, 59, 164, 501
 Пластунова И. А. 355
 Платон 459, 489
 Платонов А. К. 76
 Платонов В. П. 603
 Плеснер А. И. 603
 Плехотин А. П. 603
 Плисс В. А. 526, 603
 Плоткин Б. И. 603
 Плотников И. Т. 528
 Плюшкивичус Р. А. 439, 539
 Поваров Г. Н. 383, 444, 445, 539
 Повзнер А. Я. 603
 Погодин Ю. Я. 101, 515

- Погорелов А. В. 264, 496, 544, 603
 Погосов Г. С. 322
 Погребынский И. Б. 2, 305, 463, 465, 466, 470, 471, 483, 486, 524, 545, 549, 550, 603
 Поддериugin В. Д. 357
 Подловченко Р. И. 368
 Подольский Б. 168
 Подчасова Т. П. 390, 532
 Пожарицкий Г. К. 526
 Позняк Э. Г. 603
 Пойа Г. 142
 Покровский В. Л. 163
 Полак Л. С. 461, 497, 526
 Поливанов К. М. 379
 Поливанов М. К. 178, 187, 190, 517
 Полисар Г. А. 379
 Полишин Г. А. 532
 Половин Р. В. 157
 Положий Г. Н. 92, 134, 147, 148, 259, 305, 306, 512, 526, 603
 Полозов П. П. 528
 Полонников Д. Е. 381, 531
 Полосухина О. А. 603
 Полубаринов И. В. 178
 Полубаринова-Кочина П. Я. (см. Кочина П. Я.)
 Польгаузен 295
 Польский Н. И. 122
 Поляк Б. Т. 389
 Поляк Р. А. 389
 Поляков В. И. 247
 Поляков Е. А. 419, 443, 449, 535, 539
 Полячек 53
 Померанчук И. Я. 155, 170, 173, 175, 176, 186, 516—520
 Пономарев В. И. 604
 Понтрягин Л. С. 59, 67, 247, 249, 250, 288, 389, 515, 526, 531, 604
 Попов А. А. 604
 Попов А. И. 604
 Попов В. Н. 359
 Попов Г. Н. 458
 Попов Г. Я. 260, 604
 Попов Е. П. 284, 332
 Попович М. В. 438
 Поппель А. В. 435
 Порецкий П. П. 431
 Португаль В. Б. 548
 Поршнева В. Н. 368
 Поспелов Г. С. 391, 531
 Поссе К. А. 485, 604
 Пост Э. 352, 384, 409—411, 413, 414, 416, 418—422, 444, 448, 449, 537, 538, 542
 Постников А. Г. 468, 544, 604
 Постников В. Н. 525
 Постников М. М. 546, 604
 Потапов В. П. 604
 Потапов В. С. 604
 Поттосин И. В. 357, 369
 Прандтль 291, 301
 Преиндж 205
 Преображенская Э. А. 405
 Привалов И. И. 604
 Пригожин И. 197
 Приказчиков В. Г. 96, 97, 512
 Прилепко А. И. 135
 Примах М. Е. 389
 Проди Г. 340
 Прозоровская О. И. 113
 Прокопов В. К. 259
 Прокопов Г. П. 101
 Проскура Г. Ф. 295
 Прохоров Ю. В. 17, 20—22, 43—45, 49, 56, 61, 501, 502, 604
 Прошен 58
 Прудников В. Е. 466, 467, 482, 486, 549
 Пуанкаре А. 239, 240, 248, 266, 267, 269, 289, 333, 463, 496, 520
 Пуассон 29, 55, 85—89, 92—95, 109, 110, 117, 197, 299, 497, 504, 506, 510, 522
 Пугачев В. С. 52, 61, 604
 Пудовкин М. А. 604
 Пулькин С. П. 605
 Путята Т. В. 467, 469, 471, 472, 527, 549, 605
 Пухов Г. Е. 347, 381, 531, 605
 Пфейффер Г. В. 471, 605
 Пхакадзе Ш. С. 605
 Пчелников Н. И. 531
 Пшеборский А. Б. 605
 Пшеничный В. Н. 389, 390, 531
 Пшичук А. Н. 390, 532
 Пыхачев Г. Б. 307
 Пыхтунов М. Т. 115
 Пясковский Б. В. 469, 471
 Пятецкий-Шапиро И. И. 605
 Рабин 423
 Рабинович Б. И. 247
 Рабинович И. М. 247, 312
 Рабинович И. М. 463, 472, 487, 548
 Рабинович М. С. 154
 Работнов Ю. Н. 253, 260, 261, 605
 Рагульские К. М. 605
 Раздымаха Г. С. 472, 489
 Размадзе А. М. 473, 605
 Разумихин Б. С. 605
 Райков Д. А. 29, 605
 Райк А. Е. 488, 490, 493, 549
 Райс 424
 Ракитский Ю. В. 126, 129
 Раман Ч. 171
 Рамануджан 497
 Рапорт И. М. 135, 137, 605
 Расулов М. Л. 606
 Расстригин Л. А. 390, 531

- Рафальсон З. Х. 119
 Рахманинов И. И. 471
 Рахманов П. А. 455
 Рахматулин Х. А. 254, 606
 Рахматулина Л. Ф. 112
 Рашевский П. К. 238, 463, 496, 544, 549, 606
 Рвачев В. Л. 260, 606
 Рвачева Е. Л. (см. Ющенко Е. Л.)
 Редже 174, 175
 Редько В. Н. 365—367, 369, 385
 Рейнольдс 301
 Рекало М. П. 176, 178
 Рекфорд 92, 100
 Релей 261, 264, 298
 Ремез Е. Я. 2, 64, 143, 389, 463, 471, 483, 512, 531, 549, 606
 Ренъи А. 55
 Решетняк Ю. Г. 606
 Решетов Л. Н. 318—320
 Ржаницын А. Р. 261
 Ривкинд В. Я. 89, 512
 Ривкинд Я. И. 24
 Ризенкамф Б. К. 305
 Рикайзен 203
 Риман 234, 238, 251, 256, 300, 305, 430, 454, 463, 496, 535
 Ринда 457
 Ритц 66, 116—118, 120, 121, 123, 261, 262, 511
 Ритчи 423
 Рифтин Л. П. 316, 317
 Рихтер В. 23
 Рихтмайер 75
 Робертс 313
 Робинсон А. 442
 Робинсон Р. 419
 Рогаченко В. Ф. 482
 Рогинский В. Н. 383
 Рогов Т. Н. 115
 Рогожин В. С. 606
 Рогозин Б. А. 20, 21, 499
 Родин Ю. Л. 606
 Роднянский А. М. 409
 Родосский К. А. 606
 Родриг 317, 325
 Родыгин Л. В. 286
 Рожанская М. М. 465, 478
 Рожанская Ю. А. 606
 Рождественский Б. Л. 606
 Розанов Ю. А. 22, 27, 36, 44, 45, 499, 502, 606
 Розе С. Н. 123, 262
 Розенауэр 328
 Розенберг В. Я. 529
 Розенблатт М. 27
 Розенвассер Е. Н. 341, 606
 Розенфельд Б. А. 2, 463—465, 467, 474, 476—478, 482, 491, 492, 494, 497, 498, 546, 549, 607
 Розовский М. И. 261, 607
 Розовский М. С. 320, 524
 Розовоэр Л. И. 528
 Ройтенберг Я. Н. 241, 243, 607
 Ролль 495
 Романив О. Н. 329
 Романов Н. П. 607
 Романов Ю. И. 404
 Романовский В. Б. 607
 Романовский В. И. 11, 25, 26, 46, 50, 502, 607
 Романовский И. В. 49, 390
 Романовский П. И. 607
 Росляков Г. С. 529
 Россер 440
 Россинский С. Д. 464, 467, 486, 607
 Ростовцев Н. А. 259, 260, 607
 Роте 110
 Роуз 434, 435
 Рохлин В. А. 607
 Рубаник В. П. 276, 283, 607
 Рубинов А. М. 389
 Рубинштейн Г. Ш. 388, 607
 Рубинштейн Л. И. 607
 Руднев Г. В. 608
 Ружевиц С. 396, 399
 Рукавицын И. Н. 608
 Румер Ю. Б. 171, 520, 608
 Румянцев В. В. 240, 241, 525—527, 608
 Румянцев С. А. 521
 Рунге 123, 130—133, 510, 514
 Русанов В. В. 91
 Русьян Ц. К. 608
 Рутицкий Я. Б. 608
 Рутман М. А. 389, 530, 608
 Руффини 477
 Рухадзе А. К. 608
 Рыбакова Ю. В. 118
 Рыбашов М. В. 380
 Рыбников К. А. 2, 460, 464, 465, 467, 481, 494—496, 545, 549, 608
 Рыбкин Г. Ф. 467
 Рывкин С. С. 243
 Рыжков В. В. 608
 Рыков В. В. 57
 Рымаренко Б. А. 608
 Рынин И. А. 245
 Рытов С. М. 163
 Рюэлль 208
 Рябенский В. С. 70, 72, 74, 98, 507, 512
 Рябов Ю. А. 608
 Ряго Г. А. 472, 487, 609
 Сабиров М. С. 546
 Сабиров Т. 341, 342
 Сабит ибн Корра 492

Савада 199
 Савенков В. Н. 147, 512
 Савин Г. Н. 256, 257, 261, 331, 527, 609
 Савич С. Е. 609
 Сагомонян А. Я. 609
 Садовский Л. Е. 609
 Садыков Х. У. 474
 Сазонов В. В. 24, 45, 502, 609
 Сайкин С. Ф. 609
 Саймон 438
 Саккери 476, 492
 Сакробоско 494
 Сакс 406
 Салам 183
 Салахитдинов М. С. 543, 609
 Салехов Г. С. 68, 609
 Салихов Н. П. 129
 Самандров Э. А. 56
 Самарский А. А. 66, 75, 79, 80, 82, 83, 88, 90, 93, 94, 96, 99, 101, 103—106, 110, 512—514, 609
 Самойленко А. М. 274, 284, 609
 Самойлова-Яхонтова Н. С. 127, 609
 Самокиш Б. А. 118, 121, 122
 Самусенко А. В. 114
 Самусь В. М. 381
 Сансур А. Ю. 492
 Сапа В. А. 247
 Сапагovas М. П. 90, 513
 Сапогов Н. А. 27, 29, 484, 548, 609
 Сапонджян О. М. 610
 Саранцев В. П. 155
 Сарв Я. Х. 462, 486, 610
 Саркаваг О. 478
 Сарманов О. В. 25, 26, 484, 610
 Сармин Э. И. 110
 Сарымсаков Т. А. 26, 28, 502, 549, 610
 Сарычев В. А. 244
 Сатаров И. 455
 Саульев В. К. 83, 89, 96, 98, 99, 101, 513, 610
 Сахаров А. Д. 171, 519
 Сахнович Л. А. 610
 Саченков А. В. 610
 Свешников А. А. 243, 244, 527, 610
 Свешников А. Г. 610
 Свирский И. В. 118, 119, 610
 Севастьянов Б. А. 24, 37, 54, 56, 501—503
 Северинов Л. И. 141
 Сегал Б. И. 460, 610
 Седов Л. И. 76, 213, 239, 294, 297—299, 301—303, 379, 519, 523, 527, 610
 Селиванов Д. Ф. 611
 Селивановский Е. А. 396, 400, 421, 539
 Семендяев К. А. 108, 611
 Семенов И. П. 110, 113
 Семенов М. В. 314
 Семенов Н. С. 115
 Семик В. П. 358, 368
 Сеньюков А. Г. 127
 Сердюкова С. И. 74, 513
 Серебровский А. А. 62
 Серпинский В. 395, 400
 Сигалов А. Г. 611
 Силаков В. Д. 465, 485, 550
 Сильвестр 326
 Сильвестров Э. Е. 322
 Сикорский Ю. С. 611
 Симанзик 191
 Симоненко И. Б. 611
 Симонов В. Н. 135
 Симонов Н. И. 465, 466, 470, 471, 480—483, 497, 545, 549, 611
 Симонов Р. А. 464, 487
 Синай Я. Г. 23, 59, 503, 611
 Синцов Д. М. 239, 456, 458, 471, 485, 549, 611
 Синявский А. Л. 264
 Сираждинов С. Х. 22, 26, 51, 58, 549, 611
 Сиразетдинов Т. К. 611
 Ситников К. А. 611
 Сичкар О. А. 469
 Скальская И. П. 119
 Скитович В. П. 28
 Скляренко Е. Г. 611
 Скобелкин В. И. 611
 Скобля Н. С. 149, 509, 513
 Скопец З. А. 611
 Скорняков Л. А. 612
 Скоробогатько В. Я. 612
 Скороход А. В. 12, 24, 29, 39—41, 43—45, 499, 503, 612
 Скороходько Э. Ф. 438
 Скрыбин В. И. 261
 Скуридин М. А. 321
 Скурихин В. И. 345
 Слезкин Н. А. 295, 296, 298, 527, 612
 Слепцова Г. П. 523
 Слепинский И. В. 431
 Слисенко А. О. 438, 454, 539, 541
 Слободенюк Н. П. 24, 43
 Слободецкий Л. Н. 612
 Слободянский М. Г. 66, 109—111, 119, 258, 513, 612
 Слугинов С. П. 612
 Слудский 242, 243
 Слуцкий Е. Е. 11, 12, 30, 32, 33, 35, 38, 46, 52, 59, 503, 612
 Сметанич Я. С. 435, 540
 Смирнов А. Д. 369
 Смирнов А. Ф. 248
 Смирнов В. А. 438, 540
 Смирнов В. И. 2, 241, 254, 258, 460, 462—464, 468, 480, 484, 485, 513, 547, 548, 550, 612

- Смирнов В. Н. 142
 Смирнов Д. М. 612
 Смирнов И. М. 528
 Смирнов Н. В. 12, 22, 43, 46, 47, 51, 499, 503, 612
 Смирнов Ю. М. 612
 Смирнова Т. Н. 355
 Смогоржевский А. С. 482, 483, 612
 Смоленский Б. И. 613
 Смолицкий Х. Л. 120, 512, 613
 Смольников Н. Я. 531
 Смоляков П. Т. 613
 Смородинский Я. А. 160, 161, 170, 178, 520
 Собельман В. И. 359
 Собиоров Г. С. 464, 474
 Соболев В. И. 613
 Соболев С. Л. 68, 79, 91, 125, 143, 144, 183, 254, 258, 335, 339, 463, 513, 514, 527, 613
 Соболевский П. Е. 339, 340, 613
 Соболев И. М. 145
 Содномов Б. С. 439, 540
 Соколов А. А. 155, 518
 Соколов И. Г. 613
 Соколов Н. П. 613
 Соколов П. Т. 261
 Соколов Ю. Д. 2, 67, 134, 242, 243, 308, 514, 527, 550, 613
 Соколовский В. В. 108, 253, 527
 Соловьев А. Д. 55, 57, 58, 500
 Соловьев В. Г. 202, 517
 Соловьев Л. Д. 178
 Соловьев П. А. 613
 Соловьев Ю. И. 259
 Сологуб В. С. 2, 469—471, 550
 Солодов В. М. 145
 Солодовников А. С. 613
 Солонников В. А. 339, 613
 Соляник-Красса К. В. 258, 259
 Сомов О. И. (И. И.) 471, 483, 547, 549
 Сомов П. О. 310
 Сонин Н. Я. 456, 468, 485, 547
 Соркин Ю. И. 385
 Сорокина Л. А. 483, 496
 Софронов И. Д. 91, 105
 Сосис П. М. 531
 Софронов И. Д. 91, 105
 Софронов М. 468, 550
 Сохоцкий Ю. В. 485, 613
 Спасский И. Г. 479
 Спивак М. А. 382, 385
 Спринджук В. Г. 614
 Сретенский Л. Н. 135, 241, 296—298, 463, 468, 495, 497, 527, 614
 Срубщик Л. С. 338
 Стадницкий Ю. М. 379
 Станюкович К. П. 157, 299, 614
 Старжинский В. М. 614
 Стародубцев С. В. 550
 Статулявичус В. А. 27, 28, 503, 614
 Стеклов В. А. 63, 67, 142, 241, 458, 460, 467, 471, 472, 514, 545, 546, 614
 Стенин Н. П. 147
 Степанов А. Е. 381
 Степанов В. А. 359, 362
 Степанов В. В. 242, 463, 464, 467, 486, 496, 614
 Стефан 82, 106, 111
 Стечкин С. Б. 614
 Стилтьес 256
 Стогний А. А. 357, 362, 382
 Стокс 291, 301, 339, 340
 Столяров Г. К. 362, 530
 Стоун 15
 Стратонович Р. Л. 40, 51, 52, 276, 503, 614
 Стрешнева В. А. 115
 Струве В. В. 461, 487, 488
 Струминский Б. В. 176
 Струминский В. В. 299
 Стрыгин В. В. 340—342
 Стукало А. С. 126
 Ступина И. Д. 402, 404, 405, 540
 Ступоченко Е. В. 614
 Стяжкин Н. И. 465, 485, 550
 Субботин А. Л. 438
 Субботин М. Ф. 127, 242, 614
 Субботовская Б. А. 444, 540
 Субханкулов М. А. 614
 Суворов Г. Д. 614
 Суворов Ф. М. 472
 Судаков В. В. 519
 Судаков В. Н. 49
 Суетин П. К. 614
 Сулима П. 482
 Султангазин У. М. 106
 Суньцзы 493
 Супруненко Д. А. 615
 Сурин С. С. 388
 Суслин М. Я. 395, 400, 439, 534, 543
 Сухомлинов Г. А. 615
 Сухомлинов М. И. 455
 Сучков В. А. 101, 515
 Сушкевич А. К. 458, 462, 471, 472, 485, 486, 550, 615
 Схоутен 238, 239
 Сыркин Г. И. 540
 Сыроватский С. И. 157
 Сырокомский А. И. 458
 Сытая Г. Н. 43
 Сæведж 50
 Тавхелидзе А. Н. 152, 176, 191, 470
 Тавхелидзе Д. С. 316
 Тайманов А. Д. 408, 409, 415, 442, 451, 534, 540, 615
 Тайцлин М. А. 415, 428, 442, 451, 534, 540
 Такахаши 205

- Талалян А. А. 615
 Талдыкин А. Т. 615
 Таль А. А. 528
 Тамамшев А. А. 316
 Тамм Б. Г. 369
 Тамм И. Е. 157, 162, 170, 171, 174, 519, 520
 Тамме Э. 473, 487
 Тамразов П. М. 615
 Тарский А. 405, 415, 428, 442
 Тартаковский В. А. 427, 540, 615
 Тарханишвили Г. 478
 Татевский В. М. 615
 Тахванов Г. И. 381
 Тейлор 60
 Теляковский С. А. 615
 Темляков А. А. 615
 Темченко М. Е. 241, 527
 Теодорчик К. Ф. 269
 Тер-Крикоров А. М. 337, 338, 523, 615
 Тер-Мартirosян К. А. 161
 Тер-Микаэлян М. Л. 519
 Тер-Мкртичян Л. Н. 258
 Тер-Степанян Г. И. 615
 Терсенов С. А. 615
 Тетельбаум И. М. 380, 531
 Тибилов Т. А. 331
 Тивончук В. Н. 243
 Тиман А. Ф. 616
 Тимофеев Б. Б. 345
 Тимофеев В. Н. 484, 548
 Тимошенко 261
 Тимченко И. Ю. 456—458, 462, 616
 Тир К. В. 318
 Тисса 197
 Титов В. К. 380
 Тихомандрицкий М. А. 10, 616
 Тихонов А. Н. 65—67, 75, 76, 79, 82, 83, 90, 96, 129, 132, 135, 137—140, 149, 287, 296, 335, 514, 543, 616
 Тихонов В. И. 616
 Тихонравов М. К. 244, 245
 Ткачев Л. И. 241
 Тодоров И. Т. 191, 519
 Тозони О. В. 378, 531, 616
 Толмачев В. В. 194, 202, 517, 519
 Толстов Г. П. 543, 616
 Толстов Ю. Г. 148
 Томилин А. Н. 369
 Томонага С. 166, 168
 Томсон 377
 Тоноян Р. Н. 368
 Тоом А. Л. 444
 Топорнин Д. С. 616
 Торжевский А. П. 76
 Трапезников В. А. 381, 531
 Трахтенброт Б. А. 382—384, 386, 408, 412—415, 417, 418, 420, 422—424, 428, 431, 437, 440, 442, 444, 446, 448, 530, 531, 535, 540, 616
 Треногин В. А. 338
 Треффт 119, 261
 Трикоми 301
 Трифонов Н. П. 357, 529, 531
 Трохимчук Ю. Ю. 616
 Трубин В. А. 391
 Тумаков И. М. 464
 Туманян С. Х. 48
 Туманьян Т. Г. 462, 473, 474, 616
 Тумаркин Г. Ц. 616
 Тумаркин Л. А. 616
 Тумаркин С. А. 254, 616
 Тумашев Г. Г. 617
 Тур Л. П. 390, 532
 Тураев Б. А. 461
 Туранский В. И. 633
 Турецкий А. Х. 141—143, 504, 617
 Туркин В. К. 617
 Турчанинов А. С. 617
 Тутубалин В. Н. 24, 502
 Тьюринг 352, 386, 409, 410, 415, 417—419, 423, 447, 452, 453, 532, 535, 541
 Тэт 377
 Тябликов С. В. 163, 194, 199, 204, 517, 519, 617
 Уатт 309, 325
 Угодчиков А. Г. 148, 378, 531, 617
 Уемов А. И. 438
 Узаков Ю. К. 617
 Уланов Г. Н. 251
 Улитко А. Ф. 260
 Улугбек 474, 477, 478, 546
 Ульянов П. Л. 617
 Умэдзава 205
 Унковский В. А. 617
 Уразбаев Б. М. 617
 Уральцева Н. Н. 617
 Урселл 194
 Урысон П. С. 335, 336, 399, 463, 485, 617
 Успенский А. К. 617
 Успенский В. А. 106, 352, 408, 412—414, 417, 418, 420, 424, 425, 431, 446—448, 531, 535, 540, 617
 Устинова Н. Н. 109
 Уфлянд Я. С. 119, 259, 260, 618
 Ушаков В. Б. 381, 531, 618
 Ушаков И. А. 58
 Фаворский А. П. 114
 Фаге М. К. 618
 Фаддеев Д. К. 65, 514, 618
 Фаддеев Л. Д. 161, 618
 Фаддеева В. Н. 65, 109, 116, 514
 Файнберг Я. Б. 154, 155
 Фалевич Б. Я. 440, 540
 Фалес 498
 Фалькович С. В. 298, 299, 301, 305

- Фан Динь Зиеу 454
 Фараби 475, 478
 Фарадей 151
 Фату П. 267
 Федоренко Б. В. 483
 Федоренко Н. П. 388, 391
 Федоренко Р. П. 95, 515
 Федоров В. С. 618
 Федоров Е. С. 618
 Фейгин М. И. 333
 Фейнберг Е. Л. 157
 Фейнман Р. 166, 174, 180, 182, 191, 192, 199, 519
 Феллер 17, 38, 40, 47, 503
 Фель С. Е. 480
 Фельдбаум А. А. 380, 531
 Ферма 491
 Ферми Э. 157, 161—163, 167, 200—202, 207
 Фещенко С. Ф. 279, 331, 527, 618
 Филин А. П. 248, 618
 Филиппов А. П. 247, 330
 Филиппов А. Ф. 70, 72, 74, 98, 512, 515
 Филиппов В. П. 408
 Филиппова А. А. 47
 Филоненко-Бородич М. М. 336
 Фильчаков П. Ф. 147, 148, 305, 378, 515, 527, 531, 618
 Фиников С. П. 618
 Финкельштейн Б. В. 46
 Финкельштейн Ю. Ю. 390
 Финн В. К. 438
 Финвети 19
 Фихтенгольц Г. М. 618
 Фицнер Л. Н. 380
 Фишер И. З. 194
 Фишер 46, 49, 50
 Флато 287
 Флейшман Б. С. 618
 Флоке 272
 Фодчук В. И. 274, 276
 Фок В. А. 155, 157, 160, 161, 167, 168, 202, 203, 255, 519, 520, 618
 Фоккер 30, 34, 35, 59, 164, 501
 Фомин С. В. 619
 Форте 54
 Фрадкин Е. С. 163, 169, 519, 520
 Фрадлин Б. Н. 467, 469, 471, 473, 527, 549, 619
 Франк И. М. 157, 519
 Франк Л. С. 141
 Франк М. Л. 619
 Франкен 54
 Франкль Ф. И. 297, 298, 301, 302, 481, 523, 550, 619
 Франкфурт Л. Л. 176
 Франкфурт У. И. 467, 495
 Фредгольм И. 133, 139, 146, 148, 149, 255, 256, 497, 508, 514
 Фрейвалд Р. В. 423, 541
 Фрейдлин М. И. 42
 Фрейман Г. А. 619
 Фрелих 200—202
 Френе 487
 Френк А. М. 467, 495
 Френкель 440
 Френкель В. И. 541
 Френкель Я. И. 161—163, 520
 Фреше 14
 Фридберг 422, 424, 448
 Фридлендер Г. О. 241
 Фридман А. А. 59, 60, 156, 294, 458, 520, 619
 Фридман А. А. 415, 427, 449, 451, 541
 Фридман В. М. 341
 Фридрихс 78, 117, 337, 339
 Фробениус 481
 Фролов В. М. 115
 Фролов Г. В. 517
 Фролов Г. Д. 368, 528, 530
 Фрумкин П. В. 115
 Фрязинов И. В. 80, 94, 99, 105, 513, 515
 Фуко 213
 Фукс Б. А. 619
 Фурье 35, 111, 122, 140, 147, 183, 188, 189, 199, 204, 207, 256, 259, 260, 305, 308, 309, 337, 377, 379, 514, 520
 Фуфаев Н. А. 619
 Хааг 187, 288
 Хаар 24
 Хавинсон С. Я. 619
 Хавский П. В. 455
 Хажалия Г. Я. 148, 515, 619
 Хайерс 337
 Хайкин С. Э. 333, 515, 519
 Хайман 72
 Хайям Омар 463, 467, 476, 477, 491, 492, 549
 Халанай А. 276
 Халатников И. М. 156, 170, 510, 518
 Халилов З. И. 486, 550, 619
 Халмош 15
 Хао Ван 419, 438
 Хапланов М. Г. 619
 Хара И. С. 147, 515
 Харадзе А. К. 619
 Харазов Д. Ф. 620
 Харасахал В. Х. 620
 Харкевич А. Д. 383
 Харламов П. В. 620
 Харрик И. Ю. 117
 Хартманис 423
 Хартри 160, 202, 203
 Харшиладзе Ф. И. 620
 Хаскинд М. Д. 298, 620
 Хасьминский Р. З. 38, 39, 42, 503

- Хаусдорф Ф. 400, 402, 407, 408
 Хахубия Ц. Г. 48
 Хапет Б. И. 208
 Хаяши Т. 265
 Хведелидзе Б. В. 620
 Хейл Дж. К. 276, 286
 Хеккендорф Х. 22
 Хенни 423
 Хепп К. 184, 520
 Хилл 334
 Хинчин А. Я. 11, 12, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 25, 28—33, 36, 40, 42, 52—55, 59, 61, 503, 620
 Хичий О. Ф. 480
 Хлодовский И. Н. 620
 Хмелевский Ю. И. 541
 Хованский А. Н. 481, 482
 Ходжаев К. Ш. 247
 Хорезми 474, 477
 Хорнер 477
 Хорошун Л. П. 257
 Хопф Е. 339, 340
 Хотимский В. И. 550
 Хренов Л. С. 620
 Христианович С. А. 107, 108, 254, 298, 527, 620
 Хрусталева А. Ф. 620
 Хуанг 199
 Худакон Ю. И. 140
 Хумал А. К. 472, 620
 Хургин Я. И. 621

 Цандер Ф. А. 245
 Цвейг 176
 Цейтен Г. Г. 460, 477, 490, 491
 Цейтин Г. С. 413, 414, 423, 426, 430, 447, 449, 453, 534, 541
 Церковников Ю. А. 202, 204, 517
 Цермело 440
 Петлин М. Л. 387, 389, 444, 528, 541
 Циммерман В. А. 621
 Цинман Л. Л. 441, 449, 541
 Циолковский К. Э. 245, 246
 Цитлавадзе Э. С. 621
 Цхадава Ф. Г. 107, 127
 Цхакава Д. Г. 462, 473, 474, 478, 550, 621
 Цыганкова Э. Г. 469
 Цыкунов Ф. А. 469
 Цыпкин Я. З. 621

 Чавчанидзе В. В. 621
 Чайковский Н. А. 459, 462, 469, 472, 473, 482, 550, 621
 Чалый А. Т. 621
 Чантладзе Т. Л. 42, 45
 Чаплыгин С. А. 63, 123, 153, 215, 237, 238, 241, 292—298, 303, 471, 527, 621
 Чарин В. С. 621

 Чарный И. А. 307, 621
 Чахтаури А. И. 622
 Чеботарев Н. Г. 377, 460, 461, 463, 482, 495, 622
 Чебышев П. Л. 7—9, 15—17, 20, 63, 64, 67, 216, 309, 313—315, 322, 456, 457, 462, 463, 465, 466, 472, 483, 484, 503, 509, 521, 522, 524, 543—545, 547, 549
 Чегис И. А. 445
 Чеголин П. М. 529
 Челен 190
 Челидзе В. Г. 622
 Челноков Н. И. 113
 Челомей В. Н. 284
 Челпанов И. Б. 241
 Ченцов Н. Н. 43, 45, 47, 91, 145
 Чепова Т. К. 115
 Черенин В. П. 390, 622
 Черепанов Г. П. 622
 Черепков Ф. С. 65
 Черкудинов С. А. 315, 319, 521
 Черников Н. А. 191, 519
 Черников С. Н. 389, 532, 622
 Чернин К. Е. 29, 109
 Черноусько Ф. Л. 390
 Чернышенко Э. А. 243
 Черный Г. Г. 302
 Черняев М. П. 469, 622
 Чернявский В. С. 416, 447, 541
 Черпаков П. В. 622
 Черский Ю. И. 622
 Черч А. 409, 410, 416, 417, 426, 428, 431, 437, 447
 Четаев Н. Г. 239, 240, 294, 527, 622
 Четверухин Н. Ф. 622
 Чибисов Д. М. 46, 47
 Чириккова Л. И. 622
 Чириков М. В. 495
 Чистяков В. П. 24, 38
 Чогошвили Г. С. 2, 473, 476, 548, 622
 Чуб А. Т. 476
 Чудакон Е. А. 319
 Чудакон Н. Г. 622
 Чудновский Г. В. 443, 452
 Чудов Л. А. 106, 141
 Чунихин С. А. 623
 Чупров А. А. 484
 Чушкин П. И. 108, 114, 505

 Шабат Б. В. 524, 550, 623
 Шагинян А. Л. 623
 Шайдаева Т. А. 142
 Шайн Б. М. 623
 Шалаевский О. В. 29, 49
 Шаль 326
 Шаманский В. Е. 94, 515
 Шамбуров В. А. 318

- Шанин Н. А. 412—415, 429, 430, 433—435, 438, 453, 454, 541, 623
 Шапиро Г. С. 254, 259, 260
 Шапиро З. Я. 517
 Шапиро И. С. 161, 520
 Шапиро Я. Л. 623
 Шапиро-Пятецкий И. И. (см. Пятецкий-Шапиро И. И.)
 Шарковский А. Н. 274, 284, 285, 623
 Шарыгин И. Ф. 145
 Шаталов К. Т. 522
 Шаташвили А. Д. 45
 Шатровский Л. И. 623
 Шатунова Е. С. 464, 482, 496
 Шатуновский С. О. 431, 456, 543, 623
 Шаудер Ж. 338
 Шафаревич И. Р. 463, 471, 623
 Шафрановский К. И. 548
 Шафрот 200
 Шахбазов А. А. 56
 Шахбазян К. В. 355
 Шахбазян К. Х. 319
 Шахов Ю. А. 131, 507
 Шашкин Ю. А. 135
 Шварц 93, 147, 304, 510, 512, 515, 634
 Шварц А. С. 623
 Шварц Л. 183
 Шварцшильд 155
 Швец М. Е. 623
 Швецов К. И. 471, 479, 480, 544
 Швингер Дж. 166, 168, 169, 180
 Шебалина О. П. 129
 Шевляков Ю. А. 623
 Шеврин Л. Н. 623
 Шевырев С. П. 455
 Шевченко К. Н. 624
 Шейнин О. Б. 496
 Шейнфинкель М. И. 436, 437, 542
 Шелест В. П. 152, 176, 198, 470
 Шеннон К. 383, 384, 443, 444
 Шепелев В. М. 624
 Шепердсон Д. 430
 Шереметевский В. П. 456
 Шерман Д. И. 255, 256, 258, 624
 Шермергор Г. О. 257
 Шестаков В. И. 353, 383, 443, 530, 541, 542
 Шестаков В. М. 309
 Шестоппал А. Ф. 274
 Шестоппал Г. А. 542
 Шеффе 50
 Шеффер 535
 Шехтер В. М. 517
 Шидловский А. Б. 624
 Шилейко А. В. 381
 Шилов Г. Е. 550, 624
 Шиманов С. Н. 276, 342, 624
 Шиндлер А. А. 123
 Ширков Д. В. 169, 170, 178, 185, 186, 202, 517, 624
 Ширакаци Анания 462, 473, 478
 Широков А. П. 624
 Широков П. А. 547, 624
 Широков Ю. М. 624
 Ширшов А. И. 624
 Ширяев А. В. 27
 Ширяев А. Н. 51, 52, 61, 390, 532, 624
 Сиханович Ю. А. 442, 533, 542
 Шишков В. А. 319
 Шкиль Н. И. 279
 Шкурба В. В. 388, 390, 531, 532
 Шмаин И. Х. 435
 Шмелева 451
 Шмелькин А. Л. 624
 Шмидт О. Ю. 461, 485, 624
 Шмидт Ф. Г. 293, 340
 Шмушкевич И. М. 171
 Шмыглевский Ю. Д. 108
 Шнейдер В. Е. 403, 542
 Шнейдмюллер В. И. 624
 Шнепс М. 57
 Шнирельман Л. Г. 335, 338, 625
 Шор Н. З. 388—390, 529, 531, 532
 Шор Я. Б. 58
 Шоу 438
 Шредер К. 468
 Шредер Э. 497
 Шредингер Э. 159, 161, 167, 175
 Шрейдер С. Н. 493
 Шрейдер Ю. А. 515
 Шридхара 493
 Шриффер 200—203
 Штаерман И. Я. 253, 625
 Штарк 91
 Штатланд Э. С. 41
 Штепа Н. И. 129
 Штермер 123, 126, 127
 Штокало И. З. 2, 271, 272, 463, 464, 469—471, 483, 486, 527, 545, 550, 625
 Штраус А. В. 625
 Штурм 95, 96, 512, 514
 Штыкан А. Б. 469, 495
 Шубников А. В. 625
 Шуваев В. А. 247
 Шуликовский В. И. 625
 Шульгин М. Ф. 237, 528, 625
 Шульгина Л. Т. 141, 510
 Шур М. Г. 39, 503
 Шура-Бура М. Р. 91, 125, 128, 353, 355, 356, 359, 362, 364, 369, 515, 528—532, 625
 Шураньи Я. 437
 Шурыгин В. А. 454, 542
 Шухов В. Г. 215
 Шютте 437
 Щегольков Е. А. 397, 398, 401, 406, 407, 542

Щелкачев В. Н. 307, 309
Щербачков Р. Н. 625
Щербань К. М. 487
Щербина К. М. 625
Щиголев Б. М. 625
Щипанов Г. В. 251
Щипанов П. К. 625

Эдсейн Р. 497
Эзрохи И. А. 145
Эзрохи Т. Г. 145
Эйгенсон Л. С. 379
Эйдельман С. Д. 626
Эйдельмант М. И. 58
Эйдус Д. М. 85, 96, 117, 626
Эйлер Л. 63, 90, 128, 133, 134, 139,
142, 153, 212, 291, 335, 336, 377,
460—463, 466, 468, 470, 471, 480—
482, 509, 544, 545, 547—549
Эйнштейн А. 151, 154—156, 158, 162,
167
Эльсгольц Л. Э. 626
Энеев Т. М. 247
Эпштейн Ю. В. 520
Эрбран 439, 538
Эрглис В. Р. 529
Эрланг 53, 54, 56
Эришер Ю. Б. 323
Эссен 20
Этерман И. И. 381, 532
Эфендиев М. Р. 550
Эфрос А. М. 626

Юдин Д. Б. 388, 390, 532, 626
Юдин М. И. 60
Юдович В. И. 338—340, 528
Юкава 174
Юрчук А. П. 532
Юрьев И. М. 298
Юсупов К. Ю. 113
Юсупов Н. В. 461, 476, 551

Юцис А. П. 626
Юшкевич А. А. 38—40, 503, 626
Юшкевич А. П. 2, 459—461, 463—468,
475—477, 479, 480, 482, 483, 486,
489, 491, 492, 494—498, 545, 546,
548—551, 626
Юшков П. П. 98, 99, 626
Ющенко Е. Л. (Рвачева-Ющенко) 20,
22, 47, 352, 354, 357, 358, 365—367,
502, 528, 529, 532, 626

Яксон Х. Я. 626
Яблоков В. А. 626
Яблонский С. В. 384, 444, 445, 542,
626
Яглом А. М. 36, 37, 52, 53, 60, 500,
504, 525, 626
Яглом И. М. 467, 627
Ядренко М. И. 37, 504
Ядренко Э. К. 532
Якоби 240, 242, 497, 511
Яковлев К. П. 627
Яковлев М. А. 355
Яковлев М. Н. 121
Якубович В. А. 251, 522, 524, 627
Январашвили В. М. 316
Янг 199, 208
Яненко Н. Н. 66, 80, 83, 101, 102, 104—
106, 504, 511, 515, 627
Янков В. А. 398, 435, 436, 542
Янов Ю. И. 367, 368, 385, 542
Яновская С. А. 431—433, 438, 459,
460, 464, 465, 482, 484, 486, 488,
490, 494—496, 542, 551, 627
Янович Л. А. 145, 510, 515
Янцен 298
Янчевский С. А. 627
Яровицкий Н. В. 56, 391, 532
Ярцев Ю. Л. 123
Ясинский Ф. С. 335
Яскова Г. Н. 121
Ястремский Б. С. 627

О Г Л А В Л Е Н И Е

Основные направления математики в СССР

ГЛАВА ПЕРВАЯ. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ВВЕДЕНИЕ (Б. В. Гнеденко)	7
ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (И. И. Гихман)	13
ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ (А. В. Скороход)	29
1. Первый период развития теории случайных процессов	30
2. Второй период развития теории случайных процессов	36
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА (В. С. Королюк)	45
РАЗВИТИЕ ПРИКЛАДНЫХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (Б. В. Гнеденко)	52

ГЛАВА ВТОРАЯ. ЧИСЛЕННЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

ВВЕДЕНИЕ (В. И. Крылов)	63
МЕТОД СЕТОК (А. А. Самарский)	68
1. Общие вопросы теории разностных схем	70
2. Разностные методы для эллиптических уравнений	84
3. Разностные методы для нестационарных задач	97
ДРУГИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (В. В. Бобков, П. И. Монастырский)	106
1. Метод характеристик	106
2. Методы понижения размерности задач	108
3. Вариационные и примыкающие к ним методы	116
4. Приведение краевых задач к задачам с начальными условиями.	123
5. Разностные методы для обыкновенных дифференциальных уравнений	126
6. Одношаговые методы	130
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (И. П. Мысовских)	133
НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЕ (В. Я. Арсенин, О. А. Лисковец)	134
1. Изучение корректных по Тихонову задач	135
2. Теория квазирешений	137
3. Регуляризация существенно некорректных задач	138
ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ (Н. П. Кеда)	141
ПРИБЛИЖЕННЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО (Л. А. Янович)	145

ГЛАВА ТРЕТЬЯ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

РАЗВИТИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ (А. И. Ахиезер)	150
1. Единство физической теории и ее математического аппарата	150
2. Классическая электродинамика и теория относительности	153
3. Макроскопическая электродинамика	156

4. Квантовая механика	158
5. Статистическая механика	161
6. Квантовая электродинамика	165
7. Теория сильного взаимодействия	171
КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ (О. С. Парасюк)	178
1. Проблема устранения расходимостей в квантовой электродинамике	179
2. Теория ренормализационной группы и перестройка рядов теории возмущений	184
3. Математические проблемы, возникшие в теории дисперсионных соотношений	186
4. Аналитические проблемы теории возмущений	190
НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ (А. В. Свидзинский)	192

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ

ВВЕДЕНИЕ (А. Н. Боголюбов, И. Б. Погребынский)	209
МАТЕМАТИКА И МЕТОДЫ МЕХАНИКИ (А. Ю. Ишлинский)	210
1. Механика в наши дни	210
2. Качественная и количественная стороны в механике	216
3. Критерии устойчивости линейных систем	224
4. Сингулярные интегральные уравнения	227
5. Теория функций комплексного переменного	229
6. Метод характеристик в теории дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа	232
7. Операционное исчисление	234
РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ (В. А. Добровольский)	236
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА (А. Д. Коваленко, Г. Н. Савин, Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлин)	251
АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ (Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова)	264
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГИДРОАЭРОДИНАМИКЕ (А. Н. Боголюбов)	290
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ (И. И. Ляшко)	303
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ	309
1. Развитие математических методов в теории механизмов (А. Н. Боголюбов)	309
2. Применение теории функций комплексного переменного (С. М. Великая)	324
3. Применение методов нелинейной механики (Е. М. Нестеренко)	328
МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА В МЕХАНИКЕ (П. П. Забрейко)	334

ГЛАВА ПЯТАЯ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА

КИБЕРНЕТИКА И МАТЕМАТИКА (В. М. Глушков)	343
АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ЯЗЫКИ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ (А. П. Ершов, В. Н. Редько, М. Р. Шура-Бура, Е. Л. Юценко)	351
МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛОГОВАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА (Г. Е. Пузов, А. Ф. Верлань)	370
ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ (А. А. Летичевский)	382
ЭКОНОМИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА (В. С. Михалевич)	387

ГЛАВА ШЕСТАЯ. ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

ВВЕДЕНИЕ (Ю. А. Гастев)	392
ДЕСКРИПТИВНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ (З. И. Козлова, А. А. Ляпунов)	393
ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ (Б. А. Трахтенброт)	409
1. Теория алгоритмов до 1945 г.	409
2. Общие исторические сведения	412
3. Варианты алгоритмов	416
4. Дескриптивные и классификационные вопросы	420
5. Нумерации	424
6. Алгоритмические проблемы	425
7. Алгоритмическое истолкование математических понятий	429
ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА (Ю. А. Гастев), Ю. Т. Медведев)	431
1. Формальные системы логики	433
2. Аксиоматическая теория множеств и арифметика	439
3. Теория моделей	441
4. Некоторые вопросы теории электрических систем	443
5. Теория рекурсивных функций	446
6. Алгоритмические вопросы алгебры	449
7. Конструктивное направление в математике	452

ГЛАВА СЕДЬМАЯ. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ (А. Н. Боголюбов, Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич)

ВВЕДЕНИЕ	455
ИССЛЕДОВАНИЕ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ В СССР ДО 1945 г.	458
ИССЛЕДОВАНИЕ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ ПОСЛЕ 1945 г.	463
ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ИСТОРИИ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ	475
ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ ЗАРУБЕЖНЫХ СТРАН	487
БИБЛИОГРАФИЯ	499
СОВЕТСКИЕ МАТЕМАТИКИ (Краткий биографический словарь) (Э. Г. Цыганкова, Л. В. Ковальчук)	552
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ПОВРЕМЕННЫЕ ИЗДАНИЯ (Э. Г. Цыганкова)	628
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ	640

Печатается по постановлению ученого совета Института истории АН УССР и главной редакции

Редактор Е. Л. Орлик. Художественный редактор К. Г. Лычаковский. Оформление художника Б. В. Валуенко. Технические редакторы Б. М. Кричевская, М. А. Притыкина. Корректоры Э. Я. Белокопытова, З. Г. Гежун. Сдано в набор 8.I 1970 г. Подписано к печати 17.IX 1970 г. БФ 08426. Зак. № 356. Изд. № 206. Тираж 19037. Бумага № 1, 70×100¹/₁₆. Печ. физ. листов 41,75. Условн. печ. листов 54,275. Учетно-изд. листов 56,85. Цена 3 руб. 83 коп. Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Отпечатано с матриц полиграфического комбината г. Киева в Киевской книжной типографии № 5 Комитета по печати при Совете Министров УССР, Киев, Репина 4. Зак. 738.

Зав. 83 ноп.

